

GÖTEBORGS UNIVERSITET  
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Fysiska institutionen  
Teoretisk fysik  
Anders Boström,  
Gerhard Kristensson/BE

Oktober 1983

LABORATIONER I

TILLÄMPAD MATEMATISK FYSIK B.

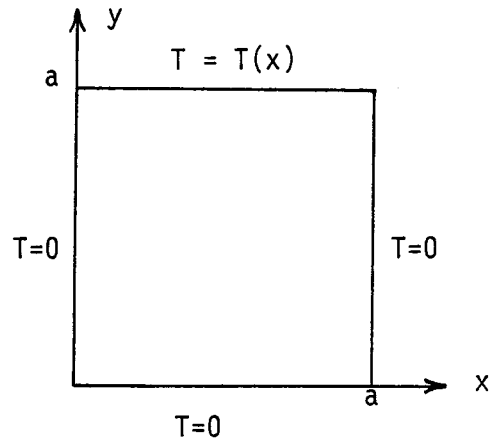
### Inledning.

I redovisningen av laborationerna bör du ta med följande punkter:

- 1) Problemformulering.
- 2) Analytisk lösning eller teori.
- 3) Diskussion av använda numeriska metoder, och ev. kort beskrivning av programmets uppbyggnad (uppdelning i subrutiner osv; flödësschema behövs ej).
- 4) Program - och resultatutskrifter (gärna figurer).
- 5) Ev. diskussion av begränsningar, speciella svårigheter osv.

Introduktionslaboration.

Den statistiska temperaturfördelningen i en kvadrat med sidan  $a$  sökes. Temperaturen  $T(x,y)$  satisfierar Laplace's ekvation med randvillkor enligt figuren.



Olika randvillkor:

1)  $T(x) = T_0 \frac{x}{a} (1 - \frac{x}{a})$

2)  $T(x) = T_0 e^{\zeta x/a} \sin \frac{\pi x}{a}$        $\zeta$  positiv, reell

3)  $T(x) = T_0 \frac{x}{a} \sin k \frac{\pi x}{a}$        $k$  positivt heltal

Bestäm  $T(x,y)$  i ett antal punkter i kvadraten, förslagsvis i  $11 \times 11$  punkter (randpunkter inräknade).

Laboration: Utböjning och vibration av oändlig platta.

Radiellt symmetriska, transversella, vibrationer i en oändlig platta uppfyller ( $u$  är utböjningen)

$$b^2 \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 u(\rho, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\rho, t) = 0$$

Vid tiden  $t=0$  har plattan utböjningen  $u(\rho, 0) = f(\rho)$  och släpps från vila. Lösningen till detta problem är

$$u(\rho, t) = \frac{1}{2bt} \int_0^{\infty} f(\lambda) J_0 \left( \frac{\lambda \rho}{2bt} \right) \sin \left( \frac{\lambda^2 + \rho^2}{4bt} \right) \lambda d\lambda$$

Beräkna denna integral numeriskt. Gör program för  $J_0(x)$  själv (enkel precision bör räcka) och utnyttja givna integrationsrutiner. Låt beräkningen av  $f(\rho)$  ligga i ett särskilt funktionsprogram som lätt kan bytas ut. Testa förslagsvis med

$$f(\rho) = A e^{-\rho^2/a^2}$$

(kan lösas analytiskt) och sedan med t ex

$$f(\rho) = \begin{cases} \cos \frac{\rho\pi}{2a} & 0 \leq \rho \leq a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

Laboration: Akustiska egenfrekvenser i ett sfäriskt skal.

Bestäm egenfrekvenserna för området mellan två koncentrisk sfärer, radie  $a$  och  $b$ ,  $a < b$ . Sfärerna antas båda vara hårda, dvs hastighetspotentialen  $\phi$  uppfyller Neumanns randvillkor  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ . Förslagsvis bestäms de tjugo lägsta egenfrekvenserna för t ex  $a/b = 0,5$  och  $a/b = 0,9$ .

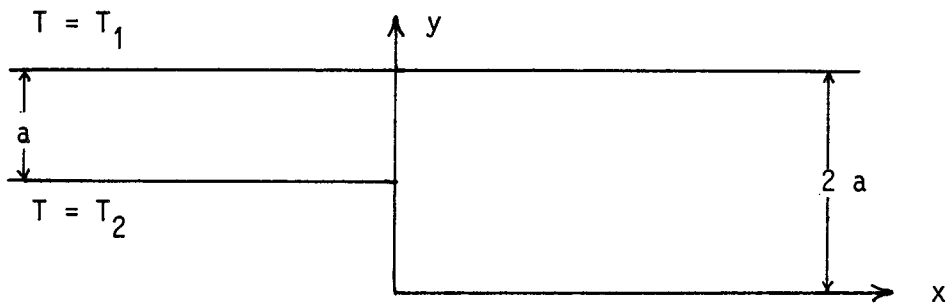
Laboration: Potentialproblem utanför sfär.

Beräkna potentialen utanför en sfär då potentialen  $\phi$  på sfärens yta  $r = a$  är given som  $\phi(r=a) = f(\theta)$  (rotationssymmetri).

- 1) Lös problemet analytiskt som en Fouriersumma, där  $f(\theta)$ :s Fourier-koefficienter  $\alpha_n$  ingår.
- 2) Gör ett datorprogram som kan behandla allmänna Fourier-koefficienter  $\alpha_n$ .
- 3) Kontrollera lösningen med t ex  $f(\theta) = \cos 5\theta$
- 4) Ger sedan en körning för ett allmänt fall, t ex  $f(\theta) = (\theta - \pi/2)^6 \cos \theta$ .

Laboration: Temperatur i vägg med varierande tjocklek.

Bestäm med konform avbildning isotermerna till följande temperaturproblem:

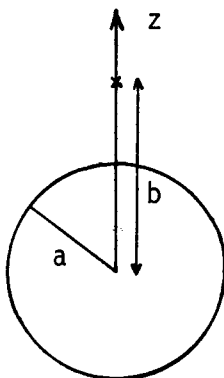


Förslagsvis bestäms 10 isotemer med  $T_2 = 0$ ,  $T_1 = 1$ .

Laboration: Akustisk punktkälla utanför sfär.

Beräkna fjärrfältet från en akustisk punktkälla utanför en hård sfär. Problemet för hastighetspotentialen  $\phi$  kan formuleras på följande sätt (underförstått  $e^{-i\omega t}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 + k^2) \phi = 0 \quad k = \omega/c \quad c = \text{ljudhastigheten} \\ \text{Randvillkor: } \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \text{ på sfärens yta } r = a \\ \text{Källa: } \phi_0 = \exp(ikR)/kR \quad R = |\vec{r} - b\hat{z}| \end{array} \right.$$



Definiera fjärrfältsamplituden  $S = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ikr}}{kr} \right)^{-1} \cdot \phi$

Beräkna  $|S|$  som funktion av  $\theta$  för några olika värden på  $ka$  och  $b/a$ .

T ex  $ka = 0.1, 2, 2\pi$  och  $b/a = 2$ . Försök även med  $b/a = 1$ .



Laboration: Spridning mot sfär.

Betrakta spridningen av en akustisk planvåg mot en hård sfär. Beräkna numeriskt det totala spridningstvårsnittet som funktion av  $ka$ , förslagsvis i intervallet  $0 < ka \leq 10$ . Kontrollera lösningen med det analytiska uttrycket i långvågsgränsen (små  $ka$ ).

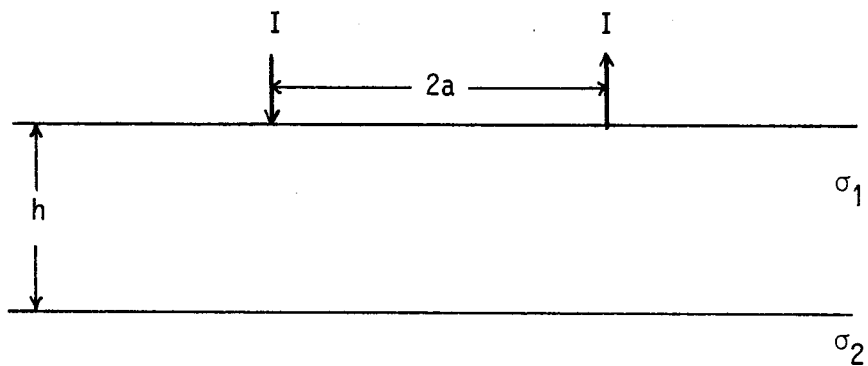
Laboration: Kapacitansberäkning för kvadratisk kondensator.

Beräkna kapacitansen  $C$  för två parallella kvadratiske plattor (sida  $a$ ) som funktion av separationsavståndet  $d$ . Beräkna även ytladdningsfördelningen på plattorna. Undersök dels fallet då plattorna har potentialen  $V$  och  $-V$  dels fallet då plattorna har samma potential.

Lämplig ref.litt.: R.F. Harrington: Field Computations by Moment Methods (finns att låna).

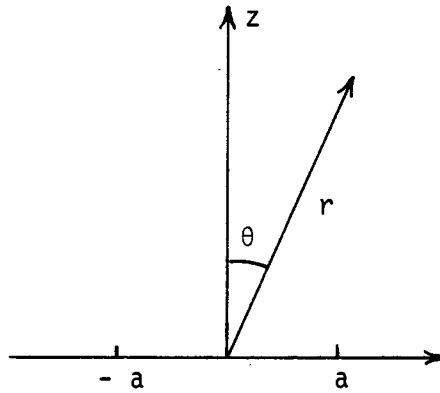
Laboration: Geofysisk prospektering. (Se appendix.)

Låt en likström  $I$  ledas ner i jorden via två spett. Beräkna potentialen på markytan om jorden tas som en två-skiktad, men i övrigt homogen, halvrymd, och om avståndet mellan spetten är  $2a$ , och skiktets tjocklek är  $h$ .



Laboration: Högtalare i vägg. (Se appendix.)

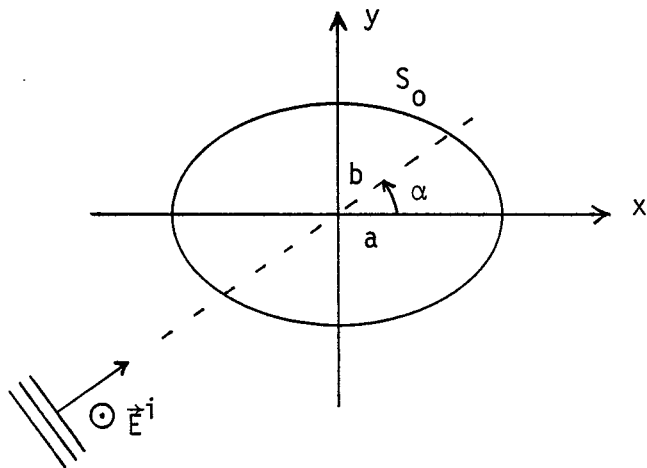
Beräkna strålningstrycket  $p$  från en utbredd, stationär, rotations-symmetrisk ljudkälla med frekvens  $\omega$  i ett plan. Källan antas ge en given hastighetsprofil  $f(\rho)e^{-i\omega t}$  för  $|\rho| < a$  (för övrigt noll) vinkelrätt mot planet.



Laboration: Spridning av elektromagnetisk våg mot perfekt ledande elliptisk cylinder. (Se appendix.)

Bestäm det totala spridningstvårsnittet  $\sigma$  för stationär spridning av en elektromagnetisk planvåg mot en perfekt ledande elliptisk cylinder med storaxel  $2a$  och lillaxel  $2b$ . Den infallande vågen är polariserad så att det elektriska fältet är parallellt med cylinderaxeln, och vågens infallsvinkel med storaxeln  $a$  är  $\alpha$ , dvs

$$\vec{E}^i = \hat{z} \exp (ik\rho \cos(\alpha - \phi) - i\omega t)$$

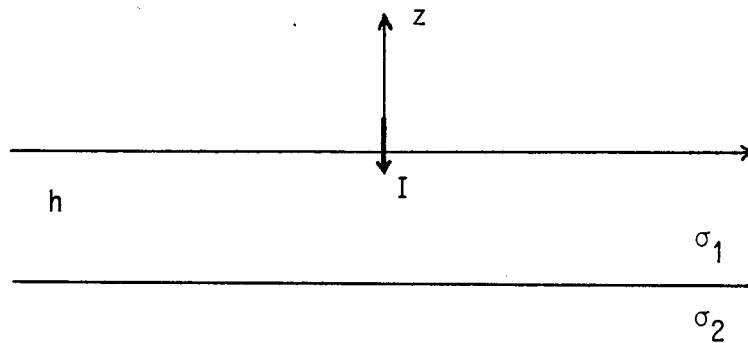


Appendix till Geofysisk prospektering.

Vi formulerar problemet som ett randvärdesproblem för potentialen  $\phi$ .  
I de två områdena gäller

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 \\ \vec{j} = -\sigma \nabla\phi \end{cases}$$

Vi kan dela upp problemet så att den totala lösningen fås som en superposition av två "enspetts"-lösningar (en där strömmen går upp och en där den går ner). Om vi väljer origo i källpunkten på ytan får vi således att (problemet rotationssymmetriskt)



$$\nabla^2 \phi_i(\rho, z) = 0 \quad i = 1, 2$$

Randvärden: 
$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \phi_1(\rho, 0) = \frac{I}{\sigma_1} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \\ \sigma_1 \frac{\partial}{\partial z} \phi_1(\rho, -h) = \sigma_2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_2(\rho, -h) \\ \phi_1(\rho, -h) = \phi_2(\rho, -h) \\ \phi_2(\rho, z) \text{ ändlig då } z \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Vi löser problemet genom att Hankeltransformera i  $\rho$ -led.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_i(\lambda, z) = \int_0^{\infty} \rho d\rho \phi_i(\rho, z) J_0(\lambda\rho) \\ \phi_i(\rho, z) = \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \hat{\phi}_i(\lambda, z) J_0(\lambda\rho) \end{array} \right. \quad i = 1, 2$$

Transformering av differentialekvation och randvillkor ger (utintegrerade termen antas försvinna):

$$-\lambda^2 \hat{\phi}_i + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{\phi}_i = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}_1(\lambda, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \\ \sigma_1 \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}_1(\lambda, -h) = \sigma_2 \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}_2(\lambda, -h) \\ \hat{\phi}_1(\lambda, -h) = \hat{\phi}_2(\lambda, -h) \\ \hat{\phi}_2(\lambda, z) \text{ ändlig då } z \rightarrow -\infty \end{array} \right.$$

Lösningarna är

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_1(\lambda, z) = A_1(\lambda) e^{\lambda z} + B_1(\lambda) e^{-\lambda z} \\ \hat{\phi}_2(\lambda, z) = A_2(\lambda) e^{\lambda z} + B_2(\lambda) e^{-\lambda z} \end{array} \right. \quad \lambda \geq 0$$

Randvillkoren ger följande ekvationssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda A_1 - \lambda B_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \\ \sigma_1(\lambda A_1 e^{-\lambda h} - \lambda B_1 e^{\lambda h}) = \sigma_2(\lambda A_2 e^{-\lambda h} - \lambda B_2 e^{\lambda h}) \\ A_1 e^{-\lambda h} + B_1 e^{\lambda h} = A_2 e^{-\lambda h} + B_2 e^{\lambda h} \\ B_2 = 0 \end{array} \right.$$

som har lösningen

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1(\lambda) = \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) e^{\lambda h}}{\sigma_1 \sinh \lambda h + \sigma_2 \cosh \lambda h} \\ B_1(\lambda) = \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}) e^{-\lambda h}}{\sigma_1 \sinh \lambda h + \sigma_2 \cosh \lambda h} \\ A_2(\lambda) = \frac{I}{2\pi\lambda} \frac{e^{\lambda h}}{\sigma_1 \sinh \lambda h + \sigma_2 \cosh \lambda h} \\ B_2(\lambda) = 0 \end{array} \right.$$



Lösningen till potentialproblemet är således

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_1(\rho, z) &= \frac{I}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) e^{\lambda(z+h)} + \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) e^{-\lambda(z+h)}}{\sigma_1 \sinh \lambda h + \sigma_2 \cosh \lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda; -h \leq z \leq 0 \\ \phi_2(\rho, z) &= \frac{I}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(z+h)}}{\sigma_1 \sinh \lambda h + \sigma_2 \cosh \lambda h} J_0(\lambda \rho) d\lambda; z \leq -h \end{aligned} \right.$$

eller om vi inför  $c = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$  kan vi skriva om

$$\phi_1(\rho, z) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda z+h} + c e^{-\lambda(z+h)}}{e^{\lambda h} - c e^{-\lambda h}} J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$= \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^{\infty} \left[ e^{\lambda z} + \frac{c e^{-\lambda h} (e^{\lambda z} + e^{-\lambda z})}{e^{\lambda h} - c e^{-\lambda h}} \right] J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

Den första termen kan integreras direkt ty

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda\rho) d\lambda = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

Vi får

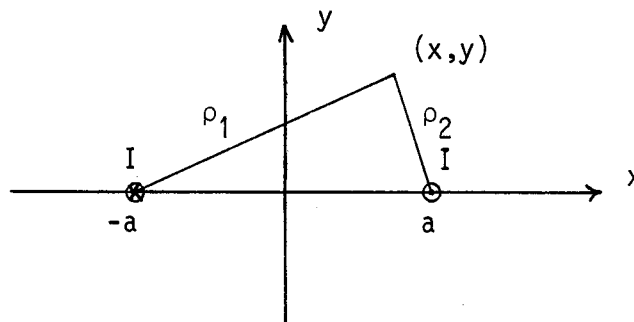
$$\phi_1(\rho, z) = \frac{I}{2\pi\sigma_1 r} + \frac{Ic}{\pi\sigma_1} \int_0^{\infty} \frac{\cosh \lambda z}{e^{2\lambda h} - c} J_0(\lambda\rho) d\lambda$$

Den första termen svarar mot en helt homogen halvrymd ( $h \rightarrow \infty$ ) medan den återstående integralen ger avvikelser på grund av att ett skikt finns i marken.

På markytan  $z = 0$  får vi

$$\phi_1(\rho, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1 \rho} \left[ 1 + 2c\rho \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda\rho) d\lambda}{e^{2\lambda h} - c} \right]$$

Det ursprungliga problemets lösning kan tecknas som en superposition av två lösningar, den ena med källa i  $x = -a$  den andra med källa i  $x = a$ .



markytan sett från ovan

Potentialen på markytan blir

$$\phi(x,y) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} + 2c \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda\rho_1) - J_0(\lambda\rho_2)}{e^{2\lambda h} - c} d\lambda \right\}$$

Förslag på data:  $\frac{1}{\sigma_1} = 1 \text{ k}\Omega \text{ m}$

$$\frac{1}{\sigma_2} = 5 \text{ k}\Omega \text{ m}$$

$$h = 50 \text{ m}$$

$$a = 100 - 500 \text{ m}$$

Appendix till Högtalare i vägg.

Detta problem kan lösas genom att införa hastighetspotentialen  $\phi(\vec{r})$ .  
(Vi antar att alla storheter har tidsberoendet  $e^{-i\omega t}$ , som inte explicit anges.) (Över-) trycket  $p$  ges då av

$$\begin{cases} \vec{v} = -\nabla\phi \\ p = i\omega\rho_0\phi \end{cases} \quad (1)$$

där  $\rho_0$  är luftens täthet.

Hastighetspotentialen (liksom även  $p$ ) uppfyller Helmholtz ekvation ( $k = \omega/c$ ;  $c =$  ljudets fashastighet).

$$(\nabla^2 + k^2)\phi = 0 \quad (2)$$

Randvillkor på väggen ( $z = 0$ ):

$$\vec{v} \cdot \vec{z} = \begin{cases} f(\rho) & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad \text{för } z = 0$$

dvs

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \begin{cases} -f(\rho) & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad \text{för } z = 0 \quad (3)$$

Vidare gäller att ljudvågen skall vara en utåtgående sfärisk våg på stora avstånd från högtalaren ( $r \rightarrow \infty$ ). Detta villkor ger att  $\phi$  uppfyller följande utstrålningsvillkor

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \left( \frac{\partial}{\partial r} \phi - ik\phi \right) \right] = 0 \quad (4)$$

(Kan inses av att  $\phi e^{-i\omega t} \sim \hat{s}(\hat{r}) \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$  + bidrag som avtar snabbare då  $r \rightarrow \infty$  för en sfäriskt utgående våg.)

Laborationen går ut på att beräkna strålningsfältet  $S(\hat{r})$  (eller  $i\omega\rho_0 S(\hat{r})$ ) och beräkna denna storhet för några val av  $f(\rho)$  och frekvenser  $\nu$ .

$$S(\hat{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} [\phi(\vec{r}) re^{-ikr}] \quad (5)$$

Vi löser detta problem med en teknik som är användbar även för andra randvärdesproblem med Helmholtz ekvation. För ett ögonblick lämnar vi därför vårt akustiska problem och betraktar följande ekvationer i ett område  $V$  i rummet (än så länge godtyckligt)

$$\begin{cases} (\nabla'^2 + k^2) \phi(\vec{r}') = 0 & \vec{r}' \in V \\ (\nabla'^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{cases} \quad (6)$$

där  $\nabla'$  innebär derivering med primade storheter.

Lösningen till den andra ekvationen är välkänd

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + \psi(\vec{r}')$$

där  $\psi(\vec{r}')$  uppfyller Helmholtz homogena ekvation i  $V$ . Lägg märke till att som en funktion av  $\vec{r}$  uppfyller  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  utstrålningsvillkoret i (4).

Vårt mål är att konstruera en integralformel för fältet  $\phi$ . Denna fås genom att multiplicera ekvationerna i (6) med  $G$  resp.  $\phi$  samt subtrahera. Vi får

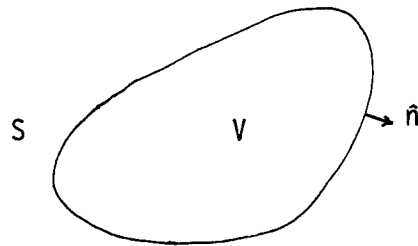
$$\nabla' \cdot (G \nabla' \phi - \phi \nabla' G) = \phi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Om vi integrerar uttrycket över volymen  $V$  får vi med Gauss sats

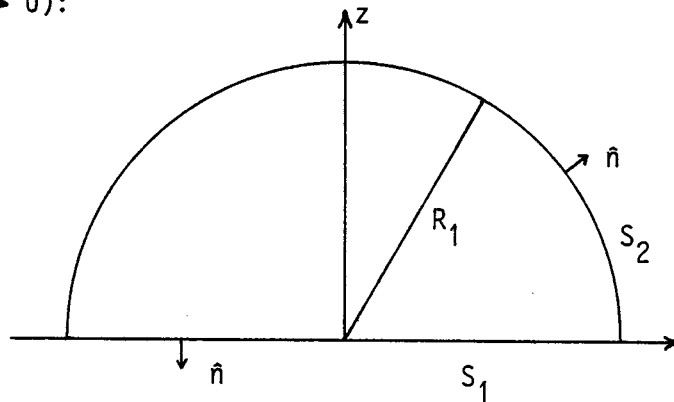
$$\int_S [G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' \phi(\vec{r}) - \phi(\vec{r}') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}')] \cdot \hat{n}' dS' = \Delta(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \quad (7)$$

där  $S$  är  $V$ 's begränsningsyta med utåtriktad normal  $\hat{n}$  och

$$\Delta(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \vec{r} \in V \\ 0 & \text{om } \vec{r} \notin V \end{cases}$$



Vi återgår nu till vårt akustiska problem och tillämpar (7) på volymen  $V$ , som begränsas av  $S = S_1 + S_2$  enligt följande figur ( $S_1$  gränsvärdet då  $z \rightarrow 0$ ):



För  $z > 0$  ( $\vec{r} \in V$ ) så gäller

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) = & \int_{S_1} \left[ \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \phi(\vec{r}') \right] dS' \\ & + \int_{S_2} \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} \phi(\vec{r}') - \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial r'} G(\vec{r}, \vec{r}') \right] dS'. \end{aligned}$$

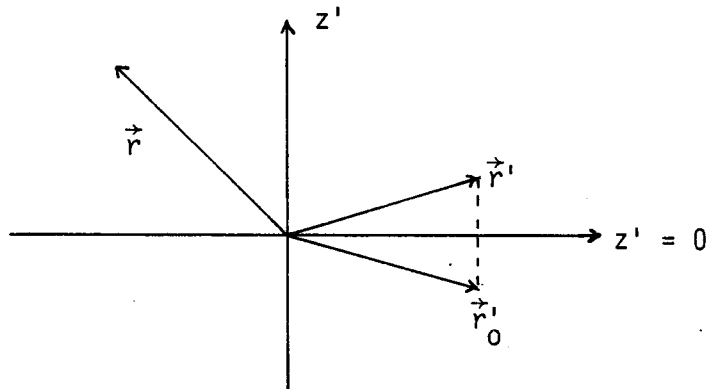
Låt nu  $R_1 \rightarrow \infty$ . Integralen över  $S_2$  kan visas  $\rightarrow 0$  i gränsen  $R_1 \rightarrow \infty$  (p g a utstrålningsvillkoret) och vi får ( $S_1$  i gränsen hela  $x - y$ -planet)

$$\phi(r) = \int_{z'=0} \left[ \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{r}, \vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial z'} \phi(\vec{r}') \right] dS', \quad z > 0 \quad (8).$$

Välj nu den i  $V$  källfria lösningen  $\psi(\vec{r}')$  vid konstruktion av  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  så att  $\frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$  för  $z' = 0$  och  $z > 0$ . Spegling i planet  $z' = 0$  ger

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'_0|}}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'_0|}$$

där  $\vec{r}'_0$  är  $\vec{r}'$ 's speglad i  $z' = 0$  (dvs  $z' \leftrightarrow -z'$ )



Vi har således konstruerat

$$\frac{\partial}{\partial z'} G(\vec{r}, z'=0) = 0, \quad z > 0$$

$$G(\vec{r}, z'=0) = \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{r}' = (x', y', 0)$$

Vi får till slut fältet för  $z > 0$  ur (8)

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{z'=0} \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial z'} \phi(\vec{r}') dS' \quad (9)$$

Strålningsfältet får vi nu genom att låta  $\vec{r} \rightarrow \infty$ .

$$\text{Låt } R = |\vec{r} - \vec{r}'| = (r^2 + \rho'^2 - 2r\rho' \sin \theta \cos \phi')^{1/2}$$

där  $\phi'$  är  $\vec{r}'$ 's azimutvinkel. Med insatta randvillkor på ytan  $z' = 0$  (se (3)) får vi ur (9) för  $z > 0$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \rho' d\rho' \frac{e^{ikR}}{R} f(\rho')$$

Med definitionen (5) får vi

$$S(\hat{r}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ \phi r e^{-ikr} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \rho' d\rho' \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{R} e^{ik(R-r)} f(\rho')$$

men  $\frac{r}{R} e^{ik(R-r)} \rightarrow e^{-ik\rho' \sin \theta \cos \phi'}$  då  $r \rightarrow \infty$

Vi får till slut

$$\begin{aligned} S(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^a \rho' d\rho' e^{-ik\rho' \sin \theta \cos \phi'} f(\rho') = \\ &= \int_0^a f(\rho') J_0(k\rho' \sin \theta) \rho' d\rho' \quad (10) \end{aligned}$$

Energiströmtätheten (effekten / y.e.) har medelvärdet

$$\langle \vec{j} \rangle = -\rho_0 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\phi e^{-i\omega t}) \nabla \operatorname{Re}(\phi e^{-i\omega t}) \right\rangle$$

I radialled får vi på stora avstånd

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\rho_0}{2r^2} \omega k |S|^2$$

Integralen tas som utgångspunkt för beräkning av S som funktion av  $\theta$  för ett antal olika frekvenser  $\nu$  ( $ka$ ). Ett större  $ka$ -värde bör ge ett ökat antal "sidolober" i strålningsbilden (mer känsligt för riktning)

$$\text{Test: } \int_0^1 x dx (1-x^2)^\mu J_0(ax) = 2^\mu \Gamma(\mu+1) a^{-\mu-1} J_{\mu+1}(a)$$

$$a > 0, \operatorname{Re} \mu > -1.$$



Appendix till Spridning av elektromagnetisk våg mot perfekt ledande elliptisk cylinder.

På grund av den infallande vågens polarisation degenererar detta problem till ett skalärt. Helt allmänt kan problemet formuleras i det totala fältet  $\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^s$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0} & , k = \omega/c \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Randvillkor på cylinderytan  $S_0$ :  $\hat{n} \times \vec{E} = \vec{0}$

Vi har dessutom ett "randvillkor" för stora  $\rho$  värden på den spridda vågen  $\vec{E}^s$ . Av fysikaliska skäl skall den representera en utåtgående cylindrisk våg, dvs

$$\vec{E}^s \sim \vec{S}(\hat{r}) \frac{e^{i(k\rho - \omega t)}}{\rho^{1/2}} + \text{bidrag som avtar snabbare då } \rho \rightarrow \infty.$$

Då den infallande vågen endast har en z-komponent får vi att även det totala fältet endast har en z-komponent och vi får följande tvådimensionella skalära problem att lösa:

$$(\nabla^2 + k^2)E_z(\rho, \alpha) = 0$$

Randvillkor:  $E_z = 0$  på ellipsens yta  $S_0$  (1)

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho^{1/2} \left[ \frac{\partial E_z^s}{\partial \rho} - i k E_z^s \right] \right\} = 0$$

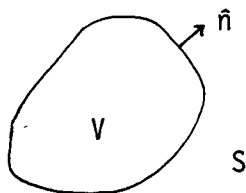
Vi kan på detta stadium göra en jämförelse med formuleringen av lösningen av problemet i laborationen "högtalare i vägg". Utgångspunkten i det fallet var en allmän teknik som byggde på Greenfunktionen (i det fallet i tre dimensioner). Här skall vi använda samma teknik och med referens till "högtalare i låda" ekvationerna (6) och (7) kan vi helt allmänt teckna ett uttryck för lösningen till Helmholtz ekvation i en volym  $V$  som

$$\int_S \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' E_z(\vec{r}') - E_z(\vec{r}') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \hat{n}' dS' = \Delta(\vec{r}) E_z(\vec{r}) \quad (2)$$

där  $S$  är  $V$ :s begränsningsyta med utåtriktad normal  $\hat{n}$

$$\text{och } \Delta(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{om } \vec{r} \in V \\ 0 & \text{om } \vec{r} \notin V \end{cases}$$

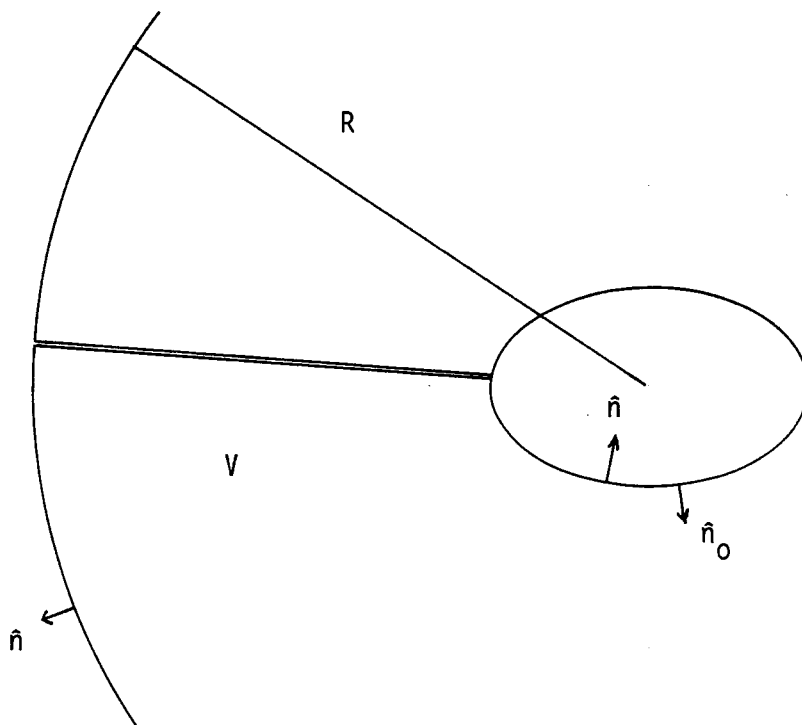
( $\vec{r}$  är en tvådimensionell vektor i planet.)



Den tvådimensionella Greenfunktionen  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  som uppfyller utstrålningsvillkoren är

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

Vi skall nu tillämpa detta integraluttryck på vårt problem och vi väljer då  $V$  enligt följande figur:



Integralen över den stora cirkeln ( $\rho = R$ ) ger i gränsen endast den infallande vågen (den spridda vågen uppfyller utstrålningsvillkoret), dvs vi får då den inre ytan sammanfalla med  $S_0$  och  $R \rightarrow \infty$ :

$$E_z^i(\vec{r}) = \int_{S_0} \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' E_z(\vec{r}') - E_z(\vec{r}') \nabla' G(\vec{r}, \vec{r}') \right] \cdot \hat{n}'_0 \, dS'$$

$$= \begin{cases} E_z(\vec{r}) & \vec{r} \text{ utanför } S_0 \\ 0 & \vec{r} \text{ innanför } S_0 \end{cases}$$

Med randvillkoret  $E_z = 0$  på  $S_0$  får så till slut

$$E_z^i(\vec{r}) = \int_{S_0} G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla' E_z(\vec{r}') \cdot \hat{n}'_0 \, dS' = \begin{cases} E_z(\vec{r}) & \vec{r} \text{ utanför } S_0 \\ 0 & \vec{r} \text{ innanför } S_0 \end{cases} \quad (3)$$

Denna integralframställning är utgångspunkt för vår lösning av problemet, och lägg märke till att utanför  $S_0$ , så representerar integralen  $-E_z^S$ . I (3) är det underförstått att  $\nabla' E_z(\vec{r}') \cdot \hat{n}'_0$  är gränsvärdet av detta fält från utsidan av  $S_0$ .

För att få lätthanterliga storheter inför vi de cylindriska vågorna enligt

$$\begin{cases} \text{Re } \chi_{\sigma m}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2\pi}} J_m(k\rho) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \\ \chi_{\sigma m}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2\pi}} H_m^{(1)}(k\rho) \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \end{cases} \quad \sigma = \begin{pmatrix} e \\ o \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{even} \\ \text{odd} \end{matrix}; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$\epsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$$

Enligt HMF 9.1.79 kan vi utveckla  $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|)$  enligt

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = i\pi \sum_{\substack{m=0 \\ \sigma=e,0}}^{\infty} \text{Re} \chi_{\sigma m}(\vec{r}_<) \chi_{\sigma m}(\vec{r}_>) \quad (5)$$

där  $\vec{r}_>(\vec{r}_<)$  refererar till det största (minsta) av avstånden  $\rho, \rho'$ .

Denna seriepresentation av  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  är likformigt konvergent för alla  $\rho \neq \rho'$ .

Låter vi nu  $\vec{r}$  vara sådan att  $\rho > a$  (utanför omskrivna cirkeln) så gäller enligt (3) och (5)

$$\begin{aligned} E_Z^S(\vec{r}) &= E_Z(\vec{r}) - E_Z^i(\vec{r}) = - \int_{S_0} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'_0} E_Z(\vec{r}') dS' \\ &= \sum_{\substack{m=0 \\ \sigma=e,0}}^{\infty} f_{\sigma m} \chi_{\sigma m}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (6)$$

där

$$f_{\sigma m} = -i\pi \int_{S_0} \text{Re} \chi_{\sigma m} \frac{\partial E_Z}{\partial n'_0} dS' \quad (7)$$

Om vi å andra sidan tar ett  $\rho < b$  (innanför inskrivna cirkeln) får vi

$$E_Z^i(\vec{r}) = \int_{S_0} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'_0} E_Z(\vec{r}') dS' = \sum_{\substack{m=0 \\ \sigma=e,0}}^{\infty} a_{\sigma m} \text{Re} \chi_{\sigma m}(\vec{r}) \quad (8)$$

där

$$a_{\sigma m} = i\pi \int_{S_0} \chi_{\sigma m} \frac{\partial E_Z}{\partial n'_0} dS' \quad (9)$$

Lägg märke till att den infallande vågens utvecklingskoefficienter  $a_{\sigma m}$  är kända. Den okända storheten är  $\frac{\partial E_z}{\partial n_0}$ , som vi nu skall eliminera genom att utveckla detta fält i ett fullständigt funktions-system på ytan  $S_0$ , t ex  $\left\{ \text{Re } \chi_{\sigma m} \right\}$   $\begin{matrix} \sigma = e, o \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$

Vi ansätter på ytan  $S_0$ :

$$\frac{\partial E_z(\vec{r}')}{\partial n_0} = \sum_{\sigma m} \alpha_{\sigma m} w(\vec{r}') \text{Re} \chi_{\sigma m}(\vec{r}')$$

där  $w(\vec{r}')$  är en funktion som vi skall specificera senare.

Insättning i (7) och (9) ger

$$\begin{cases} f_{\sigma m} = -i \sum_{\sigma' m'} \text{Re } Q_{\sigma m \sigma' m'} \alpha_{\sigma' m'} \\ a_{\sigma m} = i \sum_{\sigma' m'} Q_{\sigma m \sigma' m'} \alpha_{\sigma' m'} \end{cases} \quad (10)$$

där de sk Q-matriserna definieras som

$$\begin{cases} \text{Re } Q_{\sigma m \sigma' m'} = \pi \int_{S_0} \text{Re } \chi_{\sigma m} \text{Re } \chi_{\sigma' m'} w dS' \\ Q_{\sigma m \sigma' m'} = \pi \int_{S_0} \chi_{\sigma m} \text{Re } \chi_{\sigma' m'} w dS' \end{cases} \quad (11)$$

Formellt kan vi eliminera  $\alpha_{\sigma m}$  ur (10) och vi får

$$\begin{cases} f_{\sigma m} = - \sum_{\substack{\sigma' m' \\ \sigma'' m''}} \operatorname{Re} Q_{\sigma m \sigma'' m''} (Q^{-1})_{\sigma'' m'' \sigma' m'} a_{\sigma' m'} = \sum_{\sigma' m'} T_{\sigma m \sigma' m'} a_{\sigma' m'} \\ T_{\sigma m \sigma' m'} = - \sum_{\sigma'' m''} \operatorname{Re} Q_{\sigma m \sigma'' m''} (Q^{-1})_{\sigma'' m'' \sigma' m'} \end{cases} \quad (12)$$

Observera att  $T_{\sigma m \sigma' m'}$  (den s k T-matrisen) är oberoende av den infallande vågen, och innehåller endast ytans form och randvillkor. Om  $T_{\sigma m \sigma' m'}$  och  $a_{\sigma m}$  är kända så fås sedan den spridda vågen  $E_Z^S$  ur (12) och (6). Numeriskt löses ekvationerna (10) eller (12) med ändlig trunkering.

Vi skall nu ta fram utvecklingskoefficienterna  $a_{\sigma m}$  för den infallande vågen  $E_Z^i = \exp[ik\rho \cos(\alpha - \phi)]$ , se (8).

Från HMF 9.1.44-45 får vi

$$\exp(ik\rho \cos \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_k(k\rho) \cos m\theta$$

Vi får således utvecklingskoefficienterna för planvågen

$$a_{\sigma m} = \sqrt{2\pi\epsilon_m} i^m (\delta_{\sigma,e} \cos m\alpha + \delta_{\sigma,o} \sin m\alpha) \quad (13)$$

och den spridda vågen får vi sedan formellt ur (12) och (6).

Vad som återstår att analysera är då det totala spridningstvårsnittet  $\sigma$  som definieras som

$$\sigma = \frac{\text{spridd effekt/l.e.}}{\text{infallande effekt/y.e.}}$$

Den spridda effekten beräknas lättast på en stor cirkel, där

$$\chi_{\sigma m}(\vec{r}) \sim \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2\pi}} \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} e^{i(k\rho - \pi(m/2+1/4))} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}$$

Den totala effekten/y.e. ges av Poyntings vektor, och medelvärdet blir

$$\langle \vec{s} \cdot \hat{\rho} \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_z^S H_\phi^{S*}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} |E_z^S|^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \left| \sum_{\sigma m} f_{\sigma m} \chi_{\sigma m} \right|^2$$

Dvs den spridda effekten/l.e. blir p g a ortogonalitet

$$\int_0^{2\pi} \rho d\phi \langle \vec{s} \cdot \hat{\rho} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2} \frac{2}{k\pi} \sum_{\sigma m} |f_{\sigma m}|^2$$

Den infallande vågens effekt/y.e. är  $\langle \vec{s} \cdot \hat{k} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \right)^{1/2}$

Vi får spridningen per längdenhet av cylindern

$$\sigma = \frac{2}{k\pi} \sum_{\sigma m} |f_{\sigma m}|^2 \quad (14)$$

Genom att införa spridningsamplituden  $S(\phi)$

$$E_z^S(\vec{r}) \sim \sqrt{\frac{2}{i\pi k\rho}} e^{ik\rho} S(\phi) \quad \text{då } \rho \rightarrow \infty \quad (15)$$

kan vi med hjälp av det optiska teoremet skriva om  $\sigma$ . Resultatet är

$$\sigma = -\frac{4}{k} \operatorname{Re} [S(\alpha)]$$

dvs det totala spridningstvårsnittet är proportionellt mot spridningen i framåtriktningen, som kan skrivas

$$S(\phi) = \sum_{\sigma m} f_{\sigma m} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{2\pi}} i^{-m} \begin{pmatrix} \cos m \phi \\ \sin m \phi \end{pmatrix} \quad (16)$$

Analysen ovan har hittills varit helt allmän i två dimensioner, och vi har inte utnyttjat det faktum att vi här har en ellips som spridare. Vi går därför tillbaka till (11) och analyserar vilka förenklingar en ellips innebär på våra Q-matriser. Då  $\text{Re } Q_{\sigma m \sigma' m'}$  är realdelen av  $Q_{\sigma m \sigma' m'}$  (k reellt tal) så räcker det att analysera

$$\begin{aligned} Q_{\sigma m \sigma' m'} &= \pi \int_{S_0} \chi_{\sigma m} \text{Re } \chi_{\sigma' m'} w dS' \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon_m \epsilon_{m'}} \int_{\text{ellips}} H_m^{(1)}(k\rho) J_{m'}(k\rho) \begin{pmatrix} \cos m \phi \\ \sin m \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m' \phi \\ \sin m' \phi \end{pmatrix} w dS \end{aligned}$$

Ellipsen ges av

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

eller i polära koordinater

$$\rho(\phi) = \left( \frac{\cos^2 \phi}{a^2} + \frac{\sin^2 \phi}{b^2} \right)^{-1/2} \quad (17)$$

Vidare är  $dS' = d\phi \sqrt{\rho^2 + (\rho'(\phi))^2}$ , så om vi väljer

$$w(\vec{r}) = k^2 \rho^2 (\rho^2 + (\rho'(\phi))^2)^{-1/2} \quad (18)$$

då får vi

$$Q_{\sigma m \sigma' m'} = \frac{\sqrt{\epsilon_m \epsilon_{m'}}}{2} k^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 H_m^{(1)}(k\rho) J_{m'}(k\rho) \begin{pmatrix} \cos m \phi \\ \sin m \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos m' \phi \\ \sin m' \phi \end{pmatrix} d\phi$$

där  $\rho = \rho(\phi)$  ges av (17).



En rad symmetrier förenklar beräkningarna. Vi observerar först att  $\sigma = e$  och  $\sigma = o$  ej lämnar några korsbidrag, ty  $\rho(\phi) = \rho(2\pi - \phi)$ . Vidare är  $Q = 0$  då  $m + m'$  är ett udda heltal, p g a  $\rho(\phi) = \rho(\pi - \phi)$ . Skriver vi  $Q$ -matrisen som en matris i  $\sigma, \sigma'$  indexen får vi sålunda att

$$Q_{\sigma m \sigma' m'} = \begin{pmatrix} Q_{ee} & 0 \\ 0 & Q_{oo} \end{pmatrix}$$

där ( $m + m'$  jämnt heltal)

$$\begin{cases} Q_{ee} = 2 \sqrt{\epsilon_m \epsilon_{m'}} \int_0^{\pi/2} H_m^{(1)}(k\rho) J_{m'}(k\rho) \cos m\phi \cos m'\phi k^2 \rho^2 d\phi \\ Q_{oo} = 2 \sqrt{\epsilon_m \epsilon_{m'}} \int_0^{\pi/2} H_m^{(1)}(k\rho) J_{m'}(k\rho) \sin m\phi \sin m'\phi k^2 \rho^2 d\phi ; m, m' \geq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Ytterligare en symmetri är ytterst användbar men ganska svår att visa, nämligen att  $Q_{\sigma m \sigma' m'}$  är symmetrisk i  $m$  och  $m'$  indexen. Detta har till följd att endast fallet  $m' \gg m$  behöver räknas ut numeriskt i (19). Därefter kan  $Q$ -matrisen byggas upp och inverteras så att  $T$ -matrisen, se (12), erhålls, samt slutligen  $f_{\sigma m}$  i (12) och  $\sigma$  eller  $S$  i (14) eller (16).