ANDERS KARLSSON
och
GERHARD KRISTENSSON

MIKROVÅGSTEORI

Räkneregler med ∇-operatorn

(1) $\nabla(\varphi+\psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$

(2) $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$

(3) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$

(4) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = -\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$

(5) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla\cdot\boldsymbol{a} + \nabla\cdot\boldsymbol{b}$

(6) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) + (\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{a}$

(7) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$

(8) $\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \nabla\times\boldsymbol{a} + \nabla\times\boldsymbol{b}$

(9) $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a}) = \varphi(\nabla\times\boldsymbol{a}) + (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{a}$

(10) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$

(11) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + 2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$

(12) $\nabla\cdot\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$

(13) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}$

(14) $\nabla\times(\nabla\varphi) = \boldsymbol{0}$

(15) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = 0$

(16) $\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi$

(17) $\nabla r = \hat{\boldsymbol{r}}$

(18) $\nabla\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$

(19) $\nabla\times\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$

(20) $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$

(21) $\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{2}{r}$

(22) $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}$ konstant vektor

(23) $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}$

(24) $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{1}{r}\left(\boldsymbol{a} - \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{r}})\right) = \dfrac{\boldsymbol{a}_\perp}{r}$

(25) $\nabla^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}) = 2\nabla\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}\cdot(\nabla^2\boldsymbol{a})$

(26) $\nabla u(f) = (\nabla f)\dfrac{du}{df}$

(27) $\nabla\cdot\boldsymbol{F}(f) = (\nabla f)\cdot\dfrac{d\boldsymbol{F}}{df}$

(28) $\nabla\times\boldsymbol{F}(f) = (\nabla f)\times\dfrac{d\boldsymbol{F}}{df}$

(29) $\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\nabla) - \hat{\boldsymbol{r}}\times(\hat{\boldsymbol{r}}\times\nabla)$

Viktiga vektoridentiteter

(1) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}\,((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c})$

(2) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$

(3) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

(4) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

Integrationsformler

Stokes sats och till denna analoga satser

(1) $$\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \int_C \boldsymbol{A} \cdot\, d\boldsymbol{r}$$

(2) $$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla\varphi\, dS = \int_C \varphi\, d\boldsymbol{r}$$

(3) $$\iint_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla) \times \boldsymbol{A}\, dS = \int_C d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}$$

Gauss sats (divergenssatsen) och till denna analoga satser

(1) $$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dv = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

(2) $$\iiint_V \nabla\varphi\, dv = \iint_S \varphi\hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

(3) $$\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{A}\, dv = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{A}\, dS$$

Greens formler

(1) $$\iiint_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\, dv = \iint_S (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$

(2) $$\iiint_V (\psi\nabla^2\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\nabla^2\psi)\, dv$$
$$= \iint_S \left(\nabla\psi \times (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{A}) - \nabla\psi(\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{A}) - \psi(\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})) + \hat{\boldsymbol{n}}\psi(\nabla \cdot \boldsymbol{A})\right) dS$$

Karlsson & Kristensson: Mikrovågsteori

Mikrovågsteori

Anders Karlsson och Gerhard Kristensson

Innehåll

Förord

Även om de optiska fibrerna vinner mer och mer mark inom kommunikationsområdet utgör traditionella vågledare för mikrovågor fortfarande en viktig del i olika system för kommunikation. Den enklaste typen av vågledare för mikrovågor och vågor av lägre frekvens är transmissionsledningen. Denna leder TEM-vågor, dvs. vågor med transversellt elektriskt och magnetiskt fält. Eftersom TEM-vågorna kan göras dispersionsfria är transmissionsledningarna lämpliga i kommunikationssystem. I antennsystem som arbetar vid frekvenser högre än några GHz visar sig ofta hålrumsvågledare vara mer användbara än transmissionsledningar. Hålrumsvågledarna leder TE- och TM-vågor, dvs. vågor som inte är transversella. Fördelen med hålrumsvågledare är att de kan överföra stora effekter och de kan överföra vågor med en föreskriven polarisation, vilket gör dem oumbärliga i radarsystem och system för satellitkommunikation. Det egentliga genombrottet för hålrumsvågledare kom 1936 när fyra forskare vid Bell Telephone Laboratories i några utförliga rapporter presenterade experimentella och teoretiska resultat för hålrumsvågledare. Under andra världskriget gavs forskningen kring hålrumsvågledare och annan mikrovågsteknik hög prioritet. Ett stort antal fysiker, matematiker och ingenjörer arbetade under denna tid intensivt inom området och gjorde stora framsteg. Det är lätt att finna paralleller mellan utvecklingen av mikrovågstekniken under dessa år och utvecklingen av fiberoptiken och optroniken under de sista 20 åren. Efter andra världskriget har det varit en fortsatt utveckling av mikrovågstekniken, om än inte lika dramatisk som under krigsåren.

Trots att det skiljer minst en faktor 10^4 mellan dimensionerna av en hålrumsvågledare och kärnan i en optisk fiber har teorierna för vågledare och optiska fibrer stora likheter. Teorin i båda fallen bygger på Maxwells ekvationer och de viktigaste matematiska verktygen som används är separationsmetoden och vektoranalys.

Under det senaste decenniet har fiberoptisk kommunikation vuxit sig stark. Den främsta anledningen är att överföringshastigheten i ett fiberoptiskt system kan göras betydligt högre än i ett system som bygger på transmissionsledningar. Den korta men intensiva historiken för fiberoptiska system är intressant och några av dess viktiga steg beskrivs nedan[1]:

1960 He-Ne-lasern presenteras.

1963 Halvledarlasern (GaAs) presenteras.

[1] En mer utförlig historik finns t.ex. i J. E. Midwinter and Y. L. Guo, *Optoelectronics and Lightwave Technology*, John Wiley & Sons, New York, 1992.

1966 Glasfibrer föreslås som optiska vågledare. De bästa glasen har vid denna tid en dämpning av 1 dB/m vilket gör att intresset för detta förslag är mycket svalt.

1970 Fibrer med en dämpning av 20 dB/km framställs. Forskningen kring optiska fibrer tar ordentlig fart.

1977 De första fiberoptiska systemen börjar testas. Dessa klarar en överföringshastighet på 140 Mbit/s på en 9 km lång sträcka. Multimodfibrer används dvs. pulserna i vågledaren består av flera olika vågtyper (moder).

1980 Extremt rena kvartsglas med en dämpning av 0,2 dB/km vid våglängden 1550 nm kan tillverkas. Halvledarlasrar och detektorer som kan arbeta vid 1550 nm finns tillgängliga. För att få ned dispersionen går man över till singelmodfibrer dvs. pulserna består av endast en mod. Överföringshastigheter av 140 Mbit/s över en sträcka av 200 km rapporteras.

1990– Erbiumdopade fibrer börjar användas som förstärkare. I och med dessa är det dispersionen och inte dämpningen som är den begränsande faktorn för överföringshastigheten. Fibrer med överföringshastigheter på över 2,5 Gbit/s per kanal används kommersiellt och system med fibrer med överföringshastigheter av mer än 10 Gbit/s per kanal finns idag i laboratorier. Genom att använda många olika våglängder WDM (wavelength dispersion multiplexing) kan flera kanaler sändas på samma fiber. I laboratorier har man genom att använda ca 1000 olika våglängder lyckats med överföringshastigheter på 1 Tbit/s.

I arbetet med boken har vår filosofi varit att hela kedjan av led mellan de postulerade Maxwells ekvationer och de slutgiltiga formlerna och ekvationerna skall redovisas. Den grundläggande teorin är därför starkt betonad i boken. Kursen förutsätter vissa kunskaper i grundläggande elektromagnetisk fältteori, t.ex. grundkurserna i elektromagnetisk fältteori vid våra tekniska högskolor. Maxwells fältekvationer förutsätts vara bekanta, liksom grundläggande vektoranalys och räkningar med nablaoperatorn ∇.

I det första kapitlet repeteras den grundläggande teorin för elektromagnetiska fält. I det andra kapitlet visas hur man kan dela upp fälten och ekvationerna i en longitudinell och en transversell del m.a.p. utbredningsriktningen. Det tredje kapitlet behandlar teorin för hålrumsvågledare. I detta kapitlet studeras även effektöverföring och dämpning i vågledare samt matning av vågledare. Kapitel 4 behandlar pulsutbredning i hålrumsvågledare och slutligen ägnas kapitel 5 åt dielektriska vågledare. Den optiska fibern är en dielektrisk vågledare och en stor del av kapitel 5 är direkt inriktat på den optiska fibern.

Övningar på de olika teoriavsnitten finns samlade i slutet av varje kapitel. Mer krävande övningar är markerade med en stjärna ($*$). Svar till övningarna finns samlade i ett facit i slutet av boken. Varje kapitel avslutas med en sammanfattning av kapitlets viktigaste resultat.

Kapitel 1

Elektromagnetismens grundekvationer

Detta kapitel behandlar kortfattat de grundläggande ekvationerna för elektromagnetiska fält. I ett första avsnitt repeteras Maxwells fältekvationer för allmänna tidsberoende fält, randvillkor vid skiljeytor mellan två material samt energikonservering. I ett separat avsnitt behandlas tidsharmoniska förlopp där bl.a. polarisationsellipsen diskuteras. Kapitlet avslutas med ett avsnitt om de konstitutiva relationerna för isotropa material och klassificeringen i passiva, aktiva och förlustfria material.

1.1 Allmänna tidsberoende fält

1.1.1 Maxwells fältekvationer

Maxwells fältekvationer utgör den grundläggande matematiska modellen för praktiskt taget all teoretisk behandling av makroskopiska elektromagnetiska fenomen. James Clerk Maxwell[1] publicerade sina berömda ekvationer 1864, och de tester som utförts sedan dess har givit god experimentell överensstämmelse med denna modell. Först när mikroskopiska fenomen skall förklaras måste en mer noggrann teori införas, där även kvantmekaniska effekter tas med. Det har således genom åren byggts upp ett överväldigande bevismaterial för ekvationernas giltighet i skilda tillämpningar.

Maxwells fältekvationer utgör en av grundstenarna vid behandlingen av makro-

[1] James Clerk Maxwell (1831–1879), skotsk fysiker och matematiker.

skopiska elektromagnetiska vågutbredningsfenomen[2]. Ekvationerna lyder[3]

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1.2}$$

Ekvation (1.1) (eller motsvarande integralformulering) brukar benämnas *Faradays induktionslag* [4], medan ekvation (1.2) ofta bär namnet *Ampères (generaliserade) lag*[5]. De olika ingående vektorfälten i Maxwells fältekvationer är[6]:

$\boldsymbol{E}$	Elektrisk fältstyrka [V/m]
$\boldsymbol{H}$	Magnetisk fältstyrka [A/m]
$\boldsymbol{D}$	Elektrisk flödestäthet [As/m^2]
$\boldsymbol{B}$	Magnetisk flödestäthet [Vs/m^2]
$\boldsymbol{J}$	Strömtäthet [A/m^2]

Dessa fält är funktioner av rums- och tidskoordinaterna $(\boldsymbol{r}, t)$. Ofta skriver vi inte explicit ut dessa variabler för att beteckningarna skall bli enkla. Endast i de fall där missförstånd kan uppstå eller där vi särskilt vill påpeka funktionsberoendet skrivs variablerna ut.

Den elektriska fältstyrkan $\boldsymbol{E}$ och den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ definieras genom kraftverkan på en laddad partikel genom *Lorentz-kraften*

$$\boldsymbol{F} = q\left\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right\}$$

där q är partikelns laddning och $\boldsymbol{v}$ dess hastighet.

De fria laddningarna i materialet, t.ex. ledningselektroner, beskrivs av strömtätheten $\boldsymbol{J}$. De bundna laddningarnas bidrag, t.ex. från elektroner bundna till atomkärnan, ingår i den elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}$. Vi kommer senare i detta avsnitt att återkomma till skillnaderna mellan elektrisk flödestäthet $\boldsymbol{D}$ och elektrisk fältstyrka $\boldsymbol{E}$, liksom till skillnaderna mellan magnetisk fältstyrka $\boldsymbol{H}$ och magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$.

Ett annat fundamentalt antagande i elläran är lagen om laddningens oförstörbarhet. Även denna naturlag är experimentellt mycket noggrant uttestad. Ett sätt att uttrycka laddningskonserveringen matematiskt är genom *laddningens kontinuitetsekvation*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{1.3}$$

[2]En utförlig härledning av dessa makroskopiska ekvationer utgående från en mikroskopisk formulering finns att hämta i G. Russakoff, “A Derivation of the Macroscopic Maxwell Equations,” *Am. J. Phys.*, **38**(10), 1188–1195 (1970).

[3]Vi kommer genomgående att använda oss av SI-enheterna (MKSA) för de elektromagnetiska storheterna.

[4]Michael Faraday (1791–1867), engelsk kemist och fysiker.

[5]André Marie Ampère (1775–1836), fransk fysiker.

[6]Dessa benämningar överensstämmer med Svensk standard [16]. Andra förekommande benämningar på $\boldsymbol{H}$-fältet och $\boldsymbol{D}$-fältet är amperevarvstäthet respektive elektriskt förskjutningsfält [6]. Man ser även ibland att $\boldsymbol{B}$-fältet kallas magnetiskt fält. Vi kommer dock att använda de namn som föreslås av Svensk standard eller rätt och slätt skriva $\boldsymbol{E}$-fält, $\boldsymbol{D}$-fält, $\boldsymbol{B}$-fält och $\boldsymbol{H}$-fält.

Här är ρ den till strömtätheten $\boldsymbol{J}$ hörande laddningstätheten (laddning/volymsenhet). ρ beskriver således de fria laddningarnas laddningstäthet.

Vanligen associeras ytterligare två ekvationer till Maxwells fältekvationer.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.4}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{1.5}$$

Ekvation (1.4) implicerar avsaknaden av magnetiska punktladdningar och innebär att det magnetiska flödet är bevarat. Ekvation (1.5) bär namnet *Gauss lag*. Dessa båda ekvationer kan under lämpliga antaganden ses som en konsekvens av ekvationerna (1.1), (1.2) och (1.3). För att se detta tar vi divergensen av (1.1) och (1.2), vilket leder till

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} &= 0\\ \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

eftersom $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \equiv 0$. En växling av deriveringsordningen och användning av (1.3) ger

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{B})}{\partial t} &= 0\\ \frac{\partial (\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho)}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

Från dessa ekvationer följer att

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{B} &= f_1\\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho &= f_2\end{aligned}$$

där f_1 och f_2 är två funktioner som ej explicit beror på tiden t. Om fälten $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ och ρ antas vara identiskt noll före en fix ändlig tid, dvs

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{0}\\ \rho(\boldsymbol{r}, t) &= 0\end{aligned}$$

för $t < \tau$ för något ändligt τ, så följer av detta antagande ekvationerna (1.4) och (1.5). Rent statiska fält eller tidsharmoniska fält uppfyller naturligtvis inte detta antagande, eftersom det inte går att finna någon ändlig tid τ, före vilken alla fält är noll[7]. För tidsberoende fält gör vi det rimliga antagandet att fält och laddningar i en punkt inte existerat i evighet. Ekvationerna (1.1), (1.2) och (1.3) utgör då en tillräcklig uppsättning differentialekvationer för de elektromagnetiska fälten, strömtätheten och laddningstätheten.

[7]Vi återkommer till härledningen av ekvationerna (1.4) och (1.5) för tidsharmoniska fält i avsnitt 1.2.1 på sidan 13.

Maxwells fältekvationer (1.1) och (1.2) är tillsammans 6 stycken ekvationer—en för varje vektorkomponent. Om strömtätheten $\boldsymbol{J}$ är given, så innehåller Maxwells fältekvationer totalt 12 stycken obekanta (4 stycken vektorfält $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{H}$). Det fattassåledes 6 stycken ekvationer för att få lika många ekvationer som obekanta. De *konstitutiva relationerna* ger dessa återstående 6 ekvationer.

I vakuum är den elektriska fältstyrkan $\boldsymbol{E}$ och den elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}$ parallella. Detsamma gäller för den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ och den magnetiska fältstyrkan $\boldsymbol{H}$. Det gäller att

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D} &= \epsilon_0 \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} \end{aligned}$$

där ϵ_0 och μ_0 är vakuums dielektricitets- respektive permeabilitetskonstant. Numeriska värden på dessa konstanter är $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm och $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am $\approx 1.257 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am.

Inuti ett material är skillnaden mellan den elektriska fältstyrkan $\boldsymbol{E}$ och den elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}$ samt mellan den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ och den magnetiska fältstyrkan $\boldsymbol{H}$ ett mått på växelverkan mellan laddningsbärarna i materialet och fälten. Ofta införs två nya vektorfält, polarisationen $\boldsymbol{P}$ och magnetiseringen $\boldsymbol{M}$, för att beskriva dessa skillnader mellan fälten. De definieras genom

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} - \epsilon_0 \boldsymbol{E} \tag{1.6}$$

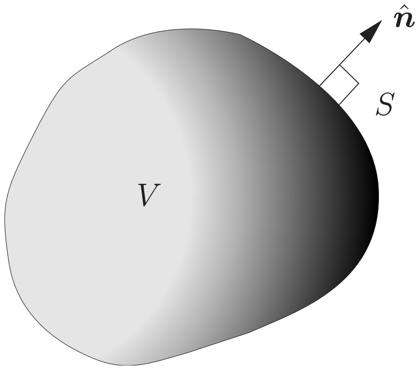
$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H} \tag{1.7}$$

Vektorfältet $\boldsymbol{P}$ kan grovt sägas utgöra ett mått på hur mycket de bundna laddningarna är förskjutna i förhållande till sina neutrala opåverkade positioner. Detta inkluderar både *permanent* och *inducerad polarisation*. Det största bidraget till detta fält härrör från tyngdpunktsförskjutningar hos de positiva och negativa laddningsbärarna i materialet, men även högre ordningens effekter bidrar. På liknande sätt utgör magnetiseringen $\boldsymbol{M}$ ett mått på de resulterande (bundna) strömmarna i materialet. Även detta fält kan vara av *permanent* eller *inducerad* natur.

Att ange ett materials polarisation och magnetisering är ekvivalent med att ange de konstitutiva relationerna för materialet och innebär att ytterligare 6 ekvationer som karakteriserar materialet specificeras.

1.1.2 Randvillkor vid gränsytor

I gränsskiktet mellan två material varierar de elektromagnetiska fälten diskontinuerligt på ett föreskrivet sätt, som är relaterat till materialens elektriska och magnetiska egenskaper på ömse sidor om gränsytan. Det sätt på vilket de varierar är en konsekvens av Maxwells fältekvationer, och här ges en enkel härledning av de randvillkor, som fälten måste uppfylla vid gränsytan. Endast ytor som är fixa i tiden (ej i rörelse) behandlas.



Figur 1.1: Geometri för integration.

Maxwells fältekvationer, såsom de presenterades i avsnitt 1.1.1, förutsätter att de elektromagnetiska fälten är differentierbara som funktion av rums- och tidsvariablerna. Vid en gränsyta mellan två material är, som redan påpekats, fälten i allmänhet diskontinuerliga. Därför behöver vi omformulera dessa ekvationer till en form med mer generell giltighet. Syftet med denna omskrivning är att få ekvationer som gäller även då fälten inte är differentierbara i alla punkter.

Låt V vara en godtycklig volym med randyta S och utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ i det område som vi behandlar, se figur 1.1.

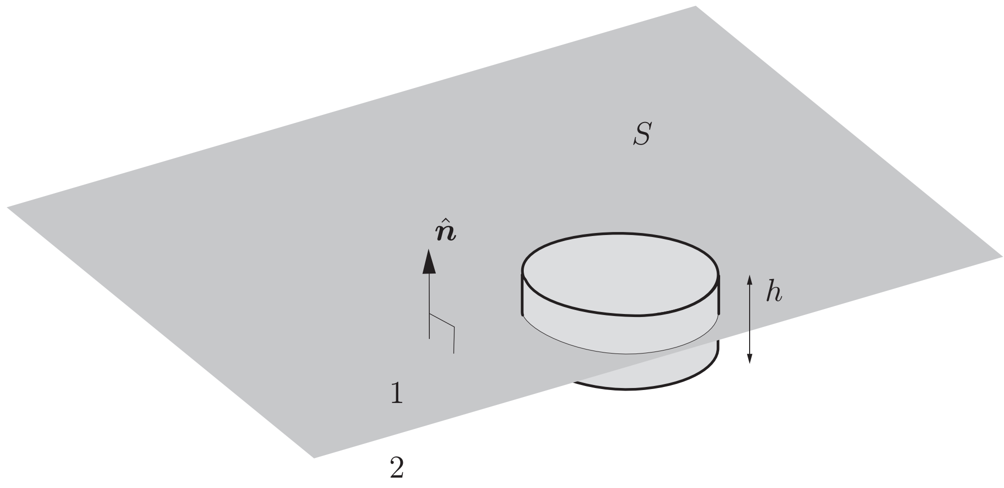
Integrera Maxwells fältekvationer, (1.1)–(1.2) och (1.4)–(1.5), över volymen V.

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{E}\, dv = -\iiint_V \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\, dv \\
&\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{H}\, dv = \iiint_V \boldsymbol{J}\, dv + \iiint_V \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\, dv \\
&\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}\, dv = 0 \\
&\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{D}\, dv = \iiint_V \rho\, dv
\end{aligned}
$$

där dv är volymsmåttet ($dv = dx\, dy\, dz$).

Följande två integrationssatser för vektorfält är nu lämpliga att använda:

$$
\begin{aligned}
&\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, dv = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS \\
&\iiint_V \nabla \times \boldsymbol{A}\, dv = \iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{A}\, dS
\end{aligned}
$$



Figur 1.2: Gränsyta mellan två olika material 1 och 2.

där $\boldsymbol{A}$ är ett godtyckligt (kontinuerligt deriverbart) vektorfält och dS ytan S:s ytelement. Det första sambandet brukar benämnas *divergenssatsen* eller *Gauss sats*[8] och det andra en *till divergenssatsen analog sats*.

Efter en skiftning av derivering m.a.p. tiden t och integration fås resultatet:

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}\, dS = -\frac{d}{dt} \iiint_V \boldsymbol{B}\, dv \tag{1.8}$$

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}\, dS = \iiint_V \boldsymbol{J}\, dv + \frac{d}{dt} \iiint_V \boldsymbol{D}\, dv \tag{1.9}$$

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0 \tag{1.10}$$

$$\iint_S \boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \iiint_V \rho\, dv \tag{1.11}$$

Vi har här antagit att volymen V är fix i tiden och att fälten är tillräckligt reguljära.

För ett område V där fälten $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{H}$ är kontinuerligt differentierbara är dessa integralformler helt ekvivalenta med differentialformuleringen i avsnitt 1.1.1. Denna ekvivalens har vi här visat åt ena hållet. Åt andra hållet gör man räkningarna baklänges och utnyttjar att volymen V kan väljas godtycklig.

Integralformuleringen, (1.8)–(1.11), har emellertid den fördelen att de ingående fälten inte behöver vara differentierbara i rumsvariablerna för att ha en mening. I detta avseende är integralformuleringen mer allmän än differentialformuleringen i avsnitt 1.1.1. Fälten $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{H}$, som satisfierar ekvationerna (1.8)–(1.11) sägs vara svaga lösningar till Maxwells ekvationer, i de fall de inte är kontinuerligt differentierbara och differentialekvationerna i avsnitt 1.1.1 saknar mening.

[8] Skilj på Gauss lag, (1.5), och Gauss sats.

Dessa integralformler tillämpas nu på en speciell volym V, som skär gränsytan mellan två olika material, se figur 1.2. Normalriktningen $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad från material 2 in i material 1. Vi antar att de elektromagnetiska fälten $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{H}$ och deras tidsderivator har ändliga värden intill gränsytan från båda håll. Dessa gränsvärden betecknas $\boldsymbol{E}_1$ respektive $\boldsymbol{E}_2$ på ömse sidor om gränsytan. Gränsvärdena på de övriga tre fälten betecknas på liknande sätt med index 1 eller 2. Strömtätheten $\boldsymbol{J}$ och laddningstätheten ρ kan däremot tillåtas anta oändliga värden, som fallet är vid metalliska ytor[9]. Det visar sig lämpligt att införa en *ytströmtäthet* $\boldsymbol{J}_S$ och en *ytladdningstäthet* ρ_S enligt följande gränsförfarande

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}_S &= h\boldsymbol{J} \\ \rho_S &= h\rho \end{aligned}$$

där h är en tjocklek inom vilken laddningarna finns koncentrerade. Denna tjocklek låter vi gå mot noll samtidigt som $\boldsymbol{J}$ och ρ blir oändligt stora på ett sådant sätt att $\boldsymbol{J}_S$ och ρ_S har väldefinierade ändliga värden i denna gränsprocess. Vid detta gränsförfarande antags ytströmtätheten $\boldsymbol{J}_S$ endast ha komponenter parallellt med gränsytan. Höjden på volymen V låter vi vara denna tjocklek h och arean på bas- respektive toppytan är a, som är liten jämfört med fältens variation längs skiljeytan och ytans krökning.

Termerna $\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{B}\,dv$ och $\frac{d}{dt}\iiint_V \boldsymbol{D}\,dv$ går båda mot noll då $h \to 0$, eftersom fälten $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{D}$ och deras tidsderivator antas vara ändliga vid gränsytan. Vidare gäller att alla bidrag från sidoytorna (area $\sim h$) i ytintegralerna i (1.8)–(1.11) går mot noll då $h \to 0$. Bidragen från toppytan (normal $\hat{\boldsymbol{n}}$) och basytan (normal $-\hat{\boldsymbol{n}}$) är proportionella mot arean a, om arean väljs tillräckligt liten och medelvärdessatsen för integraler används. Följande bidrag från topp- respektive basytan i ytintegralerna återstår efter gränsövergång $h \to 0$.

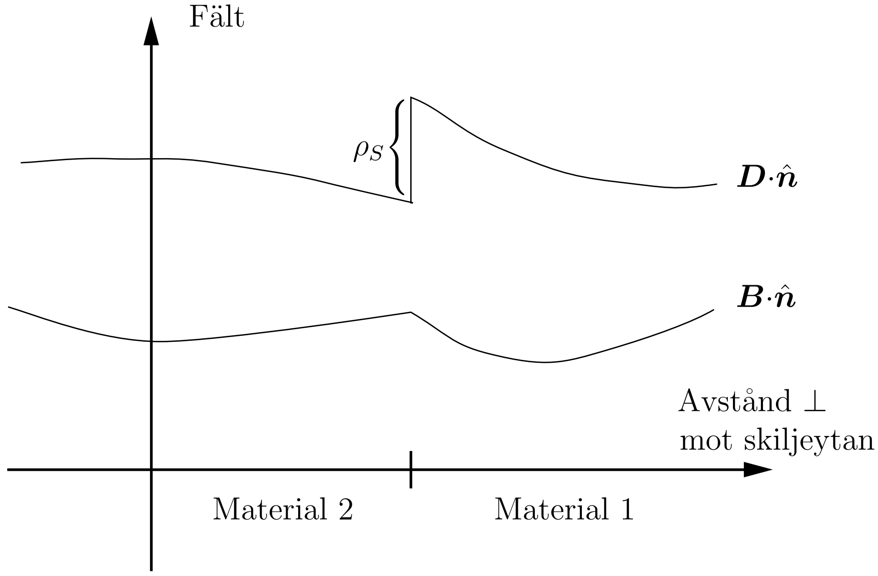
$$\begin{aligned} &a\,[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)] = \boldsymbol{0} \\ &a\,[\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)] = ah\boldsymbol{J} = a\boldsymbol{J}_S \\ &a\,[\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)] = 0 \\ &a\,[\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2)] = ah\rho = a\rho_S \end{aligned}$$

Förenkla genom att dividera med arean a. Resultatet blir

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S \end{cases} \tag{1.12}$$

Dessa randvillkor föreskriver hur de elektromagnetiska fälten är relaterade till varandra på ömse sidor om gränsytan (normalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad från material 2 in i material 1). Vi kan formulera dessa randvillkor i text:

[9] Detta är naturligtvis en idealisering av en verklighet där tätheten antar mycket stora värden inom ett makroskopiskt tunt gränsskikt.



Figur 1.3: Variation av $\boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ och $\boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ vid skiljeytan.

- Elektriska fältstyrkans tangentialkomponent är kontinuerlig över gränsytan.
- Magnetiska fältstyrkans tangentialkomponent är diskontinuerlig över gränsytan. Diskontinuitetens storlek är $\boldsymbol{J}_S$. I det fall ytströmtätheten är noll, vilket t.ex. inträffar om materialet har ändlig ledningsförmåga[10], är tangentialkomponenten kontinuerlig över gränsytan.
- Magnetiska flödestäthetens normalkomponent är kontinuerlig över gränsytan.
- Elektriska flödestäthetens normalkomponent är diskontinuerlig över gränsytan. Diskontinuitetens storlek är ρ_S. I det fall ytladdningstätheten är noll är normalkomponenten kontinuerlig över gränsytan.

I figur 1.3 exemplifieras hur normalkomponenterna hos de magnetiska och elektriska flödestätheterna kan variera vid skiljeytan mellan två material.

Ett viktigt specialfall, som ofta förekommer, är det fall då material 2 är en perfekt ledare, som är en modell av ett material som har lättrörliga laddningsbärare, t.ex. flera metaller. I material 2 är fälten noll och vi får från (1.12)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{J}_S \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_1 = \rho_S \end{cases} \tag{1.13}$$

där $\boldsymbol{J}_S$ och ρ_S är metallytans ytströmtäthet respektive ytladdningstäthet.

[10]Detta följer av antagandet att det elektriska fältet $\boldsymbol{E}$ är ändligt nära gränsytan, vilket medför att $\boldsymbol{J}_S = h\boldsymbol{J} = h\sigma\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{0}$, då $h \to 0$.

1.1.3 Energikonservering och Poyntings sats

Energikonservering visas utifrån Maxwells ekvationer (1.1) och (1.2).

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

Multiplicera den första ekvationen skalärt med $\boldsymbol{H}$ och den andra med $\boldsymbol{E}$ samt subtrahera. Resultatet blir

$$\boldsymbol{H} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Därefter använder vi räkneregeln $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$ för att skriva om detta uttryck.

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Vi inför *Poyntings vektor*[11] $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ vilket resulterar i *Poyntings sats*.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{1.14}$$

Poyntings vektor $\boldsymbol{S}$ anger det elektromagnetiska fältets effektflödestäthet eller effekttransport per ytenhet i vektorn $\boldsymbol{S}$:s riktning. Detta ses klarare om vi integrerar (1.14) över en volym V, randyta S och utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$, se figur 1.1, och använder divergenssatsen.

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS &= \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{S}\, dv \\ &= -\iiint_V \left[\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right] dv - \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}\, dv\end{aligned} \tag{1.15}$$

Termerna tolkas på följande sätt:

- Vänstra ledet:
$$\iint_S \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS$$
ger den totalt utstrålade effekten, dvs. energi per tidsenhet, genom ytan S, buren av det elektromagnetiska fältet.

[11] John Henry Poynting (1852–1914), engelsk fysiker.

- Högra ledet: Effektflödet ut genom ytan S kompenseras av två bidrag. Den första volymsintegralen i högra ledet

$$\iiint_V \left[\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}\right]dv$$

anger den till det elektromagnetiska fältet i V bundna effekten[12]. Den andra volymsintegralen

$$\iiint_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,dv$$

anger arbetet per tidsenhet, dvs. effekten, som det elektriska fältet uträttar på de fria laddningsbärarna.

Ekvation (1.15) uttrycker därför energibalans[13].

Genom S utstrålad effekt + effektförbrukning i V
= − effekt bunden till det elektromagnetiska fältet

I härledningen ovan antog vi att volymen V inte skar någon yta där fälten varierade diskontinuerligt, t.ex. en gränsyta mellan två material. Om skiljeytan S är en gränsyta mellan två olika material, se figur 1.2, gäller att Poyntings vektor i material 1 nära gränsytan är

$$\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{E}_1\times\boldsymbol{H}_1$$

medan Poyntings vektor nära gränsytan i material 2 är

$$\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{E}_2\times\boldsymbol{H}_2$$

Randvillkoren vid gränsytan ges av (1.12).

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_1&=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{E}_2\\ \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_1&=\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}_2+\boldsymbol{J}_S\end{aligned}$$

Vi skall nu visa att effekten som det elektromagnetiska fältet transporterar genom skiljeytan är kontinuerlig. Med andra ord att

$$\iint_S \boldsymbol{S}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS=\iint_S \boldsymbol{S}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS-\iint_S \boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{J}_S\,dS \tag{1.16}$$

där ytan S är en godtycklig del av gränsytan. Notera att enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad från material 2 in i materialet 1. Den sista ytintegralen anger effektutvecklingen, som det elektriska fältet uträttar på de fria laddningsbärarna i skiljeytan. Finns det inga ytströmmar i gränsytan är normalkomponenten av Poyntings vektor kontinuerlig över gränsytan och vi får effektkonservering över gränsytan. Det är egalt vilket

[12] Effektförbrukningen för att polarisera och magnetisera materialet innefattas i denna term.
[13] Egentligen effektbalans.

elektriskt fält som ingår i den sista ytintegralen i (1.16), eftersom ytströmmen $\boldsymbol{J}_S$ är parallell med ytan S och det elektriska fältets tangentialkomponent är kontinuerlig vid gränsytan, dvs.

$$\iint_S \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{J}_S \, dS = \iint_S \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{J}_S \, dS$$

Vi visar (1.16) lättast genom cyklisk permutation av de ingående vektorerna och genom att använda randvillkoren.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S}_1 &= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{H}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1) = \boldsymbol{H}_1 \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_2) \\ &= -\boldsymbol{E}_2 \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1) = -\boldsymbol{E}_2 \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{J}_S) \\ &= \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_2) - \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{J}_S = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{J}_S\end{aligned}$$

Integrerar vi detta uttryck över skiljeytan S får vi ekvation (1.16).

1.2 Tidsharmoniska fält

Fouriertransformen (i tiden) av ett vektorfält, t.ex. det elektriska fältet, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, definieras som

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) e^{i\omega t} \, dt$$

med invers transform

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega$$

På liknande sätt definieras Fouriertransformen av alla de övriga tidsberoende vektor- och skalärfälten. För att undvika klumpiga beteckningar används samma symboler för det fysikaliska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, som för det Fouriertransformerade fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)$. I de allra flesta fall framgår det av sammanhanget om det fysikaliska eller det Fouriertransformerade fältet avses. I tveksamma fall skrivs tidsargumentet t eller (vinkel-)frekvensen ω ut, och på så sätt anges vilket fält som åsyftas. Notera att det fysikaliska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ alltid är en reell storhet, medan det Fouriertransformerade fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)$ i allmänhet är komplext.

Eftersom de fysikaliska fälten alltid är reella storheter medför detta att Fouriertransformen för negativa ω är relaterad till Fouriertransformen för positiva ω. Att $\boldsymbol{E}$-fältet är reellvärt innebär att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \right\}^*$$

där * innebär komplexkonjugering. För reella ω gäller således

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t} \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, \omega) e^{i\omega t} \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, -\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega$$

där vi i den sista integralen gjort en variabeltransformation $\omega \to -\omega$. Därmed gäller för reella ω att

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},-\omega)$$

När det tidsberoende fältet skall konstrueras från Fouriertransformen räcker det således att endast integrera över de icke-negativa frekvenserna. Genom variabelbytet, $\omega \to -\omega$, och utnyttjande av villkoret ovan får vi nämligen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},-\omega)e^{i\omega t}\right]\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},\omega)e^{i\omega t}\right]\,d\omega = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega
\end{aligned}$$

där Re anger realdelen av det efterkommande komplexa uttrycket, som i detta fall är hela integralen. Det räcker således att integrera över de positiva frekvenserna och att sedan ta realdelen av integralen. Motsvarande villkor gäller givetvis för alla övriga Fouriertransformerade fält som vi använder. Fält med ett rent harmoniskt tidsberoende är i många tillämpningar speciellt intressanta. Tidsharmoniska fält har komponenter vars tidsberoende kan skrivas på formen

$$\cos(\omega_0 t - \alpha)$$

Vi använder oss i detta fall av samma transform som i $j\omega$-metoden, dvs. ett skalärt fält $V(\boldsymbol{r},t) = V_0(\boldsymbol{r})\cos(\omega t + \alpha(\boldsymbol{r}))$ transformeras till frekvensplanet enligt regeln

$$V(\boldsymbol{r},t) = V_0(\boldsymbol{r})\cos(\omega t + \alpha(\boldsymbol{r})) \quad\longrightarrow\quad V(\boldsymbol{r}) = V_0(\boldsymbol{r})e^{-i\alpha(\boldsymbol{r})}$$

Den inversa transformen ges av

$$V(\boldsymbol{r}) \quad\longrightarrow\quad V(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\left\{V(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\right\}$$

Ett allmänt tidsharmoniskt komplext fält ges av

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \hat{\boldsymbol{x}}E_x(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{y}}E_y(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{z}}E_z(\boldsymbol{r}) \\
&= \hat{\boldsymbol{x}}|E_x(\boldsymbol{r})|e^{i\alpha(\boldsymbol{r})} + \hat{\boldsymbol{y}}|E_y(\boldsymbol{r})|e^{i\beta(\boldsymbol{r})} + \hat{\boldsymbol{z}}|E_z(\boldsymbol{r})|e^{i\gamma(\boldsymbol{r})}
\end{aligned}$$

där $\alpha(\boldsymbol{r})$, $\beta(\boldsymbol{r})$ och $\gamma(\boldsymbol{r})$ är komponenternas fas. Detta fält transformeras till tidsplanet genom

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}\right\} \\
&= \big\{\hat{\boldsymbol{x}}|E_x(\boldsymbol{r})|\cos(\omega t - \alpha(\boldsymbol{r})) + \hat{\boldsymbol{y}}|E_y(\boldsymbol{r})|\cos(\omega t - \beta(\boldsymbol{r})) \\
&\quad + \hat{\boldsymbol{z}}|E_z(\boldsymbol{r})|\cos(\omega t - \gamma(\boldsymbol{r}))\big\}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Exempel 1.1
Man kan även konstruera tidsharmoniska fält med Fouriertransformen. Tag nämligen

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) &= \pi\Big\{\delta(\omega-\omega_0)\left[\hat{\boldsymbol{x}}E_x(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{y}}E_y(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{z}}E_z(\boldsymbol{r})\right] \\
&\quad + \delta(\omega+\omega_0)\left[\hat{\boldsymbol{x}}E_x^*(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{y}}E_y^*(\boldsymbol{r})+\hat{\boldsymbol{z}}E_z^*(\boldsymbol{r})\right]\Big\} \\
&= \pi\Big\{\delta(\omega-\omega_0)\left[\hat{\boldsymbol{x}}|E_x(\boldsymbol{r})|e^{i\alpha(\boldsymbol{r})}+\hat{\boldsymbol{y}}|E_y(\boldsymbol{r})|e^{i\beta(\boldsymbol{r})}+\hat{\boldsymbol{z}}|E_z(\boldsymbol{r})|e^{i\gamma(\boldsymbol{r})}\right] \\
&\quad + \delta(\omega+\omega_0)\left[\hat{\boldsymbol{x}}|E_x(\boldsymbol{r})|e^{-i\alpha(\boldsymbol{r})}+\hat{\boldsymbol{y}}|E_y(\boldsymbol{r})|e^{-i\beta(\boldsymbol{r})}+\hat{\boldsymbol{z}}|E_z(\boldsymbol{r})|e^{-i\gamma(\boldsymbol{r})}\right]\Big\}
\end{aligned}$$

där $\omega_0 \geq 0$ och där $\delta(\omega)$ är Diracs deltafunktion. Notera också att denna transform uppfyller $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},-\omega)$, som är kravet på ett reellt fält. Efter invers Fouriertransform får vi det fysikaliska fältet

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = \big\{\hat{\boldsymbol{x}}|E_x(\boldsymbol{r})|\cos(\omega_0 t-\alpha(\boldsymbol{r}))+ \\
&\hat{\boldsymbol{y}}|E_y(\boldsymbol{r})|\cos(\omega_0 t-\beta(\boldsymbol{r}))+\hat{\boldsymbol{z}}|E_z(\boldsymbol{r})|\cos(\omega_0 t-\gamma(\boldsymbol{r}))\big\}
\end{aligned}$$

Vi ser att detta är samma fält som i (1.17). ■

1.2.1 Maxwells fältekvationer

Ett första steg i vår analys med tidsharmoniska fält blir att transformera Maxwells ekvationer (1.1) och (1.2) till frekvensplanet. Oavsett om vi transformerar med Fouriertransformering eller med $j\omega$-metoden gäller $\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$ och således

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=i\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) \tag{1.18}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)-i\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) \tag{1.19}$$

Det implicita harmoniska tidsberoendet $\exp\{-i\omega t\}$ är underförstått i dessa ekvationer, dvs. de fysikaliska fälten är

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)e^{-i\omega t}\right\}$$

Samma konvention tillämpas för alla tidsharmoniska fält. Notera att de elektromagnetiska fälten $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)$, $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega)$ och $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)$, jämte strömtätheten $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)$ i allmänhet är komplexa storheter.

Kontinuitetsekvationen (1.3) transformeras på liknande sätt

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)-i\omega\rho(\boldsymbol{r},\omega)=0 \tag{1.20}$$

De två återstående ekvationerna från avsnitt 1.1.1, (1.4) och (1.5), övergår i

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)=0 \tag{1.21}$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega)=\rho(\boldsymbol{r},\omega) \tag{1.22}$$

Båda dessa ekvationer är en konsekvens av (1.18) och (1.19) och kontinuitetsekvationen (1.20) (jämför avsnitt 1.1.1, sidan 3). Tag nämligen divergensen på Maxwells fältekvationer (1.18) och (1.19) vilket ger ($\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \equiv 0$)

$$
\begin{aligned}
&i\omega\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) = 0\\
&i\omega\nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) = \nabla \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega) = i\omega\rho(\boldsymbol{r},\omega)
\end{aligned}
$$

Division med $i\omega$ (förutsatt att $\omega \neq 0$) ger sedan (1.21) och (1.22).

I elektrolitteraturen är tidskonventionen $\exp\{j\omega t\}$ vanligt förekommande. Man transformerar lätt från den ena konventionen till den andra genom att byta $i \leftrightarrow -j$ i alla formler.

1.2.2 Poyntings sats

I detta avsnitt undersöker vi vilka speciella förhållanden som gäller för Poyntings sats i det fall vi har tidsharmoniska förlopp.

I avsnitt 1.1.3 härledde vi Poyntings sats, se (1.14) på sidan 9.

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{S}(t) + \boldsymbol{H}(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t} + \boldsymbol{E}(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t} + \boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{J}(t) = 0
$$

Vi har här valt att undertrycka fältens rumsberoende och endast skriva ut tidsberoendet t, eftersom vi betraktar en fix rumspunkt $\boldsymbol{r}$.

Ekvationen beskriver effektkonservering och innehåller produkter av fält. Vi är här intresserade av att studera tidsharmoniska fält, och den storhet som då är av störst intresse är tidsmedelvärdet över en period[14]. Tidsmedelvärdet betecknas med $<\cdot>$ och för Poyntings sats får vi

$$
<\nabla \cdot \boldsymbol{S}(t)> + <\boldsymbol{H}(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}> + <\boldsymbol{E}(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t}> + <\boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{J}(t)>= 0
$$

De olika produkttermerna blir efter medelvärdesbildning

$$
\left\{
\begin{aligned}
&<\boldsymbol{S}(t)>= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\boldsymbol{E}(\omega) \times \boldsymbol{H}^*(\omega)\}\\
&<\boldsymbol{H}(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}>= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{i\omega \boldsymbol{H}(\omega) \cdot \boldsymbol{B}^*(\omega)\}\\
&<\boldsymbol{E}(t) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t}>= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{i\omega \boldsymbol{E}(\omega) \cdot \boldsymbol{D}^*(\omega)\}\\
&<\boldsymbol{E}(t) \cdot \boldsymbol{J}(t)>= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\boldsymbol{E}(\omega) \cdot \boldsymbol{J}^*(\omega)\}
\end{aligned}
\right.
\tag{1.23}
$$

[14] Tidsmedelvärdet av produkten av två tidsharmoniska fält $f_1(t)$ och $f_2(t)$ fås lätt genom att bilda medelvärdet över en period $T = 2\pi/\omega$.

$$
\begin{aligned}
<f_1(t)f_2(t)> &= \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)f_2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{Re}\left\{f_1(\omega)e^{-i\omega t}\right\}\operatorname{Re}\left\{f_2(\omega)e^{-i\omega t}\right\}\,dt\\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \left\{f_1(\omega)f_2(\omega)e^{-2i\omega t} + f_1^*(\omega)f_2^*(\omega)e^{2i\omega t} + f_1(\omega)f_2^*(\omega) + f_1^*(\omega)f_2(\omega)\right\}\,dt\\
&= \frac{1}{4}\{f_1(\omega)f_2^*(\omega) + f_1^*(\omega)f_2(\omega)\} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{f_1(\omega)f_2^*(\omega)\}
\end{aligned}
$$

Poyntings sats (effektbalans) för tidsharmoniska fält, medelvärdesbildad över en period, får följande utseende ($<\nabla\cdot \boldsymbol{S}(t)>=\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)>$):

$$\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)> +\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{i\omega\left[\boldsymbol{H}(\omega)\cdot\boldsymbol{B}^*(\omega)+\boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{D}^*(\omega)\right]\right\}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{J}^*(\omega)\right\}=0$$

Av speciellt intresse är fallet utan strömmar, $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$. Poyntings sats förenklas då till

$$\begin{aligned}\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)> &= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{i\omega\left[\boldsymbol{H}(\omega)\cdot\boldsymbol{B}^*(\omega)+\boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{D}^*(\omega)\right]\right\}\\ &= -\frac{i\omega}{4}\Big\{\boldsymbol{B}^*(\omega)\cdot\boldsymbol{H}(\omega)-\boldsymbol{B}(\omega)\cdot\boldsymbol{H}^*(\omega)\\ &\qquad +\boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{D}^*(\omega)-\boldsymbol{E}(\omega)^*\cdot\boldsymbol{D}(\omega)\Big\}\end{aligned}\tag{1.24}$$

där vi använt $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+z^*)$.

1.2.3 Polarisationsellipsen

Ett tidsharmoniskt fälts polarisation kan beskrivas geometriskt. Vi kommer i detta avsnitt att visa att alla tidsharmoniska fält svänger i ett plan och att fältvektorn följer kurvan av en ellips. Framställningen är koordinatoberoende, vilket är en styrka, eftersom vi då kan analysera ett fälts polarisation utan att referera till något specifikt koordinatsystem.

Om vi betraktar det tidsharmoniska fältet $\boldsymbol{E}(t)$ i en fix punkt i rummet gäller att fältets funktionsberoende av tiden är

$$\boldsymbol{E}(t)=\operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}\right\}\tag{1.25}$$

De rumsberoende koordinaterna $\boldsymbol{r}$ skrivs inte ut i detta avsnitt. I ekvation (1.25) är $\boldsymbol{E}_0$ en konstant komplex vektor (kan bero på ω) vars kartesiska komponenter är

$$\boldsymbol{E}_0=\hat{\boldsymbol{x}}E_{0x}+\hat{\boldsymbol{y}}E_{0y}+\hat{\boldsymbol{z}}E_{0z}=\hat{\boldsymbol{x}}|E_{0x}|e^{i\alpha}+\hat{\boldsymbol{y}}|E_{0y}|e^{i\beta}+\hat{\boldsymbol{z}}|E_{0z}|e^{i\gamma}$$

och α, β och γ är komponenternas komplexa argument (fas).

Det första vi observerar är att vektorn $\boldsymbol{E}(t)$ i (1.25) hela tiden ligger i ett fixt plan i rummet. Vi inser detta om vi uttrycker den komplexa vektorn $\boldsymbol{E}_0$ i två reella vektorer, $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$.

$$\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_{0r}+i\boldsymbol{E}_{0i}$$

De reella vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$ är fixa i tiden, och deras explicita form är

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{0r}&=\hat{\boldsymbol{x}}|E_{0x}|\cos\alpha+\hat{\boldsymbol{y}}|E_{0y}|\cos\beta+\hat{\boldsymbol{z}}|E_{0z}|\cos\gamma\\ \boldsymbol{E}_{0i}&=\hat{\boldsymbol{x}}|E_{0x}|\sin\alpha+\hat{\boldsymbol{y}}|E_{0y}|\sin\beta+\hat{\boldsymbol{z}}|E_{0z}|\sin\gamma\end{aligned}$$

Vektorn $\boldsymbol{E}(t)$ i (1.25) kan nu skrivas

$$\boldsymbol{E}(t)=\operatorname{Re}\left\{(\boldsymbol{E}_{0r}+i\boldsymbol{E}_{0i})\,e^{-i\omega t}\right\}=\boldsymbol{E}_{0r}\cos\omega t+\boldsymbol{E}_{0i}\sin\omega t\tag{1.26}$$

vilket medför att vektorn $\boldsymbol{E}(t)$ ligger i det plan som spänns upp av de reella vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$ för alla tider t. Normalen till detta plan är

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \pm \frac{\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{E}_{0i}}{|\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{E}_{0i}|}$$

förutsatt att $\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{E}_{0i} \neq \boldsymbol{0}$. I det fall $\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{E}_{0i} = \boldsymbol{0}$, dvs. de två reella vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$ är parallella, så svänger $\boldsymbol{E}$-fältet längs en linje och något plan kan inte definieras.

De reella vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$, som spänner upp det plan i vilket vektorn $\boldsymbol{E}(t)$ svänger, är i allmänhet inte ortogonala mot varann. Det är praktiskt att arbeta med ortogonala vektorer. Vi försöker därför ur vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$ konstruera två nya reella vektorer, $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, som är vinkelräta mot varann och som spänner upp samma plan som vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$. Inför en linjär transformation

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{E}_{0r} \cos\chi + \boldsymbol{E}_{0i} \sin\chi \\ \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{E}_{0r} \sin\chi + \boldsymbol{E}_{0i} \cos\chi \end{cases}$$

där vinkeln $\chi \in [-\pi/4, \pi/4] + n\pi/2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, definieras av

$$\tan 2\chi = \frac{2\boldsymbol{E}_{0r} \cdot \boldsymbol{E}_{0i}}{|\boldsymbol{E}_{0r}|^2 - |\boldsymbol{E}_{0i}|^2}$$

Genom denna konstruktion är $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ ortogonala, ty

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (\boldsymbol{E}_{0r} \cos\chi + \boldsymbol{E}_{0i} \sin\chi) \cdot (-\boldsymbol{E}_{0r} \sin\chi + \boldsymbol{E}_{0i} \cos\chi) \\ &= -\left(|\boldsymbol{E}_{0r}|^2 - |\boldsymbol{E}_{0i}|^2\right) \sin\chi \cos\chi + \boldsymbol{E}_{0r} \cdot \boldsymbol{E}_{0i} \left(\cos^2\chi - \sin^2\chi\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{E}_{0r}|^2 - |\boldsymbol{E}_{0i}|^2\right) \sin 2\chi + \boldsymbol{E}_{0r} \cdot \boldsymbol{E}_{0i} \cos 2\chi = 0 \end{aligned}$$

enligt definitionen på vinkeln χ.

Vi kan lösa ut $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$ ur transformationen ovan. Resultatet blir

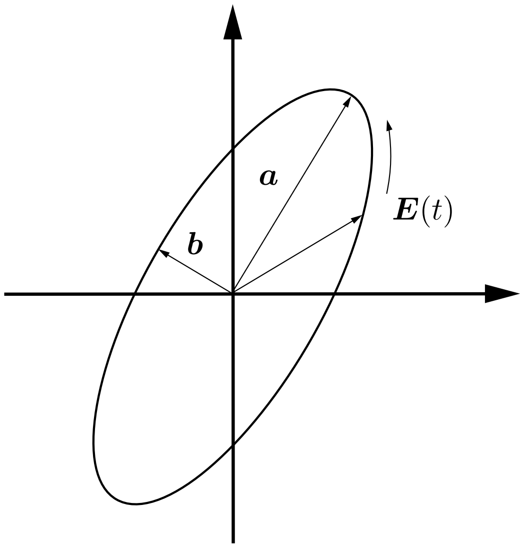
$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{0r} = \boldsymbol{a} \cos\chi - \boldsymbol{b} \sin\chi \\ \boldsymbol{E}_{0i} = \boldsymbol{a} \sin\chi + \boldsymbol{b} \cos\chi \end{cases}$$

dvs.

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{0r} + i\boldsymbol{E}_{0i} = (\boldsymbol{a} \cos\chi - \boldsymbol{b} \sin\chi) + i\,(\boldsymbol{a} \sin\chi + \boldsymbol{b} \cos\chi) = e^{i\chi}(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) \tag{1.27}$$

Insatt i (1.26) får vi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(t) &= \boldsymbol{E}_{0r} \cos\omega t + \boldsymbol{E}_{0i} \sin\omega t \\ &= (\boldsymbol{a} \cos\chi - \boldsymbol{b} \sin\chi) \cos\omega t + (\boldsymbol{a} \sin\chi + \boldsymbol{b} \cos\chi) \sin\omega t \\ &= \boldsymbol{a} \cos(\omega t - \chi) + \boldsymbol{b} \sin(\omega t - \chi) \end{aligned} \tag{1.28}$$



Figur 1.4: Polarisationsellipsen och dess halvaxlar $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$.

Vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ kan således användas som ett rätvinkligt koordinatsystem i det plan i vilket $\boldsymbol{E}$-fältet svänger. Vidare ger en jämförelse med ellipsens ekvation i xy-planet (halvaxlar a och b längs x- respektive y-axeln)

$$\begin{cases} x = a\cos\phi \\ y = b\sin\phi \end{cases}$$

och (1.28) att $\boldsymbol{E}$-fältet följer en ellips i det plan som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$. Dessa vektorer beskriver ellipsens halvaxlar både till riktning och längd, se figur 1.4. Från (1.28) ser vi dessutom att $\boldsymbol{E}$-fältet är riktat längs halvaxeln $\boldsymbol{a}$ då $\omega t = \chi + 2n\pi$, och att $\boldsymbol{E}$-fältet är riktat längs den andra halvaxeln $\boldsymbol{b}$ då $\omega t = \chi + \pi/2 + 2n\pi$. Vinkeln χ anger var på ellipsen $\boldsymbol{E}$-fältet är riktat vid tiden $t = 0$, dvs.

$$\boldsymbol{E}(t=0) = \boldsymbol{a}\cos\chi - \boldsymbol{b}\sin\chi$$

och $\boldsymbol{E}$-vektorn rör sig längs ellipsen i riktning från $\boldsymbol{a}$ till $\boldsymbol{b}$ (kortaste vägen). Vektorerna $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ beskriver $\boldsymbol{E}$-vektorns polarisationstillstånd fullständigt, så när som på fasfaktorn χ.

Vi kommer nu att klassificera det tidsharmoniska fältets polarisationstillstånd. Vektorn $\boldsymbol{E}(t)$, som svänger i ett plan längs en elliptisk bana, kan antingen rotera med- eller moturs. Utan en prefererad riktning i rymden blir omloppsriktningen ett relativt begrepp, beroende på vilken sida om svängningsplanet vi betraktar förloppet. Vi kommer att ur det elektromagnetiska fältets effekttransportriktning definiera en prefererad riktning. Hittills har fältet $\boldsymbol{E}(t)$ varit symbol för vilket godtyckligt tidsharmoniskt vektorfält som helst. Nu betraktar vi speciellt de elektriska och magnetiska fälten, $\boldsymbol{E}(t)$ och $\boldsymbol{H}(t)$, som båda roterar i elliptiska banor i två, i

$i\hat{\boldsymbol{e}} \cdot (\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{E}_0^*)$	**Polarisation**
$= 0$	Linjär
> 0	Höger elliptisk
< 0	Vänster elliptisk

Tabell 1.1: Tabell över ett tidsharmoniskt fälts olika polarisationstillstånd.

allmänhet skilda, plan. Motsvarande komplexa fältvektorer betecknar vi

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{0r} + i\boldsymbol{E}_{0i} \\ \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}_{0r} + i\boldsymbol{H}_{0i} \end{cases}$$

Medelvärdet av Poyntings vektor, (1.23) på sidan 14, ger oss följande uttryck:

$$<\boldsymbol{S}(t)>= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*\} = \frac{\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{H}_{0r} + \boldsymbol{E}_{0i} \times \boldsymbol{H}_{0i}}{2}$$

Definiera nu en enhetsvektor $\hat{\boldsymbol{e}}$, med vilken vi kan klassificera rotationsriktningen hos polarisationsellipsen[15].

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \frac{\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{H}_{0r} + \boldsymbol{E}_{0i} \times \boldsymbol{H}_{0i}}{|\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{H}_{0r} + \boldsymbol{E}_{0i} \times \boldsymbol{H}_{0i}|}$$

Fältets polarisationstillstånd klassificeras nu enligt värdet på $\hat{\boldsymbol{e}}$-komponenten på $i\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{E}_0^* = 2\boldsymbol{E}_{0r} \times \boldsymbol{E}_{0i} = 2\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, se tabell 1.1. Fältvektorn roterar antingen moturs (högerpolarisation) eller medurs (vänsterpolarisation) i $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b}$-planet om vi antar att $\hat{\boldsymbol{e}}$ pekar mot observatören[16]. Det degenererade fallet då vektorerna $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{E}_{0i}$ är parallella innebär att fältvektorn rör sig längs en linje genom origo, därav namnet *linjär polarisation* eller plan polarisation. Den linjära polarisationen kan vi se som ett specialfall av elliptisk polarisation, där en av ellipsens halvaxlar är noll och karakteriseras av att $\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{E}_0^* = \boldsymbol{0}$. För höger (vänster) elliptisk polarisation roterar fältet moturs (medurs) runt i $\boldsymbol{a}$-$\boldsymbol{b}$-planet om $\hat{\boldsymbol{e}}$-axeln pekar mot betraktaren, se figur 1.5.

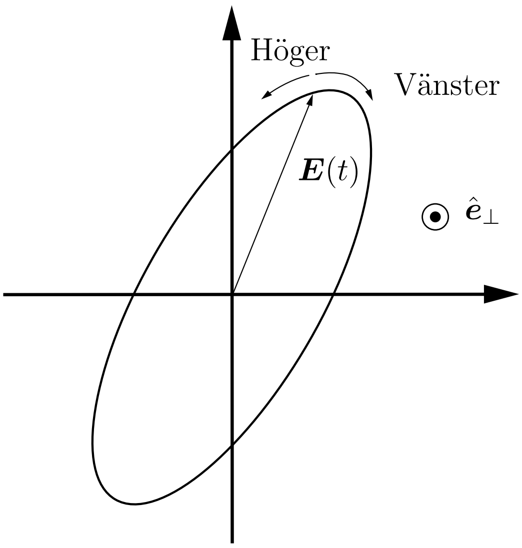
Ett specialfall av elliptisk polarisation är särskilt viktigt. Detta inträffar då ellipsen är en cirkel och vi har i så fall *cirkulär* polarisation. Om polarisationen är cirkulär kan kvantitativt avgöras genom att testa om $\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$. Med hjälp av (1.27) och ortogonaliteten mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ får vi

$$\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0 = e^{2i\chi}(\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b}) = e^{2i\chi}\left(|\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{b}|^2\right)$$

Polarisationsellipsen är således en cirkel, $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, om och endast om $\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$. Rotationsriktningen avgörs genom tecknet på $i\hat{\boldsymbol{e}} \cdot (\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{E}_0^*)$. Höger (vänster) cirkulär polarisation förkortas ofta RCP (LCP) efter engelskans *Right (Left) Circular Polarization*.

[15] Vi undantar här det rent patologiska fallet då $\boldsymbol{E}_{0r}$ och $\boldsymbol{H}_{0r}$ respektive $\boldsymbol{E}_{0i}$ och $\boldsymbol{H}_{0i}$ är parallella.

[16] I den tekniska litteraturen förekommer även omvänd definition på höger- respektive vänsterpolarisation. Exempel på omvänd definition är: Jackson [8], Stratton [17] och Van Bladel [18]. Vi använder samma definition på höger- respektive vänster-polarisation som t.ex. Kong [10], Cheng [4] och Kraus [11]. Vår definition överensstämmer med IEEE-standard.



Figur 1.5: Polarisationsellipsen och definition av höger- och vänster-polarisation. Vektorn $\hat{\boldsymbol{e}}_\perp$ är enhetsvektorn $\hat{\boldsymbol{e}}$:s komponent vinkelrätt mot planet i vilket $\boldsymbol{E}(t)$ svänger.

1.3 Materialbeskrivning

I detta avsnitt behandlas endast enkla isotropa material med *dispersion*. Ett isotropt material har samma (mikroskopiska) egenskaper i alla riktningar. En mer fullständig beskrivning av de konstitutiva relationerna finns t.ex. i Ref [12].

1.3.1 Konstitutiva relationer

Polarisationen $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega)$ i ett material är ett mått på de bundna laddningarnas jämviktsförskjutningar. I ett isotropt material antar vi att polarisationen $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega)$ är proportionell mot det pålagda makroskopiska elektriska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$. På motsvarande sätt antas att materialets magnetisering $\boldsymbol{M}$ är proportionell mot det magnetiska fältet. De grundläggande antagandena är

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) = \epsilon_0 \chi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},\omega) = \chi_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases}$$

Funktionerna $\chi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\omega)$ och $\chi_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},\omega)$ beror i allmänhet på $\boldsymbol{r}$ och ω och kallas för materialets elektriska respektive magnetiska susceptibilitetsfunktion. Notera att materialets isotropa egenskaper är definierade på mikroskopisk nivå och strider inte mot att materialets susceptibilitetsfunktioner (makroskopiskt definierade storheter) är rumsberoende.

De elektriska respektive magnetiska flödestätheterna $\boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{B}$ blir, se (1.6) och (1.7) på sidan 4,

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) + \epsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \epsilon_0(1+\chi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\omega))\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) = \mu_0(\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},\omega) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) = \mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},\omega))\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases}$$

eller

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) = \epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) = \mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \tag{1.29}$$

där vi infört dielektricitetsfunktionen (permittivitetsfunktionen) $\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ och permeabilitetsfunktionen $\mu(\boldsymbol{r},\omega)$.

$$\begin{cases} \epsilon(\boldsymbol{r},\omega) = 1 + \chi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \mu(\boldsymbol{r},\omega) = 1 + \chi_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases}$$

Dessa samband kallas för de konstitutiva relationerna för det isotropa materialet. Materialets makroskopiska elektriska och magnetiska egenskaper beskrivs således av två funktioner $\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ och $\mu(\boldsymbol{r},\omega)$. Notera att funktionerna $\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ och $\mu(\boldsymbol{r},\omega)$ i allmänhet är komplexvärda. Ett material vars dielektricitetsfunktion $\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ eller permeabilitetsfunktion $\mu(\boldsymbol{r},\omega)$ beror på ω uppvisar dispersion och kallas ett dispersivt material.

I material med lättrörliga laddningsbärare inför vi en ledningsförmåga $\sigma(\boldsymbol{r},\omega)$ för att beskriva dessa lättrörliga laddningsbärares dynamik. Strömtätheten $\boldsymbol{J}$ är i denna modell proportionell mot det elektriska fältet, och går under namnet Ohms lag.

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega) = \sigma(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$$

Det är alltid möjligt att inkludera dessa effekter av lättrörliga laddningsbärare i dielektricitetsfunktionen, genom att införa en ny dielektricitetsfunktion ϵ_{ny}.

$$\epsilon_{\mathrm{ny}} = \epsilon_{\mathrm{gammal}} + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \tag{1.30}$$

Högerledet i Ampères lag (1.19) är nämligen

$$\boldsymbol{J} - i\omega\boldsymbol{D} = \sigma\boldsymbol{E} - i\omega\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{gammal}}\boldsymbol{E} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{ny}}\boldsymbol{E}$$

och

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = -i\omega\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{ny}}\boldsymbol{E}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \sigma\boldsymbol{E} - i\omega\epsilon_0\epsilon_{\mathrm{gammal}}\boldsymbol{E}$$

blir identiska. Ledningsförmågan innebär således ett tillskott till den komplexa dielektricitetsfunktionen $\epsilon_{\mathrm{gammal}}$.

Maxwells fältekvationer, se (1.18) och (1.19), för isotropa material kan därmed alltid skrivas på följande form mha. (1.29):

$$\begin{cases} \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = -i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \tag{1.31}$$

där effekterna från eventuellt lättrörliga laddningsbärare inkluderas i dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)$.

Vi ser också att den andra ekvationen i (1.31) övergår i den första, och vice versa, om vi gör följande byten:

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \longrightarrow \left(\dfrac{\mu_0\mu(\omega)}{\epsilon_0\epsilon(\omega)}\right)^{1/2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \longrightarrow -\left(\dfrac{\epsilon_0\epsilon(\omega)}{\mu_0\mu(\omega)}\right)^{1/2} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases}$$

där ϵ och μ antagits vara oberoende av rumsvariabeln $\boldsymbol{r}$ (homogena material). En sådan transformation kallas en *dual* transformation.

I ekvation (1.31) kan vi eliminera det magnetiska fältet och få en ekvation i endast det elektriska fältet. Vi åstadkommer detta genom att ta rotationen på den översta ekvationen och sedan utnyttja båda ekvationerna. Vi får med räknereglerna för nabla-operatorn $\nabla \times (\varphi \boldsymbol{a}) = (\nabla\varphi) \times \boldsymbol{a} + \varphi(\nabla \times \boldsymbol{a})$:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) =& i\omega\mu_0 \nabla \times (\mu(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) \\ =& \frac{\nabla\mu(\boldsymbol{r},\omega)}{\mu(\boldsymbol{r},\omega)} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) + \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\boldsymbol{r},\omega)\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \end{aligned}$$

där c_0 ges av $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Vi skriver denna ekvation för det elektriska fältet som:

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\nabla\mu(\boldsymbol{r},\omega)}{\mu(\boldsymbol{r},\omega)} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\boldsymbol{r},\omega)\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0}$$

Med liknande räkningar får vi en ekvation för det magnetiska fältet genom att eliminera det elektriska fältet från (1.31):

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\nabla\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)}{\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)} \times (\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\boldsymbol{r},\omega)\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0}$$

Så här långt i avsnittet har vi antagit att materialparametrarna ϵ och μ kan bero på rumsvariablerna $\boldsymbol{r}$ (inhomogent material). I många tillämpningar är materialet homogent, dvs. materialparametrarna ϵ och μ beror ej på rumsvariablerna. För ett homogent material försvinner mellantermen.

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) - \dfrac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\omega)\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0} \\ \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) - \dfrac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\omega)\epsilon(\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Ytterligare förenklingar i dessa ekvationer kan erhållas för ett homogent material. Tag divergensen på ekvationerna i (1.31). Då ser vi att för ett homogent material

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \end{cases} \tag{1.32}$$

(jfr härledningen av (1.21) och (1.22) på sidan 13) förutsatt att $\omega > 0$. Använd $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a}$ och skriv om ekvationerna för det elektriska och magnetiska fältet i ett homogent material som:

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) + \dfrac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\omega)\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0} \\ \nabla^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) + \dfrac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\omega)\epsilon(\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{1.33}$$

Denna form på ekvationerna är speciellt användbar då vi i senare kapitel skall analysera vågutbredning i vågledare och optiska fibrer.

Exempel 1.2
I detta exempel beskrivs den s.k. *Lorentzmodellen* eller *resonansmodellen.* Den är mycket använd som modell för fasta ämnen med bundna laddningsbärare.

Vi antar att materialet består av bundna laddningsbärare (vanligtvis elektroner), som växelverkar med sina atomkärnor. Atomerna kan vara ordnade i en gitterstruktur, men behöver inte nödvändigtvis vara det. Amorfa ämnen är således även tänkbara.

Laddningsbärarna, med laddning q och massa m, antas påverkas av tre olika krafter:

1. En elektrisk kraft $\boldsymbol{F}_1 = q\boldsymbol{E}$ från ett yttre elektriskt fält $\boldsymbol{E}$.

2. En återförande harmonisk kraft proportionell mot laddningens förskjutning från jämviktsläget, $\boldsymbol{F}_2 = -m\omega_0^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}$, där $\omega_0(\boldsymbol{r}) \geq 0$ är den s.k. harmoniska frekvensen och $\boldsymbol{r}$ är laddningens förskjutning från jämviktsläget.

3. En friktionskraft proportionell mot laddningens hastighet $\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}_3 = -m\nu(\boldsymbol{r})\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$, där $\nu(\boldsymbol{r}) \geq 0$ är kollisionsfrekvensen.

Rörelselagen (Newtons andra lag) för laddningsbärarna ger

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = q\boldsymbol{E} - m\omega_0^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} - m\nu(\boldsymbol{r})\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$$

eller

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} + \nu(\boldsymbol{r})\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} + \omega_0^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r} = \frac{q}{m}\boldsymbol{E}$$

Inför polarisationen $\boldsymbol{P}$ hos materialet, definierad genom

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = N(\boldsymbol{r})q\boldsymbol{r}$$

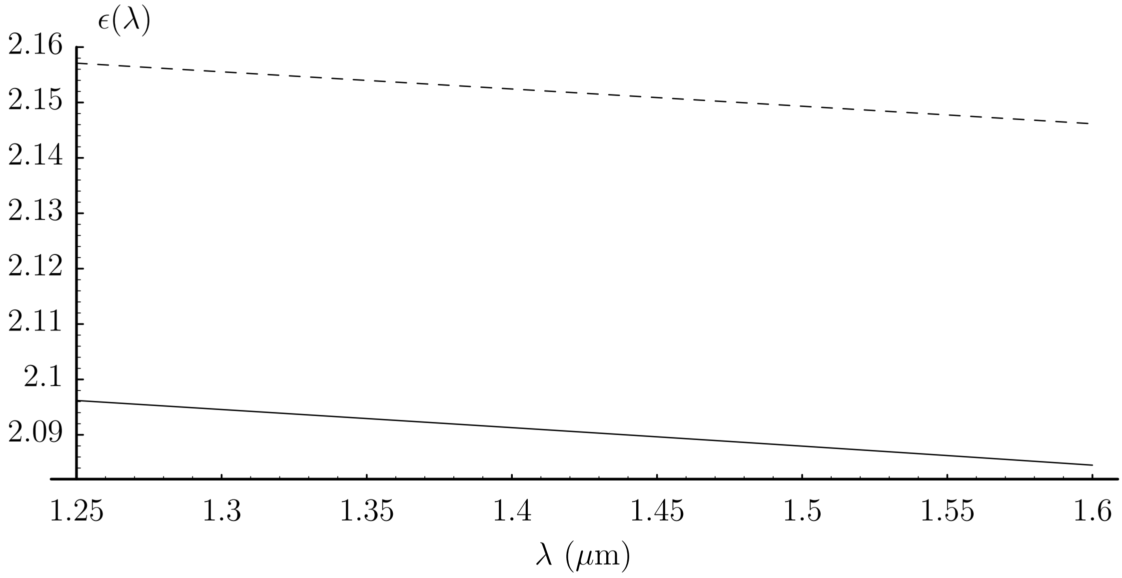
där $N(\boldsymbol{r})$ är antalet laddningsbärare per volymsenhet[17]. Rörelseekvationen kan nu skrivas om som

$$\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) + \nu(\boldsymbol{r})\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) + \omega_0^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) = \frac{N(\boldsymbol{r})q^2}{m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

eller med tidsberoendet $\exp\{-i\omega t\}$

$$-\omega^2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) - i\omega\nu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) + \omega_0^2(\boldsymbol{r})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{N(\boldsymbol{r})q^2}{m}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \tag{1.34}$$

[17] Vi antar att denna storhet är konstant i tiden, vilket är en approximation.



Figur 1.6: Variationen hos dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\lambda)$ i odopat kvartsglas (heldragen linje) och Germaniumdioxiddopat kvartsglas (streckad linje) som funktion av vakuumvåglängden λ i intervallet $[1.25, 1.6]$ μm.

med lösning

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\epsilon_0\omega_p^2(\boldsymbol{r})}{\omega_0^2(\boldsymbol{r}) - \omega^2 - i\omega\nu(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$$

där $\omega_p(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{N(\boldsymbol{r})q^2}{m\epsilon_0}}$ är materialets *plasmafrekvens*.

Om vi nu inför sambandet mellan polarisation $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega)$ och elektrisk fältstyrka $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) - \epsilon_0\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \epsilon_0\left(\epsilon(\boldsymbol{r},\omega) - 1\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)$$

så kan vi identifiera dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)$ för Lorentzmodellen. Resultatet blir

$$\epsilon(\boldsymbol{r},\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2(\boldsymbol{r})}{\omega_0^2(\boldsymbol{r}) - \omega^2 - i\omega\nu(\boldsymbol{r})}$$

eller uttryckt i vakuumvåglängden $\lambda = 2\pi c_0/\omega$

$$\epsilon(\boldsymbol{r},\lambda) = 1 + \frac{\frac{\omega_p^2(\boldsymbol{r})}{\omega_0^2(\boldsymbol{r})}\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2(\boldsymbol{r}) - i\lambda_0(\boldsymbol{r})\lambda\frac{\nu(\boldsymbol{r})}{\omega_0(\boldsymbol{r})}}$$

där resonansvåglängden λ_0 definieras av

$$\lambda_0(\boldsymbol{r}) = \frac{2\pi c_0}{\omega_0(\boldsymbol{r})}$$

∎

Exempel 1.3
Inom optiska fibrer är kvartsglas viktigt. Dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\lambda)$ varierar i odopat

i	a_i(odopat)	λ_{0i} μm (odopat)	a_i(dopat)	λ_{0i} μm (dopat)
1	0.696750	0.069066	0.711040	0.064270
2	0.408218	0.115662	0.451885	0.129408
3	0.890815	9.900559	0.704048	9.425478

Tabell 1.2: Koefficienterna i den analytiska approximationen av dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\lambda)$ för kvartsglas i våglängdsintervallet $[1.25, 1.6]$ μm.

och Germaniumoxiddopat kvartsglas som funktion av vakuumvåglängden λ enligt figur 1.6. Dessa kurvor är en analytisk approximation av dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\lambda)$. Approximationen ges som en summa av tre förlustfria Lorentzmodeller[18]:

$$\epsilon(\lambda) = 1 + \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - {\lambda_0}_i^2}$$

där $a_i = {\omega_p}_i^2/{\omega_0}_i^2$. Koefficienterna i denna approximation, se tabell 1.2, är funna genom numerisk anpassning till en experimentell kurva. Notera att denna approximation av dielektricitetsfunktionen $\epsilon(\lambda)$ är en summa av tre termer, som alla är Lorentzmodeller utan förluster. ∎

1.3.2 Aktiva, passiva och förlustfria material

I avsnitt 1.2.2 härledde vi Poyntings sats för tidsharmoniska fält, se (1.24) på sidan 15. Om vi sätter in de konstitutiva relationerna från ekvation (1.29) i Poyntings sats får vi

$$\begin{aligned} \nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)> &= -\frac{i\omega}{4}\Big\{\mu_0\mu^*(\omega)\boldsymbol{H}^*(\omega)\cdot\boldsymbol{H}(\omega) - \mu_0\mu(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)\cdot\boldsymbol{H}^*(\omega) \\ &\quad + \epsilon_0\epsilon^*(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{E}^*(\omega) - \epsilon_0\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}^*(\omega)\cdot\boldsymbol{E}(\omega)\Big\} \\ &= -\frac{\omega\epsilon_0}{2}\left\{\operatorname{Im}\epsilon(\omega)\,|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 + \operatorname{Im}\mu(\omega)\eta_0^2\,|\boldsymbol{H}(\omega)|^2\right\} \end{aligned} \tag{1.35}$$

Här har vi infört beteckningen $|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 = \boldsymbol{E}(\omega)\cdot\boldsymbol{E}^*(\omega)$ och motsvarande beteckning för det magnetiska fältet, samt $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ för vågimpedansen i vakuum.

Kvantiteten $-\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)>$ anger medelvärdet på den effekt som det elektromagnetiska fältet avger till materialet per volymsenhet. Aktiva, passiva samt förlustfria material för tidsharmoniska fält kan nu definieras med hjälp av detta medelvärde. Ett material är

passivt om	$\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)> < 0$
aktivt om	$\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)> > 0$
förlustfritt om	$\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)> = 0$

[18]Detaljer finns att hämta hos J.W. Fleming, "Material dispersion in lightguide glasses," *Electronics Letters*, **14**(11), 326–328 (1978).

för alla fält $\{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}\} \neq \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}\}$. En volymsintegrering av $\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(t)>$ över en volym V med randyta S (utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$) ger mha. divergenssatsen följande alternativa definitioner:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Passivt material} & \displaystyle\iint_S <\boldsymbol{S}(t)>\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS < 0 \\
\text{Aktivt material} & \displaystyle\iint_S <\boldsymbol{S}(t)>\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS > 0 \\
\text{Förlustfritt material} & \displaystyle\iint_S <\boldsymbol{S}(t)>\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS = 0
\end{array}
$$

Dessa definitioner innebär att i ett passivt material är alltid utstrålad effekt i medeltal negativ, $\iint_S <\boldsymbol{S}(t)>\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS < 0$, medan i ett aktivt är den positiv genom att elektromagnetisk energi skapas (genom icke-elektromagnetiska källor). I ett förlustfritt material förblir den utstrålade effekten över en period noll.

För passiva material måste funktionerna ϵ och μ i de konstitutiva relationerna i (1.29) uppfylla vissa villkor. Från (1.35) ser vi att ett passivt material implicerar att

$$
\begin{cases}
\omega\,\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega) > 0 \\
\omega\,\mathrm{Im}\,\mu(\omega) > 0
\end{cases}
$$

eftersom fälten $\boldsymbol{E}(\omega)$ och $\boldsymbol{H}(\omega)$ kan väljas godtyckligt. För positiva ω innebär detta att

$$
\begin{cases}
\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega) > 0 \\
\mathrm{Im}\,\mu(\omega) > 0
\end{cases}
\qquad \omega > 0 \tag{1.36}
$$

På samma sätt måste funktionerna ϵ och μ i de konstitutiva relationerna i (1.29) uppfylla vissa villkor för förlustfria material. Resultatet blir i detta fall

$$
\begin{cases}
\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega) = 0 \\
\mathrm{Im}\,\mu(\omega) = 0
\end{cases} \tag{1.37}
$$

eftersom fälten $\boldsymbol{E}(\omega)$ och $\boldsymbol{H}(\omega)$ kan väljas godtyckligt. I ett förlustfritt material är således ϵ och μ reella storheter. Notera att detta gäller för en specifik frekvens. För en annan frekvens kan samma material vara passivt eller aktivt.

1.3.3 Plana vågor

I detta avsnitt kommer vi att studera speciella lösningar till Maxwells fältekvationer i homogena material. Lösningarna antar vi kan skrivas som realdelen av ett komplexvärt fält. Ansatsen är

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right\}
$$

där vektorn $\boldsymbol{k}$ kan tillåtas ha komplexa komponenter. Vi kan uttrycka vektorn $\boldsymbol{k}$ i två reella vektorer, $\boldsymbol{k}'$ och $\boldsymbol{k}''$ (real- och imaginärdel)

$$
\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' + i\boldsymbol{k}''
$$

Det fysikaliska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ blir med dessa beteckningar

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}e^{i(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right\} \\ &= \hat{\boldsymbol{x}}|E_x|e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\cos(\theta+\alpha) + \hat{\boldsymbol{y}}|E_y|e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\cos(\theta+\beta) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{z}}|E_z|e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}\cos(\theta+\gamma)\end{aligned} \tag{1.38}$$

där *fasen* θ och den komplexa vektorn $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$ är

$$\begin{cases}\theta = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) = \hat{\boldsymbol{x}}E_x + \hat{\boldsymbol{y}}E_y + \hat{\boldsymbol{z}}E_z = \hat{\boldsymbol{x}}|E_x|e^{i\alpha} + \hat{\boldsymbol{y}}|E_y|e^{i\beta} + \hat{\boldsymbol{z}}|E_z|e^{i\gamma}\end{cases}$$

Lösningar till Maxwells fältekvationer vilkas rums- och tidsberoende är av typen

$$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$$

kallas *plana vågor*. Beteckningen plana vågor kommer av att alla punkter i rummet som uppfyller

$$\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r} = \text{ konstant}$$

definierar ett plan i tre dimensioner med normalriktning $\hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K}/K$, där $\boldsymbol{K}$ är en reell vektor med längd K. Från ekvation (1.38) följer att

$$\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r} = \text{ konstant}$$

definierar ett plan på vilket vågen har konstant amplitud, och $\boldsymbol{k}''$ är vinkelrät mot detta plan[19]. Den plana vågen dämpas exponentiellt i $\boldsymbol{k}''$:s riktning, medan den växer exponentiellt i motsatt riktning. På samma sätt definierar

$$\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r} = \text{ konstant}$$

ett plan på vilket fasen är konstant och $\boldsymbol{k}'$ är vinkelrät mot detta plan. Om vektorerna $\boldsymbol{k}'$ och $\boldsymbol{k}''$ är parallella och riktade åt samma håll, sammanfaller plan med konstant amplitud och fas, och den plana vågen kallas *homogen*, vilket även inkluderar fallet $\boldsymbol{k}'' = \boldsymbol{0}$. I annat fall kallas den plana vågen *inhomogen*.

En rad definitioner och beteckningar visar sig nu lämpliga att införa. Vektorn $\boldsymbol{k}$ kallas vågens *vågvektor* eller $\boldsymbol{k}$*-vektor*. Längden på $\boldsymbol{k}$-vektorns real- och imaginärdelar betecknar vi $k' = |\boldsymbol{k}'|$ respektive $k'' = |\boldsymbol{k}''|$. För plana homogena vågor (vektorerna $\boldsymbol{k}'$ och $\boldsymbol{k}''$ parallella och riktade åt samma håll) använder vi beteckningen $k = k' + ik''$ och för dessa vågor gäller

$$\boldsymbol{k} = \hat{\boldsymbol{k}}k = \hat{\boldsymbol{k}}(k' + ik'')$$

där $\hat{\boldsymbol{k}}$ är $\boldsymbol{k}'$ och $\boldsymbol{k}''$:s gemensamma enhetsvektor. Det komplexa talet k kallas vågens *vågtal*. Notera att med denna definition på homogena plana vågor är både k' och k'' icke-negativa reella storheter.

[19]Med amplitud hos den plana vågen menar vi här amplituden på den komplexa vektorn $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)e^{-\boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r}}$.

Låt r vara avståndet från origo till ett plan med konstant fas vid en viss tid t. Vid en senare tidpunkt $t+\Delta t$ är avståndet till detta plan $r+\Delta r$, och vi har följande samband:

$$k'r - \omega t = k'(r + \Delta r) - \omega(t + \Delta t)$$

vilket betyder att plan med konstant fas utbreder sig i vektorn $\boldsymbol{k}'$:s riktning med en hastighet v definierad av

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\omega}{k'}$$

Hastigheten v kallas den plana vågens *fashastighet*.

Plan $\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} =$ konstant som är separerade med avståndet λ, där $\lambda = 2\pi/k'$, har också samma fält vid en given tidpunkt, ty

$$\exp i\left[\boldsymbol{k}' \cdot \left(\boldsymbol{r} + \lambda\hat{\boldsymbol{k}}_r\right) - \omega t\right] = e^{i\lambda k'} \exp i\left[\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right] = \exp i\left[\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right]$$

Avståndet λ kallas den plana vågens *våglängd*. Vågen utbreder sig således i $\boldsymbol{k}'$-vektorns riktning med hastigheten v, frekvensen $\omega/2\pi$ och våglängden $2\pi/k'$. Den plana vågens dämpning bestäms, som vi sett, av $\boldsymbol{k}''$-vektorns riktning och storlek.

Införandet av planvågslösningar förenklar Maxwells fältekvationer högst väsentligt, eftersom de partiella derivatorna m.a.p. rumsvariablerna $\boldsymbol{r}$ övergår i algebraiska uttryck. Maxwells fältekvationer för plana, tidsharmoniska vågor i ett källfritt område ($\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$), se (1.18) och (1.19), blir

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) = \omega \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega) \tag{1.39}$$

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega) = -\omega \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k}, \omega) \tag{1.40}$$

ty $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \to i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i\left[\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t\right]$ och på liknande sätt för $\nabla \times \boldsymbol{H}$.

Genom Maxwells fältekvationer och materialets konstitutiva relationer får vi villkor på vilka vågvektorer som är tillåtna eller möjliga. Vågvektorns funktionsberoende av (vinkel-)frekvensen ω bestäms således av materialet. I ett isotropt material, se (1.29), gäller

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon(\omega) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, \omega) = \mu_0 \mu(\omega) \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) \end{cases}$$

Vi får omedelbart från dessa konstitutiva relationer samt Maxwells fältekvationer, (1.39) och (1.40), att

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) &= \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = \omega \mu_0 \mu \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\omega^2 \mu_0 \mu \boldsymbol{D} \\ &= -\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \boldsymbol{E} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon \mu \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

Vänstra ledet i denna ekvation kan skrivas om mha. BAC-CAB-regeln, som även gäller för komplexa vektorer. Resultatet blir

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{k}\,(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k})$$

eftersom $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ för isotropa material (följer av de konstitutiva relationerna och (1.40)). Vågvektorn $\boldsymbol{k}$ måste därför uppfylla

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon\mu$$

eller om vi utvecklar skalärprodukten ($\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' + i\boldsymbol{k}''$)

$$\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{k}'' + 2i\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{k}'' = \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon\mu$$

Notera att ϵ och μ i allmänhet är komplexa funktioner av ω. Detta är den s.k. *dispersionsekvationen* för ett isotropt material. Om den plana vågen är homogen, dvs. $\boldsymbol{k} = (k' + ik'')\hat{\boldsymbol{k}}$, förenklas dispersionsekvationen till

$$k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' = \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon\mu$$

eller

$$k'(\omega) + ik''(\omega) = \frac{\omega}{c_0}\left(\epsilon(\omega)\mu(\omega)\right)^{1/2}$$

där grenen av den komplexa kvadratroten är vald så att dess imaginärdel är positiv. Om det isotropa materialet är förlustfritt, dvs. ϵ och μ är reella kvantiteter (se (1.37)), är $k'' = 0$ och vågen utbreder sig utan dämpning i materialet.

Ofta används beteckningen *brytningsindex* $n(\omega)$ definierat av

$$n(\omega) = \frac{c_0}{v(\omega)} = \frac{c_0 k'(\omega)}{\omega}$$

I exemplet ovan med förlustfria, isotropa material är

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$$

Övningar till kapitel 1

1.1 Det elektriska fältet i en punkt i rummet ges av

$$\boldsymbol{E}(t) = \hat{\boldsymbol{e}}_1 a \cos\omega t + \hat{\boldsymbol{e}}_2 b \sin\omega t$$

där a och b är positiva, reella tal. Analysera polarisationstillståndet hos detta fält om $<\boldsymbol{S}(t)>$ antas vara riktad längs $\hat{\boldsymbol{e}}_3 = \hat{\boldsymbol{e}}_1 \times \hat{\boldsymbol{e}}_2$.

1.2 Bestäm en ekvivalent reell konduktivitet $\sigma(\omega)$ för Lorentzmodellen, se sid 22, genom att skriva dess permittivitet på formen enligt Ekv. (1.30) dvs.

$$\epsilon_{\text{ny}} = \epsilon_{\text{gammal}} + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$$

1.3 Man kan alltid superponera ett statiskt elektriskt fält $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ med ett statiskt magnetiskt fält $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ så att strålningsvektorn $\boldsymbol{S}$ är skild från noll i ett område. Å andra sidan vet vi att ett statiskt fält inte kan stråla effekt vilket tyder på en konflikt med Poyntings teorem. Ge en förklaring till denna (skenbara) konflikt.

Sammanfattning av kapitel 1

Allmänt tidsberoende fält

Maxwells ekvationer

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\\ &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\\ &\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho\end{aligned}}$$

Laddningskonservering

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \tfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Lorentz-kraften

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q\left\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right\}}$$

Randvillkor, allmänt och ledare

$$\boxed{\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = \boldsymbol{0}\\ &\hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_S\\ &\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0\\ &\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_S\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0}\\ &\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{J}_S\\ &\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}_1 = 0\\ &\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_1 = \rho_S\end{aligned}}$$

Poyntings sats

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}=0\\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\end{gathered}}$$

Tidsharmoniska fält $\exp\{-i\omega t\}$

Maxwells fältekvationer

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=i\omega\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega)\\ &\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)-i\omega\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega)\end{aligned}}$$

Laddningskonservering

$$\boxed{\nabla\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},\omega)=i\omega\rho(\boldsymbol{r},\omega)}$$

Polarisationstillstånd

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{E}(t)&=\operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t}\right\}\\ \boldsymbol{E}_0&=e^{i\chi}(\boldsymbol{a}+i\boldsymbol{b})\\ i\hat{\boldsymbol{e}}\cdot(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{E}_0^*)&=\begin{cases}=0 & \text{linjär polarisation}\\ >0 & \text{höger elliptisk polarisation}\\ <0 & \text{vänster elliptisk polarisation}\end{cases}\\ \boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0&=0\ \text{cirkulär polarisation}\end{aligned}}$$

Konstitutiva relationer

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) &= \epsilon_0\left(1+\chi_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\omega)\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) &= \mu_0\left(1+\chi_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},\omega)\right)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\end{aligned}}$$

Maxwells fältekvationer, isotropa material

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) &= i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\\ \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) &= -i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\end{aligned}}$$

Fältekvationer, inhomogena, isotropa material

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\nabla\mu(\boldsymbol{r},\omega)}{\mu(\boldsymbol{r},\omega)}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\boldsymbol{r},\omega)\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0}\\ &\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\nabla\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)}{\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)}\times(\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)) - \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\boldsymbol{r},\omega)\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{0}\end{aligned}}$$

Fältekvationer, homogena, isotropa material

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\omega)\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) &= \boldsymbol{0}\\ \nabla^2\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c_0^2}\mu(\omega)\epsilon(\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) &= \boldsymbol{0}\end{aligned}}$$

Poyntings sats

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\cdot <\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)> = -\frac{\omega\epsilon_0}{2}\left\{\operatorname{Im}\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\right|^2 + \operatorname{Im}\mu(\boldsymbol{r},\omega)\eta_0^2\left|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)\right|^2\right\}\\ &<\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)> = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)^*\right\}\end{aligned}}$$

Passiva material

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{Im} \epsilon(\omega) > 0 & \\ & \omega > 0 \\ \operatorname{Im} \mu(\omega) > 0 & \end{array}}$$

Förlustfria material

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Im} \epsilon(\omega) = 0 \\ \operatorname{Im} \mu(\omega) = 0 \end{array}}$$

Plana vågor

$$\boxed{\begin{array}{l} k = k' + ik'' \quad \text{vågtal} \\ v = \dfrac{\omega}{k'} \quad \text{fashastighet} \\ \lambda = \dfrac{2\pi}{k'} \quad \text{våglängd} \\ n = \dfrac{c_0}{v} \quad \text{brytningsindex} \\ k'(\omega) + ik''(\omega) = \dfrac{\omega}{c_0} \left(\epsilon(\omega)\mu(\omega)\right)^{1/2} \quad \text{dispersionsrelation} \end{array}}$$

Kapitel 2

Elektromagnetiska fält med prefererad riktning

I detta kapitel kommer vi att dela upp ett godtyckligt vektorfält i en komponent längs en fix prefererad riktning, som här väljs till positiva z-riktningen, och i en vektor vinkelrätt mot denna riktning, dvs. x-y-planet. Vi tillämpar denna uppdelning på Maxwells fältekvationer. I ett separat avsnitt analyserar vi lösningarna till dessa ekvationer då fälten har ett speciellt z-beroende.

2.1 Uppdelning av vektorfält

Ett godtyckligt vektorfält $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ kan alltid uppdelas i en summa av två mot varandra vinkelräta komponenter[1]. Vi väljer den ena komponenten längs positiva z-axeln och den andra komponenten kommer då att ligga i x-y-planet. En liknande uppdelning gäller för ∇-operatorn. Vi inför följande beteckningssystem:

$$\begin{cases} \nabla = \nabla_T + \hat{\boldsymbol{z}}\dfrac{\partial}{\partial z} \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{z}}F_z(\boldsymbol{r}) \end{cases}$$

där beteckningen $\boldsymbol{F}_T$ används för att beteckna vektorn $\boldsymbol{F}$:s komponent i x-y-planet. Både vektorn $\boldsymbol{F}$:s z-komponent och dess komponent i x-y-planet är entydigt bestämda och fås enkelt genom

$$\begin{cases} F_z(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{z}}\left(\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\right) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{z}}F_z(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}} \times \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \times \hat{\boldsymbol{z}}\right) \end{cases}$$

där vi i sista likheten använt oss av BAC-CAB-regeln, $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$.

[1] Allt eventuellt funktionsberoende på andra variabler, som t.ex. t eller ω skrivs inte ut i detta avsnitt.

Komponenten av en vektor längs z-axeln kallar vi vektorns *longitudinella* komponent, medan vektorns komponent i x-y-planet kallas vektorns *transversella* komponent. För ortsvektorn $\boldsymbol{r}$ använder vi speciella beteckningar

$$\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{x}}x + \hat{\boldsymbol{y}}y + \hat{\boldsymbol{z}}z = \boldsymbol{\rho} + \hat{\boldsymbol{z}}z$$

Vi kan göra en liknande uppdelning av rotationen av ett vektorfält. Rotationens longitudinella komponent blir

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})) &= \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \left[\left(\nabla_T + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{z}}F_z(\boldsymbol{r}))\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r})) = -\nabla_T \cdot (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}))\end{aligned} \tag{2.1}$$

eftersom ∇_T och $\hat{\boldsymbol{z}}$ är vinkelräta. I sista likheten har en cyklisk permutation av vektorerna använts. Den transversella komponenten av rotationen blir

$$\begin{aligned}&\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{z}}\left(\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}))\right) \\ &\quad= \left[\left(\nabla_T + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{z}}F_z(\boldsymbol{r}))\right] - \hat{\boldsymbol{z}}\left(\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}))\right) \\ &\quad= \nabla_T \times \hat{\boldsymbol{z}}F_z(\boldsymbol{r}) + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \times \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}} \times \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T F_z(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{2.2}$$

eftersom $\nabla_T \times \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}}\left(\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{F}_T(\boldsymbol{r}))\right)$.

Den uppdelning som beskrivits i detta avsnitt gäller allmänt för alla vektorfält. I nästa avsnitt tillämpar vi dessa resultat på fälten i Maxwells fältekvationer.

2.2 Tillämpning på Maxwells fältekvationer

Maxwells fältekvationer för ett isotropt dispersivt material, se (1.31) på sidan 20, är

$$\begin{cases}\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) = i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r}, \omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) \\ \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) = -i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r}, \omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega)\end{cases}$$

Vi använder nu den uppdelning av ett vektorfält som introducerades i avsnitt 2.1. De longitudinella komponenterna av dessa ekvationer blir, se (2.1),

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega)) = i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r}, \omega)H_z(\boldsymbol{r}, \omega) \\ \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r}, \omega)) = -i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r}, \omega)E_z(\boldsymbol{r}, \omega)\end{cases} \tag{2.3}$$

De transversella delarna blir på liknande sätt, se (2.2),

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{z}} \times \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega) - \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T E_z(\boldsymbol{r}, \omega) = i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r}, \omega)\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r}, \omega) \\ \hat{\boldsymbol{z}} \times \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r}, \omega) - \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T H_z(\boldsymbol{r}, \omega) = -i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r}, \omega)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega)\end{cases}$$

Vi kan ur dessa ekvationer lösa ut z-derivatorna på de transversella fälten genom att låta $\hat{\boldsymbol{z}}\times$ verka på ekvationerna och utnyttja att $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{E}_T=0$ och $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{H}_T=0$, samt att $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla_T E_z=0$ och $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla_T H_z=0$. Genom BAC-CAB-regeln får vi resultatet

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)=\nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega)-i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega)\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega)=\nabla_T H_z(\boldsymbol{r},\omega)+i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)\end{cases}\tag{2.4}$$

Dessa ekvationer kan skrivas som ett 4×4 system av ekvationer.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)\\ \eta_0\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega)\end{pmatrix}+i\frac{\omega}{c_0}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \mu(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\\ -\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)\\ \eta_0\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega)\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}\nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega)\\ \eta_0\nabla_T H_z(\boldsymbol{r},\omega)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

där $\eta_0=\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ är vågimpedansen för vakuum. Operatorn $\hat{\boldsymbol{z}}\times$ i högerledet ger en rotation med en vinkel $\pi/2$ i x-y-planet av den vektor den verkar på. Vi ser att de longitudinella komponenterna av fälten, E_z och H_z, utgör källor till de elektriska och magnetiska fältens transversella komponenter.

Denna uppdelning i longitudinellt respektive transversellt fält m.a.p. z-axeln är en generell uppdelning av fälten i Maxwells ekvationer i isotropa material. Uppdelningen är alltid möjlig även om materialet skulle vara inhomogent, dvs. med rumsberoende materialparametrar. Däremot är användbarheten av uppdelningen beroende på vilka geometriska villkor som problemet har. I de problem som behandlas i denna bok är uppdelningen oftast mycket användbar pga. att z-axeln kommer att vara en symmetriaxel längs vilken vågutbredningen sker, se kapitel 3 och 5.

2.3 Specifikt z-beroende hos fälten

När vi i senare kapitel kommer att lösa Maxwells fältekvationer i cylindriska geometrier med homogena material, studerar vi fält vars funktionsberoende av z-koordinaten är $\exp(ik_z z)$. Om vi antar att E_z och H_z har z-beroendet $\exp(ik_z z)$, så medför (2.3) att även de transversella komponenterna av fältet har samma z-beroende, dvs. för det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)e^{ik_z z}$$

och liknande beteckningar för andra fält. Koefficienten k_z kallas ofta det *longitudinella vågtalet*. Maxwells fältekvationer—i longitudinell respektive transversell led—förenklas då till ekvationer i de transversella koordinaterna x och y

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\nabla_T\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega))=i\omega\mu_0\mu(\omega)H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\\ \hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\nabla_T\times\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega))=-i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\end{cases}\tag{2.5}$$

och

$$\begin{cases}ik_z\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)-i\omega\mu_0\mu(\omega)\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)=\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\\ ik_z\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)+i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)=\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\end{cases}\tag{2.6}$$

Det första vi nu noterar är att de transversella komponenterna av vektorerna $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$, dvs. $\boldsymbol{E}_T$ och $\boldsymbol{H}_T$, kan uttryckas i fältens longitudinella komponenter E_z och H_z. Tag nämligen $\hat{\boldsymbol{z}}\times$ på den första av de transversella ekvationerna i (2.6), utnyttja $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ (BAC-CAB-regeln), och eliminera $\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)$ mha. den andra ekvationen. Gör vi sedan samma sak med den andra ekvationen får vi

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
&-ik_z\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) - \frac{\omega\mu_0\mu(\omega)}{k_z}\Big[\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) \\
&\qquad - i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\Big] = -\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) \\
&-ik_z\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) + \frac{\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)}{k_z}\Big[\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) \\
&\qquad + i\omega\mu_0\mu(\omega)\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\Big] = -\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)
\end{aligned}
\end{cases}
$$

eller

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) = i\dfrac{k_z\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) - \omega\mu_0\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)}{\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_z^2} \\
\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) = i\dfrac{k_z\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) + \omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)}{\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_z^2}
\end{cases}
$$

Vi skriver om dessa ekvationer.

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) = \dfrac{i}{k_t^2}\left\{k_z\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) - \omega\mu_0\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\right\} \\
\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) = \dfrac{i}{k_t^2}\left\{k_z\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) + \omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)\right\}
\end{cases}
\tag{2.7}
$$

där vi infört det *transversella vågtalet* k_t.

$$
k_t^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_z^2 \tag{2.8}
$$

Mellan vågtalet $k(\omega)$, det longitudinella vågtalet k_z, och det transversella vågtalet k_t råder således sambandet

$$
k^2 = k_t^2 + k_z^2
$$

Vi ser att de elektriska och magnetiska fältens transversella komponenter bestäms av dessa fälts z-komponenter. Det räcker således att veta z-komponenterna hos de elektriska och magnetiska fälten för att konstruera deras transversella delar. Det fulla vektorproblemet som vi startade med har därmed reducerats till ett mycket enklare skalärt problem.

De longitudinella komponenterna, $E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)$ och $H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega)$, satisfierar var för sig en partiell differentialekvation i variablerna x och y. Vi får dessa ekvationer enkelt från (1.33) på sidan 22. Resultatet blir

$$
\begin{cases}
\nabla_T^2 E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) + k_t^2 E_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) = 0 \\
\nabla_T^2 H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) + k_t^2 H_z(\boldsymbol{\rho},k_z,\omega) = 0
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

där det transversella vågtalet k_t är definierat i (2.8). De transversella komponenterna satisfierar på analogt sätt en uppsättning partiella differentialekvationer. De är dock mindre användbara pga. att ekvationerna är vektoriella.

Övningar till kapitel 2

*__2.1__ Låt $\boldsymbol{A} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F})$. Beräkna $\boldsymbol{A}_T$ och A_z uttryckt i $\boldsymbol{F}_T$, F_z, ∇_T och $\frac{\partial}{\partial z}$.

2.2 Visa att man kan relatera $\boldsymbol{E}_T$ och $\boldsymbol{H}_T$ på följande sätt:

$$\text{Om } E_z = 0 \text{ gäller } \boldsymbol{E}_T = -\frac{\omega\mu_0\mu(\omega)}{k_z}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{H}_T$$

och

$$\text{Om } H_z = 0 \text{ gäller } \boldsymbol{H}_T = \frac{\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)}{k_z}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_T$$

Vi har här antagit att alla fälten har det specifika z-beroendet $\exp(ik_z z)$.

Sammanfattning av kapitel 2

Sönderläggning $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)e^{ik_z z}$

Maxwells ekvationer

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{cases}\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)) = i\omega\mu_0\mu(\omega)H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\\ \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)) = -i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\end{cases}\\ &\begin{cases}ik_z\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) - i\omega\mu_0\mu(\omega)\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\\ ik_z\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) + i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\end{cases}\end{aligned}}$$

Transversella komponenter

$$\boxed{\begin{aligned}&\begin{cases}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \dfrac{i}{k_t^2}\left\{k_z\nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) - \omega\mu_0\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\right\}\\ \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \dfrac{i}{k_t^2}\left\{k_z\nabla_T H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) + \omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\right\}\end{cases}\\ &k_t^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_z^2\end{aligned}}$$

Ekvationer för longitudinella komponenter

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_T^2 E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) + k_t^2 E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = 0\\ \nabla_T^2 H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) + k_t^2 H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = 0\end{aligned}}$$

Kapitel 3

Vågledare vid fix frekvens

Vågledarens viktigaste uppgift är att leda elektromagnetisk energi längs en bestämd riktning. En typisk geometri på en vågledare ges i figur 3.1. Vågledarens mantelyta betecknas med S och dess utåtriktade normal med $\hat{\boldsymbol{n}}$. Notera att den utåtriktade normalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ är en funktion av rumsvariablerna x och y, men ej av variabeln z. Vågledarens tvärsnitt betecknas med Ω och tvärsnittets randkurva Γ, se även figur 3.2. I figur 3.2a visas en typ av vågledare som har enkelt sammanhängande tvärsnitt Ω, medan figur 3.2b visar en vågledare med en inre begränsningsyta (randkurvan Γ består av två icke sammanhängande delar). Analysen i detta kapitel gäller för en vågledare med allmänt tvärsnitt. Resultaten är därför generella.

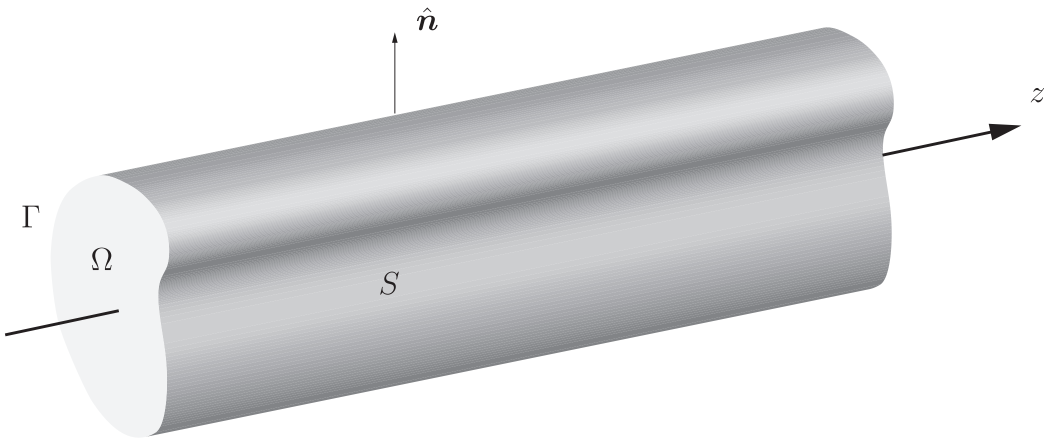
För en vågledare är hela mantelytan av metall. Man brukar tala om slutna vågledare eller hålrumsvågledare, till skillnad mot öppna vågledare som har delar av sin mantelyta utan metall. I detta kapitel behandlas slutna vågledare, medan en typ av öppna vågledare, s.k. dielektriska vågledare (optiska fibrer) behandlas i kapitel 5. Först analyseras randvillkoren på metallytan i detalj i avsnitt 3.1. Maxwells fältekvationer i ett källfritt område löses i avsnitt 3.2 och 3.3. Vi analyserar almänna utvecklingar i avsnitt 3.4 samt ger exempel i avsnitt 3.5. Normeringsegenskaperna hos utvecklingsfunktionerna behandlas i avsnitt 3.6 och effektflödestäthet och förluster i väggar analyseras i avsnitt 3.7 och 3.8. Kapitlet avslutas med två avsnitt, avsnitt 3.10 och 3.11, om modmatchningstekniken och resonanskaviteter. Det sistnämnda avsnittet behandlar även Q-värden för resonanskaviteter.

3.1 Randvillkor

Vi övergår nu till att undersöka hur randvillkoren för de elektriska och magnetiska fälten ser ut på mantelytan S till vågledaren. Vi antar att materialet i vågledaren är isotropt, dvs. de konstitutiva relationerna ges av, se (1.29) på sidan 20,

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},\omega) = \epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},\omega) = \mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases}$$

Randvillkoren (de som inte innehåller ytströmtätheten $\boldsymbol{J}_S$ eller ytladdningstät-



Figur 3.1: Geometri för vågledare.

heten ρ_S) på en perfekt ledande yta är, se (1.13) på sidan 8,

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, \omega) = \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S$$

eftersom $\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu \boldsymbol{H}$ för ett isotropt material.

Vårt mål i detta avsnitt blir att undersöka vilka konsekvenser fältuppdelningen i avsnitt 2.1 har på dessa randvillkor. Inför uppdelningen i en longitudinell och en transversell del på fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$.

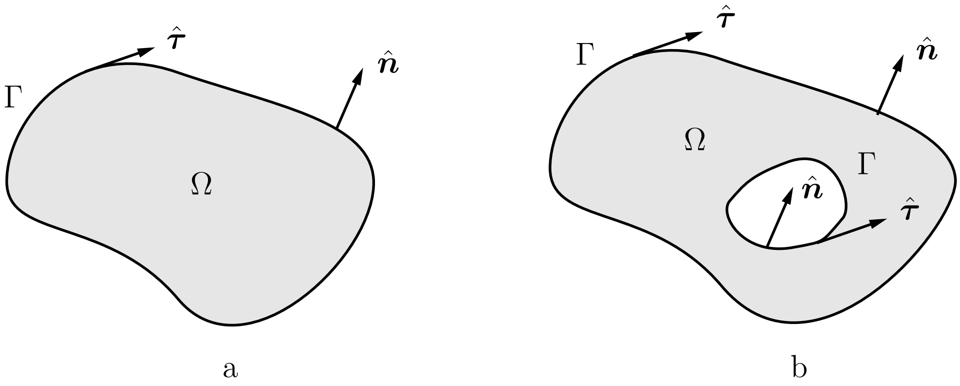
$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega) + \hat{\boldsymbol{z}} E_z(\boldsymbol{r}, \omega)) = \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r}, \omega) + \hat{\boldsymbol{z}} H_z(\boldsymbol{r}, \omega)) = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S$$

Vi antar nu explicit att normalvektorn $\hat{\boldsymbol{n}}$ saknar z-komponent, dvs. $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0$. Eftersom $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_T$ endast har en komponent längs z-axeln, medan $\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{z}}$ är riktad vinkelrätt mot denna axel (riktad i tangentialriktningen till tvärsnittets rand), måste vardera termen i första ekvationens summa vara noll. Vidare gäller att den andra termen i det andra randvillkoret försvinner pga. att $\hat{\boldsymbol{n}}$ och $\hat{\boldsymbol{z}}$ är vinkelräta. Dessa villkor är därför ekvivalenta med

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega)) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S \tag{3.1}$$

Dessa ekvationer skall gälla för alla punkter på randytan S, vilket medför att även följande z-derivator skall vara noll:

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{n}} \times \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega) \right) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial z} \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S$$



Figur 3.2: Tvärsnittsgeometri för vågledare. z-axeln är riktad in i papprets plan och $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$.

Notera att vi här explicit använt att den utåtriktade normalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ ej beror på koordinaten z.

Vi kan nu utnyttja (2.4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega) - i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \nabla_T H_z(\boldsymbol{r},\omega) + i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases}$$

för att eliminera de transversella fältens z-derivator från randvillkoren. Vi får

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{z}} \cdot [\hat{\boldsymbol{n}} \times (\nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega) - i\omega\mu_0\mu(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega))] = 0 \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\nabla_T H_z(\boldsymbol{r},\omega) + i\omega\epsilon_0\epsilon(\boldsymbol{r},\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)) = 0 \end{cases}$$

Genom en cyklisk permutation av $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_T)$ finner vi att denna term är noll genom att utnyttja det ursprungliga randvillkoret (3.1). Vidare är $\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{H}_T) = 0$, varför vi finner

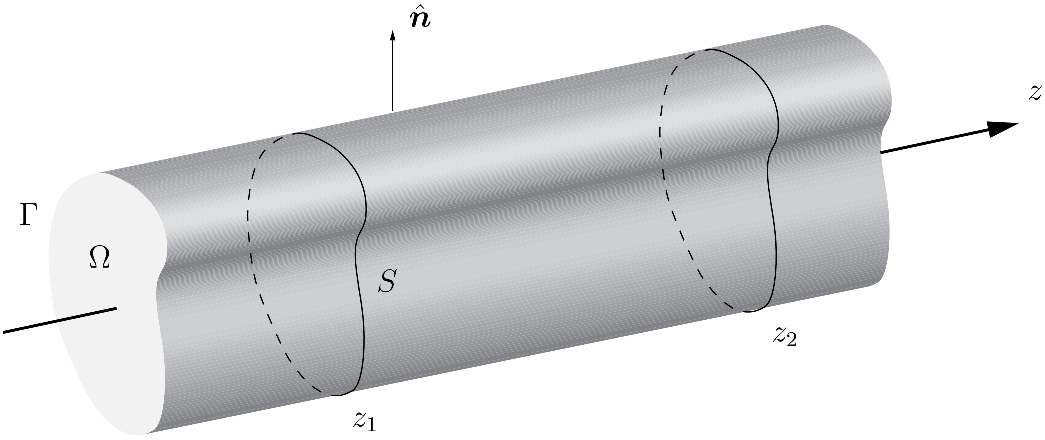
$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega)) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_T H_z(\boldsymbol{r},\omega) = \dfrac{\partial}{\partial n} H_z(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \end{cases}$$

Det andra av dessa villkor, som innebär att de till randen Γ parallella derivatorna är noll, är automatiskt uppfyllt om $E_z = 0$ på S. Vi inser detta genom att skriva om i en tangentialvektor $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{n}}$ till randen Γ.

$$\hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega)) = (\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{n}}) \cdot \nabla_T E_z(\boldsymbol{r},\omega) = \frac{\partial E_z}{\partial \tau}(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S$$

Vi får därför till slut att randvillkoren på mantelytan S medför att

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r},\omega) = 0, \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial n}(\boldsymbol{r},\omega) = 0, \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S \tag{3.2}$$



Figur 3.3: Lösningsområde för vågledaren.

Vi ser att randvillkoren på randytan för vågledaren endast innehåller villkor på fältens z-komponenter. Däremot kommer inte fältens transversella delar explicit in. Resultatet i detta avsnitt gäller även för inhomogena vågledare, men vi kommer endast att tillämpa det på vågledare fyllda med homogena material. Omvändningen till resultatet i detta avsnitt, nämligen att (3.2) medför (1.13) på sidan 8 gäller däremot inte.

3.2 TM- och TE-moder

I detta avsnitt skall vi lösa Maxwells fältekvationer i en vågledare med allmän tvärsnittsyta Ω och perfekt ledande väggar S. I isotropa, homogena material gäller att olika komponenter av fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ inte kopplar till varann via differentialekvationerna, se (1.33), utan endast via sina randvillkor. Från randvillkoren i ekvation (3.2) konstaterar vi att z-komponenterna på fälten uppträder i två skilda randvillkor. Av denna anledning kan vi särskilja två icke-växelverkande fall.

$$\begin{cases} H_z(\boldsymbol{r},\omega) = 0 & \text{(TM-fallet)} \\ E_z(\boldsymbol{r},\omega) = 0 & \text{(TE-fallet)} \end{cases}$$

I detta avsnitt antar vi att antingen E_z *eller* H_z är skilda från noll. Det första fallet kallas för det transversellt magnetiska fallet (TM-fallet), eftersom det magnetiska fältet saknar z-komponent. På motsvarande sätt kallas det andra det transversellt elektriska fallet (TE-fallet). De två fallens lösningar kopplar inte till varann. I ett senare avsnitt kommer vi att visa vilka villkor som måste vara uppfyllda om *både* E_z och H_z är noll.

Vi koncentrerar oss på ett område av vågledaren mellan två plan $z = z_1$ och $z = z_2$ ($z_2 > z_1$) där det inte finns några källor till Maxwells fältekvationer, dvs. $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$, se figur 3.3. Vi tillåter även att planen $z = z_1$ och $z = z_2$ är belägna i oändligheten, dvs. $z_1 \to -\infty$ och $z_2 \to \infty$. Områden med källor behandlas senare i avsnitt 3.9.

Innan vi börjar beräkna rumsberoendet av det elektromagnetiska fältet i vågledaren, skall vi sammanfatta lösningsstrategin. Vågledaren antas vara fylld med ett isotropt, homogent material vars materialparametrar betecknas med $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$. Vi har i ett tidigare kapitel, se (1.33) på sidan 22, sett att de longitudinella fälten $E_z(\boldsymbol{r}, \omega)$ och $H_z(\boldsymbol{r}, \omega)$ satisfierar

$$
\begin{cases} \nabla^2 E_z(\boldsymbol{r}, \omega) + k^2(\omega) E_z = 0 \\ E_z(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S \end{cases} \qquad z \in [z_1, z_2], \boldsymbol{\rho} \in \Omega
$$
$$
\begin{cases} \nabla^2 H_z(\boldsymbol{r}, \omega) + k^2(\omega) H_z = 0 \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial n}(\boldsymbol{r}, \omega) = 0 \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S \end{cases} \qquad z \in [z_1, z_2], \boldsymbol{\rho} \in \Omega \tag{3.3}
$$

där vi under varje ekvation också lagt till motsvarande randvillkor, och där materialets vågtal är

$$
k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\omega) \mu(\omega)
$$

Om vi kan lösa dessa båda randvärdesproblem, kan vi från ekvation (2.7) på sidan 36 bestämma även de transversella komponenterna av det elektromagnetiska fältet. Det första fallet i ekvation (3.3) är det transversellt magnetiska fallet (TM-fallet) där $H_z = 0$. Det andra fallet är det transversellt elektriska fallet (TE-fallet) där $E_z = 0$.

Vi skall använda separationsmetoden för att lösa de två randvärdesproblemen i (3.3). Separationsmetoden är en flitigt använd metod i många tillämpade problem inom matematisk fysik, och dess grundidé är kortfattat följande:

I. Ansätt på försök en lösning som är en produkt av funktioner, där varje faktor i produkten endast beror på en variabel, t.ex. $E_z(\boldsymbol{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$.

II. Identifiera ett egenvärdesproblem i en eller flera av variablerna, t.ex. x och y, och lös detta egenvärdesproblem.

III. Om det erhållna egenvärdesproblemet är fullständigt, utveckla lösningen till det ursprungliga problemet i en Fourierserie i dessa egenfunktioner. De obestämda Fourierkoefficienterna beror på de återstående koordinaterna, i vårt exempel z-koordinaten.

IV. Fourierkoefficienterna bestäms genom att Fourierserien sätts in i differentialekvationen och en ekvation (vanligen ordinär differentialekvation) för de okända utvecklingskoefficienterna erhålls.

V. Denna ekvation för utvecklingskoefficienterna löses.

I vårt fall kommer vi att använda variabelseparationsmetoden för att identifiera ett fullständigt system i de transversella koordinaterna x och y. Detta system kan vi sedan använda för att utveckla vår lösning i.

3.2.1 Fältens longitudinella komponenter

I enlighet med I i schemat ovan för separarationsmetoden ansätter vi en lösning på formen

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r}) = v(\boldsymbol{\rho})a(z) \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r}) = w(\boldsymbol{\rho})b(z) \end{cases}$$

där $\boldsymbol{\rho} = \hat{\boldsymbol{x}}x + \hat{\boldsymbol{y}}y$ och η_0 som vanligt betecknar vågimpedansen för vakuum. Dessa ansatser ger efter insättning i (3.3)

$$\begin{cases} a(z)\nabla_T^2 v(\boldsymbol{\rho}) + v(\boldsymbol{\rho})\dfrac{\partial^2 a}{\partial z^2}(z) + k^2 v(\boldsymbol{\rho})a(z) = 0 \\ v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} b(z)\nabla_T^2 w(\boldsymbol{\rho}) + w(\boldsymbol{\rho})\dfrac{\partial^2 b}{\partial z^2}(z) + k^2 w(\boldsymbol{\rho})b(z) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases}$$

Efter division med $v(\boldsymbol{\rho})a(z)$ respektive $w(\boldsymbol{\rho})b(z)$ får vi

$$\begin{cases} \dfrac{\nabla_T^2 v(\boldsymbol{\rho})}{v(\boldsymbol{\rho})} = -\dfrac{1}{a(z)}\dfrac{\partial^2 a}{\partial z^2}(z) - k^2 \\ v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\nabla_T^2 w(\boldsymbol{\rho})}{w(\boldsymbol{\rho})} = -\dfrac{1}{b(z)}\dfrac{\partial^2 b}{\partial z^2}(z) - k^2 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases}$$

I dessa differentialekvationer beror de vänstra leden endast på variablerna x och y, medan de högra endast beror på z. Detta kan endast vara uppfyllt för en konstant funktion som vi betecknar med k_t^2 av skäl som blir uppenbara senare. Vi kan således identifiera följande två egenvärdesproblem för vågledaren i enlighet med punkt II ovan.

$$\begin{cases} \nabla_T^2 v(\boldsymbol{\rho}) + k_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{\partial^2 v(\boldsymbol{\rho})}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v(\boldsymbol{\rho})}{\partial y^2} + k_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TM-fallet)}$$

och

$$\begin{cases} \nabla_T^2 w(\boldsymbol{\rho}) + k_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{\partial^2 w(\boldsymbol{\rho})}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w(\boldsymbol{\rho})}{\partial y^2} + k_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TE-fallet)}$$

Vi kommer senare i detta avsnitt att ge explicita exempel på dessa egenvärdesfunktioner, men här fortsätter vi med den allmänna behandlingen. Dessa båda fall utgör egenvärdesproblem i de transversella koordinaterna x och y. Det finns endast ett uppräkneligt antal värden på k_t^2 (k_t kallas det transversella vågtalet) för vilket detta problem har en icke-trivial lösning. Dessa värden på k_t^2 kallas problemets egenvärden och numreras i stigande storlek. De är i allmänhet olika för TE- och TM-fallen, men det är praktiskt att använda samma beteckning för de båda problemen. Vidare gäller att dessa egenvärden är positiva, så $k_t^2 > 0$, se exempel 3.1, dvs. vi numrerar egenvärdena enligt:

$$0 < k_{t1}^2 \leq k_{t2}^2 \leq k_{t3}^2 \leq \dots$$

Det finns endast ett ändligt antal egenvärden som har samma värde. Egenfunktionerna till de båda problemen betecknar vi med $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_n(\boldsymbol{\rho})$, dvs. de är lösningar till[1]

$$\begin{cases} \nabla_T^2 v_n(\boldsymbol{\rho}) + k_{tn}^2 v_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \boldsymbol{\rho} \in \Omega \\ v_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TM-fallet)} \tag{3.4}$$

och

$$\begin{cases} \nabla_T^2 w_n(\boldsymbol{\rho}) + k_{tn}^2 w_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \boldsymbol{\rho} \in \Omega \\ \dfrac{\partial w_n(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} = 0 & \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TE-fallet)} \tag{3.5}$$

Notera också att dessa egenfunktioner är oberoende av (vinkel-)frekvensen ω och materialet i vågledaren, dvs. oberoende av $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$. De beror därför endast av vågledarens tvärsnittsgeometri given av Ω. Detta gör att vi alltid har möjlighet att välja egenfunktionerna som reella funktioner. Vi kommer genomgående i denna bok att låta egenfunktionerna $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_n(\boldsymbol{\rho})$ vara *reella*.

Dessa egenfunktioner, $\{v_n(\boldsymbol{\rho})\}_{n=1}^{\infty}$ och $\{w_n(\boldsymbol{\rho})\}_{n=1}^{\infty}$, genererar ett fullständigt funktionssystem i planet, se punkt III. Vi kan utveckla en godtycklig funktion i planet i dessa system. Vi tillämpar nu detta på funktionerna $E_z(\boldsymbol{r}, \omega)$ och $H_z(\boldsymbol{r}, \omega)$.

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r}, \omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z, \omega) v_n(\boldsymbol{\rho}) \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r}, \omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z, \omega) w_n(\boldsymbol{\rho}) \end{cases} \tag{3.6}$$

Exempel 3.1

Alla egenvärden till TM- och TE-moderna är icke-negativa tal. Detta visar vi enkelt utgående från räkneregeln $\nabla \cdot (f \nabla f) = \nabla f \cdot \nabla f + f \nabla^2 f$, som vi integrerar över vågledarens tvärsnittsarea Ω. Gauss sats i planet ger nu

$$\oint_{\Gamma} f(\boldsymbol{\rho}) \frac{\partial}{\partial n} f(\boldsymbol{\rho}) \, dl = \iint_{\Omega} \left(\nabla_T f(\boldsymbol{\rho})\right)^2 \, dxdy + \iint_{\Omega} f(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T^2 f(\boldsymbol{\rho}) \, dxdy$$

Notera att om funktionen är oberoende av z- koordinaten, så är $\nabla f = \nabla_T f$.

Tag först TM-fallet och låt $f(\boldsymbol{\rho}) = v_n(\boldsymbol{\rho})$. På grund av randvillkoret på randkurvan Γ, $v_n = 0$, så försvinner linjeintegralen. Vidare använder vi differentialekvationen för

[1] Oftast är det praktiskt att räkna upp egenvärderna som en följd indicerad med två index mn, se exemplen längre fram i detta kapitel.

egenvärdesproblemet (3.4) och får

$$\iint_\Omega (\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}))^2 \, dxdy = k_{tn}^2 \iint_\Omega (v_n(\boldsymbol{\rho}))^2 \, dxdy \tag{3.7}$$

och speciellt olikheten

$$k_{tn}^2 \iint_\Omega (v_n(\boldsymbol{\rho}))^2 \, dxdy \geq 0$$

Om inte v_n är identiskt noll, så implicerar denna olikhet att egenvärdet för TM-fallet är icke-negativt, $k_{tn}^2 \geq 0$.

Genom att välja $f(\boldsymbol{\rho}) = w_n(\boldsymbol{\rho})$ och utnyttja (3.5) och randvillkoret $\frac{\partial}{\partial n} w_n(\boldsymbol{\rho}) = 0$ får vi på liknande sätt för TE-fallet relationen

$$\iint_\Omega (\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}))^2 \, dxdy = k_{tn}^2 \iint_\Omega (w_n(\boldsymbol{\rho}))^2 \, dxdy \tag{3.8}$$

och olikheten

$$k_{tn}^2 \iint_\Omega (w_n(\boldsymbol{\rho}))^2 \, dxdy \geq 0$$

På samma sätt som ovan gäller att om inte w_n är identiskt noll, så är egenvärdet för TE-fallet också icke-negativt, $k_{tn}^2 \geq 0$.

Det går att visa ett strängare resultat, nämligen att egenvärdet $k_{tn}^2 = 0$ ger motsägelse och att i själva verket egenvärdena är positiva för TM- och TE-fallen[2]. Från (3.7) och (3.8) finner vi att $k_{tn}^2 = 0$ implicerar att $\nabla_T v_n = \nabla_T w_n = 0$ i Ω, dvs. $v_n =$ konstant och $w_n =$ konstant i Ω. I TM-fallet innebär detta att $v_n = 0$ eftersom randvillkoret $v_n = 0$ ger att konstanten måste vara noll. Vi har således en motsägelse och egenvärdena k_{tn}^2 i TM-fallet alla är positiva. För att visa samma resultat i TE-fallet hämtar vi ett resultat från sidan 34 och ekvation (2.3).

$$H_z(\boldsymbol{r}, \omega) = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu(\omega)} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla_T \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega)) = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu(\omega)} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega))$$

Eftersom w_m =konstant i Ω så beror H_z i vänsterledet ej på $\boldsymbol{\rho}$. Stokes sats på tvärsnittsytan Ω ger

$$\iint_\Omega H_z \, dxdy = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu(\omega)} \iint_\Omega \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega)) \, dxdy = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu(\omega)} \oint_\Gamma \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r}, \omega) \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

pga. randvillkoret $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. Vi får

$$H_z \iint_\Omega dxdy = 0$$

som implicerar $H_z = 0$ eller $w_n = 0$, vilket är en motsägelse, och på samma sätt som ovan gäller att egenvärdena k_{tn}^2 i TE-fallet alla är positiva. ■

[2]Egenvärdet $k_{tn}^2 = 0$ är däremot möjligt för TEM-fallet.

Exempel 3.2
Vi visar att egenfunktionerna v_n och v_m eller w_n och w_m som hör till olika egenvärden k_{tn}^2 och k_{tm}^2 i TM- och TE-fallen är ortogonala. Som utgångspunkt väljer vi att använda Gauss sats i planet ($f_n = v_n$ eller $f_n = w_n$ beroende på TM- eller TE-fall)

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_\Gamma (f_n \nabla_T f_m - f_m \nabla_T f_n) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dl = \iint_\Omega \nabla_T \cdot (f_n \nabla_T f_m - f_m \nabla_T f_n)\, dxdy \\
&= \iint_\Omega (\nabla_T f_n \cdot \nabla_T f_m - \nabla_T f_m \cdot \nabla_T f_n + f_n \nabla_T^2 f_m - f_m \nabla_T^2 f_n)\, dxdy \\
&= (k_{tn}^2 - k_{tm}^2) \iint_\Omega f_n f_m \, dxdy
\end{aligned}$$

där vi använt egenvärdesekvationen (3.4) eller (3.5). Om egenvärdena är olika ser vi att

$$\iint_\Omega f_n f_m \, dxdy = 0$$

dvs. egenfunktionerna v_n och v_m eller w_n och w_m som hör till olika egenvärden k_{tn}^2 och k_{tm}^2 är ortogonala. ∎

Utvecklingar i (3.6) sätts nu in i ursprungsekvationen (3.3). Växlar vi differentiering och summering och utnyttjar egenskaperna hos egenfunktionerna $\{v_n(\boldsymbol{\rho})\}_{n=1}^\infty$ och $\{w_n(\boldsymbol{\rho})\}_{n=1}^\infty$ får vi följande ordinära differentialekvationer för Fourierkoefficienterna a_n och b_n:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 a_n}{\partial z^2}(z,\omega) + \left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_{tn}^2 \right) a_n(z,\omega) = 0 \\
\dfrac{\partial^2 b_n}{\partial z^2}(z,\omega) + \left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_{tn}^2 \right) b_n(z,\omega) = 0
\end{cases}$$

Den allmänna lösningen till dessa ekvationer är

$$\begin{cases}
a_n(z,\omega) = a_n^\pm e^{\pm i k_{zn}(\omega) z} \\
b_n(z,\omega) = b_n^\pm e^{\pm i k_{zn}(\omega) z}
\end{cases}$$

där det *longitudinella vågtalet* k_{zn} är

$$k_{zn}(\omega) = \left(\frac{\omega^2}{c_0^2} \epsilon(\omega)\mu(\omega) - k_{tn}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

Det longitudinella vågtalet är i allmänhet en komplex storhet. Detta skall jämföras med det transversella vågtalet som alltid är reellt. Grenen för den komplexa kvadratroten för det longitudinella vågtalet väljs alltid i denna bok så att k_{zn} har icke-negativ real- och imaginärdel. Mellan vågtalet $k(\omega)$, det longitudinella vågtalet k_{zn} och det transversella vågtalet k_{tn} råder således sambanden

$$k^2(\omega) = k_{tn}^2 + k_{zn}^2(\omega)$$

se även analysen i avsnitt 2.3. Notera också att k_{zn} är mindre än vågtalet, $k(\omega)$, i materialet (för förlustfritt material), vilket innebär att fashastigheten för vågen i vågledaren i z-led är större än motsvarande fashastighet i materialet utan vågledare. I en vågledare utan material leder detta till att vågens fashastighet är större än ljushastigheten i vakuum. Eftersom ingen information kan överföras med en monokromatisk mod uppstår ingen konflikt med relativitetsteorin.

Den allmänna lösningen på fältens longitudinella komponenter i vågledaren kan således utvecklas i en serie

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\boldsymbol{\rho}) \left(a_n^+(\omega) e^{ik_{zn}(\omega)z} + a_n^-(\omega) e^{-ik_{zn}(\omega)z}\right) \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n(\boldsymbol{\rho}) \left(b_n^+(\omega) e^{ik_{zn}(\omega)z} + b_n^-(\omega) e^{-ik_{zn}(\omega)z}\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

Termerna i denna summa kallas vågens *moder*. Koefficienterna a_n och b_n bestäms av hur vågorna (moderna) har genererats. Notera att det longitudinella vågtalet k_{zn} är olika i de båda summorna, och att k_{zn} i allmänhet är komplext. Plustecknet i exponenten svarar mot en våg som propagerar i $+z$-riktningen, medan minustecknet svarar mot en våg som propagerar i $-z$-riktningen. Ett generellt uttryck för en våg som propagerar i $+z$-riktningen är

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\boldsymbol{\rho}) a_n^+(\omega) e^{ik_{zn}(\omega)z} \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} w_n(\boldsymbol{\rho}) b_n^+(\omega) e^{ik_{zn}(\omega)z} \end{cases} \tag{3.11}$$

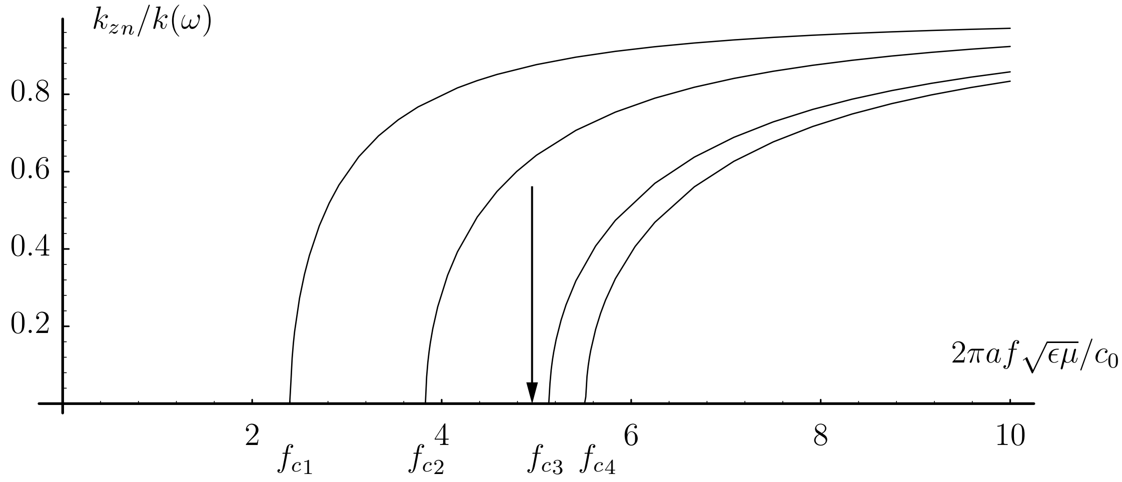
Om k_{zn} är komplext kommer vågen att dämpas ut exponentiellt i propagationsriktningen. Är materialparametrarna $\epsilon(\omega)$ eller $\mu(\omega)$ komplexa storheter vid frekvensen ω sker det alltid en dämpning av vågen i propagationsriktningen. Endast för de frekvenser där materialet är förlustfritt, dvs. där $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$ är reella, kan vågen propagera till stora z-värden.

Eftersom det transversella vågtalet, k_{tn}, är en icke-avtagande sekvens kommer även för förlustfria material de högre moderna att dämpas. I summan (3.11) kommer därför endast ett ändligt antal termer att bidraga till fältet för stora z-värden. Brytpunkten mellan vilka moder som propagerar och de som dämpas bestäms av gränsfrekvensen $f_{cn} = \omega_{cn}/2\pi$ (i anglo-saxisk litteratur *cut-off-frequency*).

$$\frac{\omega_{cn}}{c_0}\sqrt{\epsilon(\omega_{cn})\mu(\omega_{cn})} = k_{tn}$$

Begreppet gränsfrekvens är endast intressant vid frekvenser då materialet är förlustfritt, dvs. då $\epsilon(\omega_{cn})$ och $\mu(\omega_{cn})$ är reella. Är dessutom $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$ oberoende av frekvensen blir gränsfrekvensen

$$f_{cn} = \frac{k_{tn} c_0}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{3.12}$$



Figur 3.4: Vågledardispersion för en cirkulär vågledare (radie a) som funktion av frekvensen f. De första fyra modernas dispersion, svarande mot de fyra lägsta gränsfrekvenserna, visas. Pilen visar en frekvens där två egenmoder propagerar, de övriga dämpas. Det longitudinella vågtalet k_{zn} är normerat med materialets vågtal $k(\omega)$ och frekvensen f är normerad med $c_0/(2\pi a\sqrt{\epsilon\mu})$, jfr med de explicita uttrycken på egenvärdena i tabell 3.4.

för varje mod n. Sambandet mellan frekvens f, longitudinellt vågtal k_{zn} och gränsfrekvens f_{cn} blir i detta fall

$$k_{zn} = \frac{2\pi}{c_0}\sqrt{\epsilon\mu}\left(f^2 - f_{cn}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

För en given frekvens f propagerar de moder vars gränsfrekvens f_{cn} är lägre än f, dvs. $f_{cn} < f$, medan de moder vars gränsfrekvens f_{cn} är högre än f dämpas, dvs. $f < f_{cn}$. Det longitudinella vågtalets beroende av frekvensen visas i figur 3.4. Detta frekvensberoende hos det longitudinella vågtalet kallas vågledardispersion, till skillnad från materialdispersionen som ges av vågtalet $k(\omega)$:s beroende på frekvensen.

3.2.2 Fältens transversella komponenter

Det återstår nu att bestämma de transversella delarna av fälten. Vi observerar genast att z-komponenterna av det elektriska respektive magnetiska fältet har det explicita z-beroendet $\exp\{\pm ik_z z\}$. För att generera de transversella komponenterna av fälten kan vi därför använda resultaten från avsnitt 2.3; speciellt ger ekvation (2.7) på sidan 36 de önskade sambanden

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \dfrac{i}{k_t^2}\left\{\pm k_z \nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) - \dfrac{\omega}{c_0}\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T \eta_0 H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\right\} \\ \eta_0 \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) = \dfrac{i}{k_t^2}\left\{\pm k_z \nabla_T \eta_0 H_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega) + \dfrac{\omega}{c_0}\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T E_z(\boldsymbol{\rho}, k_z, \omega)\right\} \end{cases}$$

där relationen (3.9) har använts. Resultatet blir

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{k_{tn}^2}\Big\{a_n^+ k_{zn}\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) - b_n^+ \frac{\omega}{c_0}\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})\Big\}e^{ik_{zn}z} \\ \qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{k_{tn}^2}\Big\{a_n^- k_{zn}\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) + b_n^- \frac{\omega}{c_0}\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})\Big\}e^{-ik_{zn}z} \\ \eta_0\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{k_{tn}^2}\Big\{b_n^+ k_{zn}\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}) + a_n^+ \frac{\omega}{c_0}\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})\Big\}e^{ik_{zn}z} \\ \qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{k_{tn}^2}\Big\{b_n^- k_{zn}\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}) - a_n^- \frac{\omega}{c_0}\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})\Big\}e^{-ik_{zn}z} \end{cases} \tag{3.13}$$

De transversella komponenterna är väldefinierade storheter eftersom $k_t^2 > 0$. Speciellt gäller för en våg som propagerar i $+z$-riktningen

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{k_{tn}^2}\Big\{a_n^+ k_{zn}\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) - b_n^+ \frac{\omega}{c_0}\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})\Big\}e^{ik_{zn}z} \\ \eta_0\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{k_{tn}^2}\Big\{b_n^+ k_{zn}\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}) + a_n^+ \frac{\omega}{c_0}\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})\Big\}e^{ik_{zn}z} \end{cases}$$

Därmed är det elektromagnetiska fältets utseende i vågledaren bestämt.

3.3 TEM-moder

I tidigare avsnitt har vi antagit att antingen det elektriska fältet eller det magnetiska fältet har en z-komponent. Under detta antagande fann vi ett fullständigt utvecklingsystem, se avsnitt 3.2. Speciellt fann vi att det transversella vågtalet var positivt, och att inga moder med egenvärdet $k_{tn} = 0$ för TM- och TE-fallen var möjliga.

Vi skall i detta avsnitt undersöka om det finns möjliga lösningar till Maxwells fältekvationer då både $E_z = H_z = 0$. En sådan lösning har därför endast transversella komponenter av fälten och kallas en TEM-mod. I transmissionsledningar är fälten i de flesta fall TEM-vågor. Dessa analyseras i grundkursen utgående från ledningsekvationerna för spänning och ström. I detta avsnitt ser vi att man lika gärna kan utgå från Maxwells ekvationer. För att göra denna analys måste vi starta om från ekvationerna i kapitel 2.

Saknas z-komponenter av fälten får vi från (2.3) och (2.4)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\nabla_T\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)) = 0 \\ \hat{\boldsymbol{z}}\cdot(\nabla_T\times\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega)) = 0 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = -i\omega\mu_0\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) \\ \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) = i\omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \tag{3.14}$$

Eftersom $\nabla_T \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)$ endast har en z-komponent får vi att

$$\nabla_T \times \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \mathbf{0}$$

Detta samband gäller överallt i rummet vilket medför att det finns en potential $\psi(\boldsymbol{r},\omega)$ sådan att

$$\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = -\nabla_T \Psi(\boldsymbol{r},\omega) \tag{3.15}$$

Potentialen Ψ är ej entydigt definierad, utan varje potential som skiljer sig på en funktion av z från Ψ ger samma fält $\boldsymbol{E}_T$. Vidare gäller från (1.32) och (1.33) på sidan 21

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) + k^2(\omega)\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = \mathbf{0} \\ \nabla_T \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \end{cases}$$

där vågtalet som vanligt är $k^2(\omega) = \omega^2\epsilon(\omega)\mu(\omega)/c_0^2$. Insatt $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = -\nabla_T\Psi(\boldsymbol{r},\omega)$ ger

$$\begin{cases} \nabla_T \left(\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},\omega) + k^2(\omega)\Psi(\boldsymbol{r},\omega)\right) = \mathbf{0} \\ \nabla_T^2 \Psi(\boldsymbol{r},\omega) = 0 \end{cases}$$

Eliminera derivatorna m.a.p. de transversella koordinaterna mha. det andra sambandet. Resultatet blir

$$\nabla_T \left\{ \frac{d^2}{dz^2}\Psi(\boldsymbol{r},\omega) + k^2(\omega)\Psi(\boldsymbol{r},\omega) \right\} = \mathbf{0}$$

vilket ger

$$\frac{d^2}{dz^2}\Psi(\boldsymbol{r},\omega) + k^2(\omega)\Psi(\boldsymbol{r},\omega) = C(z)$$

i planet Ω. Konstanten, $C(z)$, som saknar fysikalisk betydelse (endast transversella gradienten av potentialen har betydelse), kan väljas till noll (utnyttja att potentialen ej är entydigt bestämd). Potentialen Ψ satisfierar därför

$$\frac{d^2}{dz^2}\Psi(\boldsymbol{r},\omega) + k^2(\omega)\Psi(\boldsymbol{r},\omega) = 0$$

med lösningar

$$\Psi(\boldsymbol{r},\omega) = \psi^{\pm}(\boldsymbol{\rho})e^{\pm ik(\omega)z}$$

Vi ser att vågtalet för vågutbredningen i $\pm z$-riktningen är detsamma som vågtalet för materialet, $k(\omega)$. Detta innebär att vågen utbreder sig med samma fashastighet som en planvåg i material utan vågledare. Det finns ingen gränsfrekvens för en TEM-mod, vilket innebär att alla frekvenser utbreder sig utan dämpning (förlustfria material). Vidare gäller att funktionen $\psi(\boldsymbol{\rho})$ ej beror på vinkelfrekvensen ω, vilket kommer att framgå av vår fortsatta analys nedan. Från detta resultat kan vi sedan konstruera $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)$ och $\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega)$ genom (3.14) och (3.15). Resultatet är

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega) = -\nabla_T\psi^+(\boldsymbol{\rho})e^{ik(\omega)z} - \nabla_T\psi^-(\boldsymbol{\rho})e^{-ik(\omega)z} \\ \boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{r},\omega) = -\dfrac{k(\omega)}{\omega\mu_0\mu(\omega)}\hat{\boldsymbol{z}} \times \left(\nabla_T\psi^+(\boldsymbol{\rho})e^{ik(\omega)z} - \nabla_T\psi^-(\boldsymbol{\rho})e^{-ik(\omega)z}\right) \end{cases} \tag{3.16}$$

För att en TEM-mod skall existera i vågledaren krävs således att en icke-konstant lösning $\psi(\boldsymbol{\rho})$ existerar i vågledaren. Denna potential är lösning till ett elektrostatiskt problem i planet, vilket inses genom att $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$, dvs. med (3.15)

$$\nabla_T^2 \psi(\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{3.17}$$

tillsammans med randvillkoret att $\psi =$ konstant på varje sammanhängande del av kurvan Γ ($\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ dvs. $\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = 0$).

Detta elektrostatiska problem har endast en icketrivial lösning om området Ω är icke-enkelt sammanhängande, dvs. ett område som visas i t.ex. figur 3.2b. Vi ser också att lösningen ψ är oberoende av ω. Potentialen normeras enligt

$$\iint\limits_{\Omega} \nabla_T \psi(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla_T \psi(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = 1 \tag{3.18}$$

Jämför vi vågtalet för utbredning mellan TM- och TE-fallen med TEM-fallet, ser vi att TEM-fallet svarar mot det i TM- och TE-fallen förbjudna fallet $k_t = 0$.

3.4 Utvecklingsfunktioner i vågledaren

I avsnitt 3.2 och 3.3 konstruerade vi ett utvecklingssystem i vilket varje lösning till Maxwells fältekvationer i ett källfritt område kunde utvecklas. Detta utvecklingssystem är givet i ekvationerna (3.10) och (3.13), där $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_n(\boldsymbol{\rho})$ är lösningar till egenvärdesproblemen (3.4) och (3.5), samt för TEM-moderna (3.16). Dessa utvecklingssystem är beteckningsmässigt ganska komplicerade.

I detta avsnitt skall vi systematisera dessa lösningar bättre. Vi definierar därför nu en uppsättning vektorvärda utvecklingsfunktioner $\boldsymbol{E}^{\pm}_{n\nu}(\boldsymbol{r}, \omega)$, som kommer att vara lämpliga för analys av vågutbredningsproblem i vågledaren.

Utvecklingsmoderna för en TM-mod som propagerar i $\pm z$-led definieras som[3]

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^{\pm}_{n\nu}(\boldsymbol{r}, \omega) = \{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho}, \omega) \pm v_n(\boldsymbol{\rho})\hat{\boldsymbol{z}}\}\, e^{\pm ik_{zn}z} \\ \boldsymbol{H}^{\pm}_{n\nu}(\boldsymbol{r}, \omega) = \pm \boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho}, \omega) e^{\pm ik_{zn}z} \end{cases} \qquad \nu = \text{TM} \tag{3.19}$$

och för en TE-mod definierar vi på liknande sätt

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^{\pm}_{n\nu}(\boldsymbol{r}, \omega) = \boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho}, \omega) e^{\pm ik_{zn}z} \\ \boldsymbol{H}^{\pm}_{n\nu}(\boldsymbol{r}, \omega) = \left\{\pm \boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho}, \omega) + \eta_0^{-1} w_n(\boldsymbol{\rho})\hat{\boldsymbol{z}}\right\} e^{\pm ik_{zn}z} \end{cases} \qquad \nu = \text{TE} \tag{3.20}$$

I dessa uttryck är n modens index, medan indexet ν antar två värden, $\nu =$ TM,TE, vilket talar om huruvida moden är en TM-mod eller TE-mod. Sambandet mellan w_n, v_n och de transversella komponenterna $\boldsymbol{E}_{Tn\nu}$ och $\boldsymbol{H}_{Tn\nu}$ fås ur (2.7). Vi

[3]Notera att utvecklingsmoderna är normerade så att $\boldsymbol{E}_{n\nu}$ har dimensionen m^{-1} och $\boldsymbol{H}_{n\nu}$ har dimensionen $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$

har följande samband:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) = \dfrac{i}{k_{tn}^2} \begin{cases} k_{zn}(\omega)\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TM} \\ -\frac{\omega}{c_0}\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TE} \end{cases} \\
\eta_0 \boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) = \dfrac{i}{k_{tn}^2} \begin{cases} \frac{\omega}{c_0}\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TM} \\ k_{zn}(\omega)\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TE} \end{cases}
\end{cases}
\tag{3.21}
$$

Som vanligt är $v_n(\boldsymbol{\rho})$ respektive $w_n(\boldsymbol{\rho})$ lösningar till egenvärdesproblemen i ekvation (3.4) och (3.5). Vi har redan i avsnitt 3.2 påpekat att vi alltid kan välja egenfunktionerna $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_n(\boldsymbol{\rho})$ reella. Det är vidare alltid möjligt att välja normeringen på dessa egenfunktioner så att de är normerade och ortogonala (ortonormerade) vid integration över tvärsnittsarean Ω, se exempel 3.2, dvs.

$$
\begin{cases}
\displaystyle\iint_\Omega v_n(\boldsymbol{\rho}) v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = \delta_{n,n'} \\
\displaystyle\iint_\Omega w_n(\boldsymbol{\rho}) w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = \delta_{n,n'}
\end{cases}
\tag{3.22}
$$

där δ_{ij} är Kroneckers deltafunktion (för beteckningar, se Appendix D).

TEM-moden kan formellt definieras enligt samma mönster, men utan n-index, eftersom endast en mod av denna typ kan existera

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_\nu^\pm(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}_{T\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) e^{\pm ikz} \\
\boldsymbol{H}_\nu^\pm(\boldsymbol{r},\omega) = \pm \boldsymbol{H}_{T\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) e^{\pm ikz}
\end{cases}
\qquad \nu = \text{TEM}
\tag{3.23}
$$

För TEM-moden gäller, se (3.16)

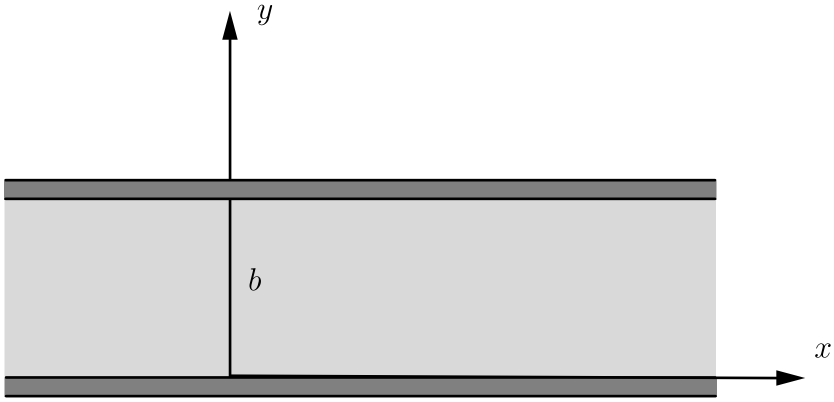
$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_{T\text{TEM}}(\boldsymbol{\rho},\omega) = -\nabla_T \psi(\boldsymbol{\rho},\omega) \\
\eta_0 \boldsymbol{H}_{T\text{TEM}}(\boldsymbol{\rho},\omega) = -\dfrac{k(\omega)c_0}{\omega\mu(\omega)} \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T \psi(\boldsymbol{\rho},\omega) = \eta(\omega)^{-1} \hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_{T\text{TEM}}(\boldsymbol{\rho},\omega)
\end{cases}
\tag{3.24}
$$

där $\psi(\boldsymbol{\rho},\omega)$ normeras enligt (3.18). Vi har här infört den relativa vågimpedansen för materialet

$$
\eta(\omega) = \sqrt{\frac{\mu(\omega)}{\epsilon(\omega)}}
$$

Dessa utvecklingsfunktioner utgör ett fullständigt utvecklingssystem för lösningar till Maxwells fältekvationer i ett källfritt område. En allmän lösning kan med dessa beteckningar mycket kortfattat skrivas

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(a_{n\nu}^+ \boldsymbol{E}_{n\nu}^+(\boldsymbol{r},\omega) + a_{n\nu}^- \boldsymbol{E}_{n\nu}^-(\boldsymbol{r},\omega) \right) \\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(a_{n\nu}^+ \boldsymbol{H}_{n\nu}^+(\boldsymbol{r},\omega) + a_{n\nu}^- \boldsymbol{H}_{n\nu}^-(\boldsymbol{r},\omega) \right)
\end{cases}
\quad
\begin{cases}
z \in [z_1, z_2] \\
\boldsymbol{\rho} \in \Omega
\end{cases}
\tag{3.25}
$$



Figur 3.5: Geometri för planvågledaren.

där summationen nu också sker över modindexet n och ν = TM,TE,TEM (för ν =TEM existerar inget n-index). Notera att genom utvecklingsmodernas konstruktion så är utvecklingskoefficienterna $a_{n\nu}^{\pm}$ desamma för både det elektriska och det magnetiska fältens utvecklingar. Utvecklingskoefficienterna $a_{n\nu}^{\pm}$ bestäms av källorna till fälten och detta problem behandlas i avsnitt 3.9. Generellt gäller att $a_{n\nu}^{+}$ bestäms av källor till vänster ($z < z_1$) om vårt aktuella område, medan $a_{n\nu}^{-}$ bestäms av källor till höger ($z > z_2$).

TEM-moden förekommer endast då vågledaren har icke enkelt sammanhängade randytor. Vanligtvis kommer vi inte att beakta TEM-moden i avsnitten nedan, utan ν-index löper endast över ν = TM,TE. I de fall TEM-moden förekommer får man lägga till den speciellt.

3.5 Exempel

Vi exemplifierar nu teorin som har framtagits i de tidigare avsnitten med att beräkna egenfunktionerna för några enkla geometrier. Det är värt att notera att dessa enkla geometrier är de vanligast förekommande geometrierna inom mikrovågstekniken.

3.5.1 Planvågledaren

Vi börjar med det enklaste fallet, som är den plana vågledaren. Geometrin för planvågledaren är given i figur 3.5.

Som grund till lösningen av detta problem ligger följande egenvärdesproblem i en dimension:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2Y(y)}{dy^2} + \gamma Y(y) = 0, \quad 0 \le y \le b \\ Y(y) = 0, \quad y = 0, b \end{cases}$$

	Egenfunktioner v_n, w_n, ψ	**Egenvärden** $k_{t\,n}^2$
TM_n	$v_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$	$\pi^2 \frac{n^2}{b^2}$
TE_n	$w_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$	$\pi^2 \frac{n^2}{b^2}$
TEM	$\nabla_T \psi = \sqrt{\frac{1}{b}} \hat{\boldsymbol{y}}$	0

Tabell 3.1: Tabell över normerade egenfunktioner till (3.4), (3.5) och (3.17) för planvågledaren, se figur 3.5 för definition av geometri. För heltalet n gäller att $n = 1, 2, 3, \ldots$.

och

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \gamma Y(y) = 0, \quad 0 \le y \le b \\ \dfrac{dY}{dy}(y) = 0, \quad y = 0, b \end{cases}$$

Lösningarna till dessa problem ges av

$$Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

respektive

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Egenvärdet i båda fallen är $\gamma = n^2\pi^2/b^2$. Dessa funktionssystem är fullständiga. Från dessa funktionssystem konstruerar vi våra funktioner v_n och w_n, som i detta fall endast beror på koordinaten y, eftersom x-koordinaten nu är jämställd med utbredningsriktningen $\pm\hat{\boldsymbol{z}}$. För TM-fallet får vi de normerade utvecklingsfunktionerna

$$v_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

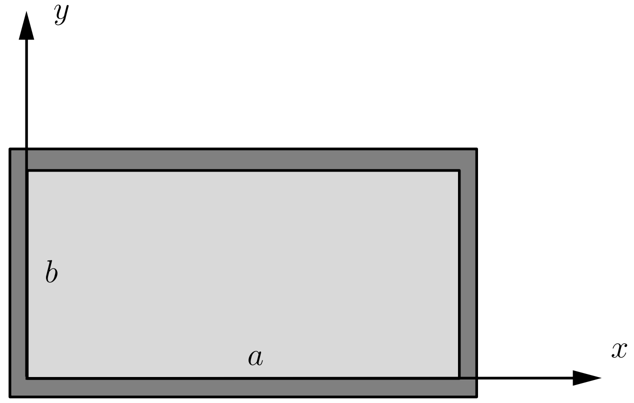
och i TE-fallet har vi

$$w_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

indexet $n = 0$ motsvarar ej någon TM-mod, som vi sett på sidan 46.

Den plana vågledaren har två separata begränsningsytor vilket är tillräckligt för existensen av en TEM-mod. För att undersöka TEM-moden studerar vi ekvation (3.17)

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 Y(y)}{dy^2} = 0, \quad 0 \le y \le b \\ Y(y) = \begin{cases} C_1, & y = 0 \\ C_2, & y = b \end{cases} \end{cases}$$



Figur 3.6: Geometri för vågledare med rektangulärt tvärsnitt.

Lösningen till detta problem är

$$Y(y) = C_1 + \frac{C_2 - C_1}{b} y$$

och TEM-moden blir den normerade utvecklingsfunktionen (se (3.16))

$$\nabla_T \psi(\boldsymbol{\rho}) = \sqrt{\frac{1}{b}} \hat{\boldsymbol{y}}$$

Resultaten finns samlade i tabell 3.1.

3.5.2 Vågledare med rektangulärt tvärsnitt

Vi fortsätter nu med att beräkna egenfuntionerna för en rektangulär vågledare. Geometrin visas i figur 3.6. Vi konstaterar genast att geometrin är sådan att någon TEM-mod inte kan existera. Vi använder konventionen att alltid lägga rektangelns längsta sida längs x-axeln.

Det egenvärdesproblem som vi skall lösa är givet av

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(\boldsymbol{\rho})}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v(\boldsymbol{\rho})}{\partial y^2} + k_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TM-fallet)}$$

och

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(\boldsymbol{\rho})}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w(\boldsymbol{\rho})}{\partial y^2} + k_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TE-fallet)}$$

Som grund till lösningen till detta problem ligger följande egenvärdesproblem i en dimension:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 X(x)}{dx^2} + \gamma X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq a \\ X(x) = 0, \quad x = 0, a \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\tilde{X}(x)}{dx^2} + \gamma\tilde{X}(x) = 0, \quad 0 \le x \le a \\ \dfrac{d\tilde{X}}{dx}(x) = 0, \quad x = 0, a \end{cases}$$

Lösningarna till dessa problem ges av

$$X_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

respektive

$$\tilde{X}_m(x) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Dessa funktionssystem är fullständiga på intervallet $x \in [0, a]$. Den fullständiga lösningen till egenvärdesproblemet för den rektangulära vågledaren fås genom en produkt av dessa endimensionella egenfunktionssystem[4], dvs.

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right), & \text{TM-fallet} \\ \\ \cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right), & \text{TE-fallet} \end{cases}$$

Egenvärdena är i båda fallen $\pi^2\,(m^2/a^2 + n^2/b^2)$. Normerar vi funktionerna får vi

$$\begin{cases} v_{mn} = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right), & \text{TM-fallet} \\ \\ w_{mn} = \sqrt{\dfrac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}}\cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right), & \text{TE-fallet} \end{cases}$$

där Neumann-faktorn är $\epsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$. Resultaten finns samlade i tabell 3.2.

Exempel 3.3
En rektangulär vågledare har dimensionerna 4.7 cm $\times$ 2.2 cm. Gränsfrekvenserna f_{cmn} för de olika moderna beräknas lätt mha. ekvation (3.12) och tabell 3.2. Det longitudinella vågtalet k_{zmn} ges av (3.9) vilket kan uttryckas i frekvensen f och gränsfrekvensen f_{cmn} på följande sätt

$$k_{zmn} = \frac{2\pi}{c_0}\sqrt{\epsilon\mu}\sqrt{f^2 - {f^2}_{cmn}}$$

Resultatet ges i tabell 3.3. ∎

	Egenfunktioner v_{mn}, w_{mn}	Egenvärden $k_{t\,mn}^2$
TM_{mn}	$v_{mn} = \dfrac{2}{\sqrt{ab}} \sin\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$	$\pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)$
TE_{mn}	$w_{mn} = \sqrt{\dfrac{\epsilon_m\epsilon_n}{ab}} \cos\left(\dfrac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\dfrac{n\pi y}{b}\right)$	$\pi^2\left(\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}\right)$

Tabell 3.2: Tabell över normerade egenfunktioner till (3.4) och (3.5) för vågledare med rektangulärt tvärsnitt, se figur 3.6 för definition av geometri. För heltalen m och n gäller att $m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, med undantag att m och n ej är noll för TM-moderna, och m och n ej **båda** är noll för TE-moderna ($\epsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$), se sidan 46. Konventionen i denna bok är att alltid välja x-axeln längs den längsta rektangelsidan, dvs. $a > b$. Moden med lägsta gränsfrekvens blir då TE_{10}.

m	1	2	0	1	2	3	3	4	0	1
n	0	0	1	1	1	0	1	0	2	2
f_{cmn} (GHz)	3.19	6.38	6.81	7.52	9.33	9.57	11.7	12.8	13.6	14.0
k_{zmn} $(\text{m}^{-1})^a$	43.3	$107i$	$119i$	$136i$	$179i$	$184i$	$233i$	$255i$	$274i$	$282i$
k_{zmn} $(\text{m}^{-1})^b$	144.6	86.6	70.6	22.6	$114i$	$122i$	$188i$	$215i$	$237i$	$246i$

[a]Frekvensen är $f = 3.8$ GHz.
[b]Frekvensen är $f = 7.6$ GHz.

Tabell 3.3: Tabell över de lägsta gränsfrekvenserna f_{cmn} och det longitudinella vågtalet k_{zmn} för en rektangulär vågledare med dimensioner 4.7 cm × 2.2 cm. De moder som har m- eller n-värde noll är enbart TE-moder. De övriga både TM- och TE-moder. Imaginärt värde på k_{zmn} anger att moden ej propagerar, och är ett mått på modens dämpning.

3.5.3 Vågledare med cirkulärt tvärsnitt

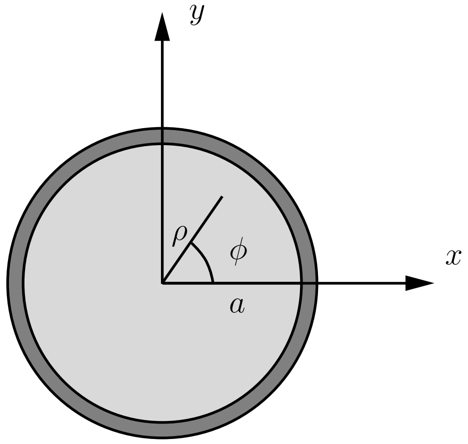
Den cirkulära vågledarens geometri visas i figur 3.7. Vi konstaterar genast att geometrin är sådan att TEM-moder saknas. Egenvärdesproblemen löser vi bäst i cylinder-(polära)koordinater. Problemen är givna av

$$\begin{cases} \nabla_T^2 v(\boldsymbol{\rho}) + k_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial v(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 v(\boldsymbol{\rho})}{\partial\phi^2} + k_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TM-fallet)}$$

[4]Ett vanligt sätt att bilda fullständiga funktionssystem i två dimensioner är att ta produkter av endimensionella fullständiga system, dvs. om $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ och $\{g_n(y)\}_{n=1}^{\infty}$ är fullständiga utvecklingssystem på intervallen $x \in [a, b]$ respektive $y \in [c, d]$, så är

$$\{f_m(x)g_n(y)\}_{m,n=1}^{\infty}$$

ett fullständigt funktionssystem i rektangeln $[a, b] \times [c, d]$.



Figur 3.7: Geometri för vågledare med cirkulärt tvärsnitt.

och

$$\begin{cases} \nabla_T^2 w(\boldsymbol{\rho}) + k_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial w(\boldsymbol{\rho})}{\partial\rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 w(\boldsymbol{\rho})}{\partial\phi^2} + k_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n}(\boldsymbol{\rho}) = 0 \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TE-fallet)}$$

Vi löser dessa egenvärdesproblem genom variabelseparation. Ansätt en funktion $v(\rho,\phi) = f(\rho)g(\phi)$ och sätt in i differentialekvationen. Vi får efter division med $f(\rho)g(\phi)/\rho^2$

$$\frac{\rho}{f(\rho)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\right) + k_t^2\rho^2 = -\frac{1}{g(\phi)}\frac{\partial^2 g(\phi)}{\partial\phi^2}$$

Högra ledet beror endast på ϕ medan det vänstra endast beror på ρ. Endast en konstant funktion kan uppfylla detta. Låt den konstanta funktionen vara γ. Vi får

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial f(\rho)}{\partial\rho}\right) + \left(k_t^2\rho^2 - \gamma\right) f(\rho) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 g(\phi)}{\partial\phi^2} + \gamma g(\phi) = 0 \end{cases}$$

Lösningen till egenvärdesproblemet i variabeln ϕ är

$$g(\phi) = \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}, \qquad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Här är endast heltalsvärden på m tillåtna eftersom funktionen måste vara periodisk i ϕ med period 2π, dvs. endast $\gamma = m^2$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ är möjliga. Detta utvecklingssystem är fullständigt på intervallet $\phi \in [0, 2\pi)$. I ρ-variabeln är lösningen en Besselfunktion, se appendix A. Endast en i $\rho = 0$ reguljär lösning är aktuell i vårt fall, dvs.

$$f(\rho) = J_m(k_t\rho)$$

	Egenfunktioner v_{mn}, w_{mn}	**Egenvärden** $k_{t\,mn}^2$
TM_{mn}	$v_{mn} = \dfrac{\sqrt{\epsilon_m} J_m(\xi_{mn}\rho/a)}{\sqrt{\pi} a J_m'(\xi_{mn})} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}$	$\dfrac{\xi_{mn}^2}{a^2}$
TE_{mn}	$w_{mn} = \dfrac{\sqrt{\epsilon_m} \eta_{mn} J_m(\eta_{mn}\rho/a)}{\sqrt{\pi\,(\eta_{mn}^2 - m^2)} a J_m(\eta_{mn})} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}$	$\dfrac{\eta_{mn}^2}{a^2}$

Tabell 3.4: Tabell över normerade egenfunktioner till (3.4) och (3.5) för vågledare med cirkulärt tvärsnitt, se figur 3.7 för definition av geometri. De första värdena på de positiva nollställena ξ_{mn} till $J_m(x)$ och de positiva nollställena η_{mn} till $J_m'(x)$, dvs. $J_m(\xi_{mn}) = 0$ och $J_m'(\eta_{mn}) = 0$, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ är listade i appendix A, tabellerna A.1 och A.2 ($\epsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$). Moden med lägsta gränsfrekvens är TE_{11}.

Randvillkoren $v_m(\rho = a) = 0$ och $\frac{dw_m}{d\rho}(\rho = a) = 0$ för TM- respektive TE-fallet ger ytterligare villkor. För att dessa randvillkor skall vara uppfyllda krävs att det transversella vågtalet uppfyller

$$k_t a = \begin{cases} \xi_{mn}, & \text{(TM-fallet)} \\ \eta_{mn}, & \text{(TE-fallet)} \end{cases}$$

där ξ_{mn} och η_{mn}, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är nollställen till Besselfunktionen $J_m(x)$ respektive dess derivata $J_m'(x)$, dvs. $J_m(\xi_{mn}) = 0$ och $J_m'(\eta_{mn}) = 0$. I appendix A ges numeriska värden på de första av dessa nollställen.

Funktionssystemen $\{J_m(\xi_{mn}\rho/a)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{J_m'(\eta_{mn}\rho/a)\}_{n=1}^{\infty}$ är båda fullständiga på intervallet $\rho \in [0, a]$ för varje värde på m. Vi får därför, på liknande sätt som för den rektangulära vågledaren, att det fullständiga utvecklingsfunktionerna i cirkeln ges av produkten av de fullständiga funktionssystemen i ϕ- och ρ-led. Resultatet av de normerade funktionerna (normeringsintegraler, se appendix A) är

$$\begin{cases} v_{mn} = \dfrac{\sqrt{\epsilon_m} J_m(\xi_{mn}\rho/a)}{\sqrt{\pi} a J_m'(\xi_{mn})} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}, & \text{TM-fallet} \\ w_{mn} = \dfrac{\sqrt{\epsilon_m} \eta_{mn} J_m(\eta_{mn}\rho/a)}{\sqrt{\pi\,(\eta_{mn}^2 - m^2)} a J_m(\eta_{mn})} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix}, & \text{TE-fallet} \end{cases}$$

där $\epsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$. Resultaten finns samlade i tabell 3.4.

3.6 Normeringsintegraler

Egenfunktionerna $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_n(\boldsymbol{\rho})$ antar vi är reella funktioner som är normerade enligt (3.22), dvs.

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Omega} v_n(\boldsymbol{\rho}) v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = \delta_{n,n'} \\ \iint\limits_{\Omega} w_n(\boldsymbol{\rho}) w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = \delta_{n,n'} \end{cases}$$

Med hjälp av sambandet $\nabla \cdot (g\nabla f) = g(\nabla^2 f) + \nabla g \cdot \nabla f$ och av Gauss sats (i planet) kan vi också utföra följande beräkningar

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} \nabla_T g(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla_T f(\boldsymbol{\rho})\, dxdy &= -\iint\limits_{\Omega} g(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T^2 f(\boldsymbol{\rho})\, dxdy \\ &+ \int\limits_{\Gamma} g(\boldsymbol{\rho}) \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_T f(\boldsymbol{\rho})\, dl \end{aligned} \tag{3.26}$$

där dl är längdmåttet på tvärsnittets randkurva Γ.

Väljer vi nu i (3.26) funktionerna $f(\boldsymbol{\rho})$ och $g(\boldsymbol{\rho})$ som egenfunktioner till TM-fallet, dvs. $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $v_{n'}(\boldsymbol{\rho})$, blir kurvintegralen noll pga. att $v_n(\boldsymbol{\rho}) = 0$ på tvärsnittets randkurva Γ. Vi får

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} \nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy &= -\iint\limits_{\Omega} v_n(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T^2 v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy \\ &= k_{tn'}^2 \iint\limits_{\Omega} v_n(\boldsymbol{\rho}) v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = k_{tn}^2 \delta_{n,n'} \end{aligned} \tag{3.27}$$

där vi använt (3.4) och (3.22).

Väljer vi istället $f(\boldsymbol{\rho})$ och $g(\boldsymbol{\rho})$ som egenfunktioner till TE-fallet, dvs. $w_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_{n'}(\boldsymbol{\rho})$ i (3.26), blir kurvintegralen även denna gång noll pga. att $\frac{\partial}{\partial n} w_n(\boldsymbol{\rho}) = 0$ på tvärsnittets randkurva Γ. Vi får

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Omega} \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy &= -\iint\limits_{\Omega} w_n(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T^2 w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy \\ &= k_{tn'}^2 \iint\limits_{\Omega} w_n(\boldsymbol{\rho}) w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = k_{tn}^2 \delta_{n,n'} \end{aligned} \tag{3.28}$$

där vi använt (3.5) och (3.22). Vi ser att även gradienterna av egenfunktionerna är ortogonala, men de är ej normerade.

Ytterligare fyra olika kombinationer av integraler kommer att vara av intresse i senare avsnitt.

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \times \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\}\, dxdy \\ \iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})) \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}))\}\, dxdy \end{cases} \tag{3.29}$$

och

$$\begin{cases} \iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}))\} \, dxdy \\ \iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})) \times \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\} \, dxdy \end{cases} \tag{3.30}$$

Den första integralen i (3.29) skriver vi om mha. räknereglerna för nabla-operatorn och Stokes sats (normalvektorn till tvärsnittsarean Ω är $\hat{\boldsymbol{z}}$).

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \times \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\} \, dxdy = \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \iint\limits_{\Omega} \nabla_T \times (v_n(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})) \, dxdy \\ &= \iint\limits_{\Omega} \nabla \times (v_n(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, dxdy = \int\limits_{\Gamma} (v_n(\boldsymbol{\rho}) \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})) \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \end{aligned}$$

eftersom $v_n(\boldsymbol{\rho}) = 0$ på tvärsnittsytans randkurva Γ. Linjeelementet $d\boldsymbol{r} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{n}} dl = \hat{\boldsymbol{\tau}} dl$. På samma sätt visar vi att den andra integralen i (3.29) är noll genom att använda $(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}\,((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c})$ och utnyttja den första integralen

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})) \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}))\} \, dxdy \\ &= \iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}) \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\} \, dxdy = 0 \end{aligned}$$

Integralerna i (3.30) förenklar vi mha. BAC-CAB-regeln.

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}))\} \, dxdy \\ &= \iint\limits_{\Omega} \nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}) \, dxdy \\ &\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})) \times \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\} \, dxdy \\ &= -\iint\limits_{\Omega} \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho}) \, dxdy \end{aligned}$$

Vi använder oss nu av ortogonalitetsintegralerna (3.27) och (3.28). Integralerna i

(3.29) och (3.30) kan vi sammanfatta i

$$
\begin{cases}
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \times \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\}\, dxdy = 0 \\
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})) \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}))\}\, dxdy = 0 \\
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}) \times (\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_{n'}(\boldsymbol{\rho}))\}\, dxdy = k_{tn}^2 \delta_{n,n'} \\
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})) \times \nabla_T w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\}\, dxdy = -k_{tn}^2 \delta_{n,n'}
\end{cases}
\tag{3.31}
$$

Integralerna i (3.31) kan nu användas för att beräkna följande normalytintegraler:

$$
\begin{cases}
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) \times \boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}^*(\boldsymbol{\rho},\omega)\}\, dxdy \\
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) \times \boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}(\boldsymbol{\rho},\omega)\}\, dxdy
\end{cases}
$$

Den första av dessa integraler kommer att användas i avsnitt 3.7, medan den andra kommer att vara användbar i avsnitt 3.9. Med hjälp av definitionen på $\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)$ och $\boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)$ i (3.21) finner vi lätt mha. (3.31) att

$$
\begin{cases}
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) \times \boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}^*(\boldsymbol{\rho},\omega)\}\, dxdy = \dfrac{1}{\eta_0} Y_{n\nu}^E \delta_{n,n'}\delta_{\nu,\nu'} \\
\iint\limits_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) \times \boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}(\boldsymbol{\rho},\omega)\}\, dxdy = -\dfrac{1}{\eta_0} Y_{n\nu} \delta_{n,n'}\delta_{\nu,\nu'}
\end{cases}
\tag{3.32}
$$

Vi har här infört de relativa modadmittanserna $Y_{n\nu}^E$ och $Y_{n\nu}$, vilka är de enhetslösa storheterna

$$
Y_{n\nu}^E = \begin{cases}
\dfrac{\omega}{c_0 k_{tn}^2} \begin{cases} k_{zn}(\omega)\epsilon^*(\omega), & \nu = \mathrm{TM} \\ k_{zn}^*(\omega)\mu(\omega), & \nu = \mathrm{TE} \end{cases} \\
\left(\dfrac{\epsilon^*(\omega)}{\mu^*(\omega)}\right)^{1/2}, \qquad \nu = \mathrm{TEM}
\end{cases}
\qquad
Y_{n\nu} = \begin{cases}
\dfrac{\omega k_{zn}(\omega)}{c_0 k_{tn}^2} \begin{cases} \epsilon(\omega), & \nu = \mathrm{TM} \\ \mu(\omega), & \nu = \mathrm{TE} \end{cases} \\
\left(\dfrac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}\right)^{1/2}, \qquad \nu = \mathrm{TEM}
\end{cases}
\tag{3.33}
$$

Notera att k_{tn}^2 alltid är en reell storhet, medan k_{zn} inte nödvändigtvis är reell. För propagerande moder i förlustfria material är dessa admittanser lika.

3.7 Effektflödestäthet

Poyntings vektor ger det elektromagnetiska fältets effektflödestäthet (se (1.23) på sidan 14)

$$
<\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r},\omega)\}
$$

Vi är speciellt intresserade av z-komponenten av denna storhet eftersom den anger tidsmedelvärdet av effekten per ytenhet som transporteras i z-riktningen

$$\hat{\boldsymbol{z}}\cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega) = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot \operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)\times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r},\omega)\right\}$$

Vi inför uppdelningen av vektorfälten i longitudinell respektive transversell del enligt avsnitt 2.1.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega) &= \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot \operatorname{Re}\left\{(\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)+\hat{\boldsymbol{z}}E_z(\boldsymbol{r},\omega))\times(\boldsymbol{H}_T^*(\boldsymbol{r},\omega)+\hat{\boldsymbol{z}}H_z^*(\boldsymbol{r},\omega))\right\}\\ &= \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot \operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{r},\omega)\times \boldsymbol{H}_T^*(\boldsymbol{r},\omega)\right\}\end{aligned}$$

Vi använder nu den allmänna lösningen till vårt vågledarproblem, som ges av (3.25), samt (3.19) och (3.20), för att skriva om effekttransporten i z-riktningen. Vi får

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega) = \sum_{\substack{n,n'\\ \nu,\nu'=\text{TM,TE,TEM}}} \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{z}}\cdot \operatorname{Re}\Big\{&\left(a_{n\nu}^{+}\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{ik_{zn}z}+a_{n\nu}^{-}\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{-ik_{zn}z}\right)\\ &\times\left(a_{n'\nu'}^{+*}\boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}^{*}(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{-ik_{zn'}^{*}z}-a_{n'\nu'}^{-*}\boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}^{*}(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{ik_{zn'}^{*}z}\right)\Big\}\end{aligned}$$

Tidsmedelvärdet av den totala effekten som transporteras genom ett godtyckligt tvärsnitt z är

$$\iint_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}}\cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega)\,dxdy$$

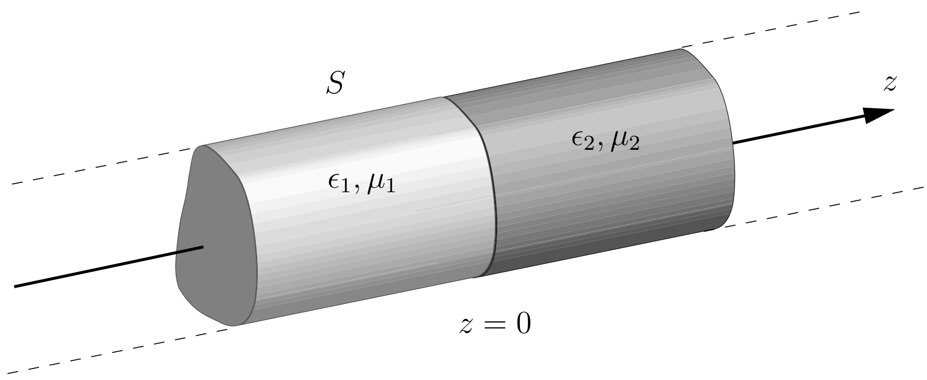
I denna ytintegral över tvärsnittet förekommer den integral som återfinns i (3.32). Integrationen över tvärsnittet Ω av Poyntings vektor medför att alla produkttermer mellan v_n och w_n försvinner. Effekttransporten i vågledaren blir

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}}\cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega)\,dxdy &= \operatorname{Re}\sum_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}}\frac{1}{2\eta_0}Y_{n\nu}^{E}\Big\{\left|a_{n\nu}^{+}\right|^2 e^{i(k_{zn}-k_{zn}^*)z}-\left|a_{n\nu}^{-}\right|^2 e^{-i(k_{zn}-k_{zn}^*)z}\\ &\qquad + a_{n\nu}^{-}a_{n\nu}^{+*}e^{-i(k_{zn}+k_{zn}^*)z}-a_{n\nu}^{+}a_{n\nu}^{-*}e^{i(k_{zn}+k_{zn}^*)z}\Big\}\\ &= \operatorname{Re}\sum_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}}\frac{1}{2\eta_0}Y_{n\nu}^{E}\Big\{\left|a_{n\nu}^{+}\right|^2 e^{-2\operatorname{Im}k_{zn}z}-\left|a_{n\nu}^{-}\right|^2 e^{2\operatorname{Im}k_{zn}z}+2i\operatorname{Im}\left(a_{n\nu}^{-}a_{n\nu}^{+*}e^{-2i\operatorname{Re}k_{zn}z}\right)\Big\}\end{aligned}$$

där modadmittansen för effekten, $Y_{n\nu}^{E}$, ges av (3.33). Detta uttryck är allmänt. Förutom de termer som uttrycker effekttransporten i $+z$- och $-z$-led, $|a_{n\nu}^{+}|^2$ respektive $|a_{n\nu}^{-}|^2$, så innehåller uttrycket även växelverkanstermer (stående vågfenomen) pga. att vågor propagerar i båda riktningarna.

Vi specialiserar oss till det förlustfria fallet, dvs. med $\epsilon(\omega)$ och $\mu(\omega)$ reella, och vågpropagation i endast en riktning. Uttrycket förenklas då till

$$\iint_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}}\cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega)\,dxdy = \sum_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE}}}\frac{1}{2\eta_0}\operatorname{Re}Y_{n\nu}^{E}\left|a_{n\nu}^{+}\right|^2 e^{-2\operatorname{Im}k_{zn}z} \tag{3.34}$$



Figur 3.8: Reflektion och transmission i en vågledare fylld med två isotropa material, vars materialparametrar är ϵ_1, μ_1 och ϵ_2, μ_2.

för vågen som propagerar i $+z$-riktningen och

$$\iint_\Omega \hat{\boldsymbol{z}} \cdot < \boldsymbol{S}(t) > (\boldsymbol{r}, \omega)\, dxdy = -\sum_{\substack{n \\ \nu=\mathrm{TM,TE}}} \frac{1}{2\eta_0} \operatorname{Re} Y_{n\nu}^E \left| a_{n\nu}^- \right|^2 e^{2 \operatorname{Im} k_{zn} z}$$

för vågen som propagerar i $-z$-riktningen. Dessa summor är ändliga, pga. att k_{zn} — och därmed $Y_{n\nu}^E$ — är rent imaginär för termer där $f < f_{cn}$ eller ekvivalent $k_{tn} > k(\omega)$.

Varje propagerande mod fortplantar sig odämpat till stora z-värden, medan de moder vars gränsfrekvens är högre än vågens frekvens, dvs. icke-propagerande moder, dämpas exponentiellt. Dämpningen hos de icke-propagerande moderna bestäms av imaginärdelen av det longitudinella vågtalet. Dämpningskoefficienten α_n för effekten, definieras av

$$\alpha_n = 2 \operatorname{Im} k_{zn} = 2\sqrt{k_{tn}^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon(\omega)\mu(\omega)} = \frac{4\pi}{c_0}\sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}\sqrt{f_{cn}^2 - f^2}$$

för frekvenser under gränsfrekvensen, $f < f_{cn}$.

Exempel 3.4

I en mikrovågsugn finns en perforerad plåt i luckan, som släpper igenom ljus men blockerar mikrovågor effektivt. Plåten är tunn, men för ljusvåglängder blir hålen en lång cirkulär vågledare. Om vi antar att hålen i plåten har en radie 0.5 mm blir den lägsta gränsfrekvensen $f_{c\mathrm{TE}_{11}} = 1.841 c_0/2\pi a = 1.76 \cdot 10^{11}$ Hz, se tabell 3.4. Normala frekvenser för synligt ljus ligger långt över denna gränsfrekvens och har därför inga problem att propagera genom hålen. För mikrovågor, $f = 2.45$ GHz är situationen annorlunda. Dämpningen av effekten vid denna frekvens blir $\alpha_{\mathrm{TE}_{11}} = \frac{4\pi}{c_0}\sqrt{f_{cn}^2 - f^2} = 7363\ \mathrm{m}^{-1}$. Med en plåttjocklek på 0.5 mm svarar detta mot en dämpning på 16 dB av mikrovågorna. ∎

Exempel 3.5

Källor i området $z < 0$ genererar en mod. Området $z < 0$ antas vara fyllt med ett förlustfritt material, som är parametriserat av ϵ_1 och μ_1, medan området $z > 0$ är fyllt med ett förlustfritt material, som beskrivs av ϵ_2 och μ_2, se figur 3.8. Beräkna reflektionen och transmissionen i vågledaren.

Vi betecknar de av källorna genererade elektriska och magnetiska fälten $\boldsymbol{E}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega)$ respektive $\boldsymbol{H}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega)$. Eftersom materialparametrarna förändras i planet $z=0$ kommer vi i område $z<0$ få en reflekterad våg. De elektriska och magnetiska fälten i området $z<0$ ansätter vi som, se (3.25) (normering är sådan att $a^+_{n\nu}=1$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) + \displaystyle\sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} r_{n'\nu'}\boldsymbol{E}^-_{n'\nu'}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{H}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) + \displaystyle\sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} r_{n'\nu'}\boldsymbol{H}^-_{n'\nu'}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \qquad z\leq 0$$

där ϵ och μ har värdena ϵ_1 respektive μ_1.

En allmän ansats av fälten i området $z>0$ blir

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} t_{n'\nu'}\boldsymbol{E}^+_{n'\nu'}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} t_{n'\nu'}\boldsymbol{H}^+_{n'\nu'}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \qquad z\geq 0$$

där ϵ och μ har värdena ϵ_2 respektive μ_2, men pga. randvillkoren (kontinuitet av de transversella komponenterna hos $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$) samt ortogonalitetsrelationerna (3.31) kopplar det från källorna infallande fältet endast till samma mod, $n\nu$, i området $z>0$. Fälten i området $z<0$ blir

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) + r_{n\nu}\boldsymbol{E}^-_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{H}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) + r_{n\nu}\boldsymbol{H}^-_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \qquad z\leq 0$$

medan fälten i området $z>0$ blir

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega) = t_{n\nu}\boldsymbol{E}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega) = t_{n\nu}\boldsymbol{H}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \qquad z\geq 0$$

Randvillkoren på gränsytan $z=0$ ger nu (se (3.21), (3.19) och (3.20))

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}(1+r_{n\nu}) = t_{n\nu}\left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} \\ (1-r_{n\nu})\,\epsilon_1(\omega) = t_{n\nu}\epsilon_2(\omega) \end{cases} \qquad \nu=\text{TM}$$

och

$$\begin{cases} (1+r_{n\nu})\,\mu_1(\omega) = t_{n\nu}\mu_2(\omega) \\ \left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}(1-r_{n\nu}) = t_{n\nu}\left(\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} \end{cases} \qquad \nu=\text{TE}$$

Notera att det transversella vågtalet k_{tn} och basfunktionerna $v_n(\boldsymbol{\rho})$ och $w_n(\boldsymbol{\rho})$ är identiska i de två områdena $z < 0$ och $z > 0$. Lösningen till dessa ekvationer är

$$\begin{cases} r_{n\nu} = \dfrac{\epsilon_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} - \epsilon_2(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}}{\epsilon_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} + \epsilon_2(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}} \\ t_{n\nu} = \dfrac{2\epsilon_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}}{\epsilon_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} + \epsilon_2(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}} \end{cases} \qquad \nu = \text{TM}$$

och

$$\begin{cases} r_{n\nu} = \dfrac{\mu_2(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} - \mu_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}}{\mu_2(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} + \mu_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}} \\ t_{n\nu} = \dfrac{2\mu_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}}{\mu_2(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_1(\omega)\mu_1(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2} + \mu_1(\omega)\left(\frac{\omega^2}{c_0^2}\epsilon_2(\omega)\mu_2(\omega) - k_{tn}^2\right)^{1/2}} \end{cases} \qquad \nu = \text{TE}$$

∎

3.8 Förluster i väggar

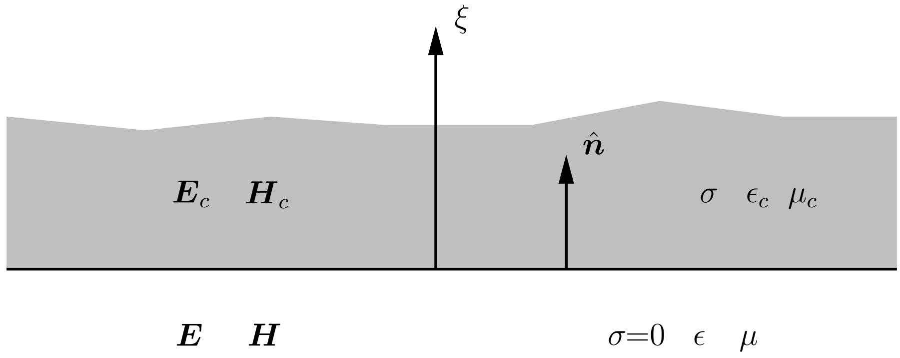
I den inledande teorin för hålrumsvågledare så antogs väggarna vara perfekt ledande. En vågledarmod vars gränsfrekvens ligger under svängningsfrekvensen kommer då inte att dämpas i en vågledare som innehåller ett förlustfritt material, utan propagerar till stora $|z|$-värden. I detta avsnitt behandlas en mer realistisk modell där väggarnas ledningsförmåga antas vara mycket stor men inte oändlig. Genom lämpliga approximationer kan man generalisera teorin för perfekt ledande väggar och få fram enkla uttryck för dämpningen av propagerande moder. Approximationerna kommer, som vi kommer att se, att gälla för frekvenser som inte ligger nära modens gränsfrekvens.

Vi börjar med att betrakta infall av plana vågor mot en metallyta som lokalt kan antas vara plan. Metallen har permittiviteten ϵ_c, permeabiliteten μ_c och ledningsförmågan σ vilken, för vågor i mikrovågsområdet, antas uppfylla villkoret för en god ledare

$$\sigma >> \omega\epsilon_0\epsilon_c$$

med god marginal. Vi betecknar fälten i metallen med $\boldsymbol{E}_c$, $\boldsymbol{D}_c$, $\boldsymbol{B}_c$ och $\boldsymbol{H}_c$ medan motsvarande fält utanför metallytan inte har något index. Vi låter $\hat{\boldsymbol{n}}$ vara den utåtriktade normalen från ytan och inför koordinaten ξ vars axel är riktad i $\hat{\boldsymbol{n}}$-riktningen, se figur 3.9. Randvillkoren vid ytan ges av (se (1.12) på sidan 7)

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_c \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_c \end{aligned}$$



Figur 3.9: Geometri för vågledare med förluster.

dvs tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ är kontinuerliga. Vi antar här att inga ytströmmar finns, vilket är rimligt, se fotnot 10 på sidan 8.

Vågtalet $k(\omega)$ för metallytan är

$$k(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\mu_c}}{c_0}\left(\epsilon_c + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)^{1/2}$$

där metallens ledningsförmåga σ behandlas separat i dielektricitetsfunktionen, se sidan 20, för att tydligt se dess effekter. Materialparametern ϵ_c antas vara reell liksom μ_c. Vi bryter ut en faktor ϵ_c och utnyttjar approximationen $\sigma >> \omega\epsilon_0\epsilon_c$. Vi får

$$k(\omega) = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_c\mu_c}}{c_0}\left(1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_c\epsilon_0}\right)^{1/2} \approx \frac{\omega\sqrt{\epsilon_c\mu_c}}{c_0}\left(i\frac{\sigma}{\omega\epsilon_c\epsilon_0}\right)^{1/2} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\sigma\mu_0\mu_c\omega}$$

eftersom $(i)^{1/2} = (1+i)/\sqrt{2}$. En planvåg med funktionsberoendet $\exp ik\xi$ blir

$$e^{ik\xi} = e^{i\xi/\delta}e^{-\xi/\delta}$$

där

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\mu_c\sigma}} \tag{3.35}$$

Storheten δ kallas materialets inträngningsdjup och är det karakteristiska djup på vilket fältstyrkan avtagit med en faktor e^{-1}.

I mikrovågsområdet gäller att inträngningsdjupet är mycket mindre än vågledarens dimensioner, se tabell 3.5. I väggarna är därmed ξ-derivatan av fälten mycket större än derivatorna i tangentiell led och vi kan försumma de tangentiella derivatorna i metallen enligt

$$\nabla \simeq \hat{\boldsymbol{n}}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{3.36}$$

Eftersom normalkomponenten av $\boldsymbol{H}$ vid en perfekt ledande yta är noll, antar vi att normalkomponenten av $\boldsymbol{H}_c$ är försumbar jämfört med dess tangentialkomponent. Det magnetiska fältet i metallen nära ytan har således endast en komponent längs

Material	σ (S/m)	$f=50$ (Hz)	$f=1$ (MHz)	$f=1$ (GHz)
Silver	$6.30\cdot10^7$	8.97 (mm)	0.063 (mm)	0.0020 (mm)
Koppar	$5.96\cdot10^7$	9.22	0.065	0.0021
Guld	$4.52\cdot10^7$	10.6	0.075	0.0024
Aluminium	$3.78\cdot10^7$	11.6	0.082	0.0026
Järn ($\mu=10^3$)	$1.04\cdot10^7$	0.70	0.005	0.00016
Sötvatten	0.001	2250 (m)	†[a]	†[a]
Saltvatten	4	35.6	0.25 (m)	†[a]

[a]Vid denna frekvens gäller ej approximationen $\sigma >> \omega\epsilon_0\epsilon$. Vid dessa frekvenser är $\epsilon\approx 80$.

Tabell 3.5: Tabell över inträngningsdjupet δ i olika material vid olika frekvenser. Metallernas ledningsförmåga gäller vid 20° C. Värdena för söt- och saltvatten är endast approximativa.

tangentialvektorn $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ och en längs $\hat{\boldsymbol{z}}$-riktningen. Vi skall strax se att detta följer ur approximationen (3.36).

Utnyttjar vi approximationen (3.36) förenklas Maxwells fältekvationer i metallen till

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}_c = -\dfrac{i}{\omega\mu_0\mu_c}\hat{\boldsymbol{n}}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{E}_c}{\partial\xi} \\ \boldsymbol{E}_c = \dfrac{1}{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{H}_c}{\partial\xi} \end{cases} \tag{3.37}$$

Notera att förskjutningsströmmen $-i\omega\epsilon_0\epsilon_c\boldsymbol{E}_c$ är försumbar jämfört med strömtätheten $\sigma\boldsymbol{E}_c$ i Ampères lag, eftersom $\sigma >> \omega\epsilon_0\epsilon_c$. Vi eliminerar det elektriska fältet ur ekvationerna genom att operera med $\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial}{\partial\xi}$ på nedre ekvationen i (3.37)

$$\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial \boldsymbol{E}_c}{\partial\xi} = \frac{1}{\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}\times\left(\hat{\boldsymbol{n}}\times\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2}\right) - \frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2}\right)$$

Insättning i Faradays lag ger

$$\boldsymbol{H}_c = -\frac{i}{\omega\sigma\mu_0\mu_c}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\left(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2}\right) - \frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2}\right)$$

Genom att ta normalkomponenten av denna ekvation ser vi att $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}_c=0$, vilket vi redan förutspått. Eftersom $\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{H}_c)=0$ fås ekvationen

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{H}_c}{\partial\xi^2} + i\omega\mu_0\mu_c\sigma\boldsymbol{H}_c = 0$$

med lösningen

$$\boldsymbol{H}_c = \boldsymbol{H}_{\parallel}e^{-\xi/\delta}e^{i\xi/\delta} \tag{3.38}$$

där δ är inträngningsdjupet i metallen, (3.35), och $\boldsymbol{H}_{\parallel}$ är magnetfältets tangentialkomponent vid ytan vilken i allmänhet har en komponent längs tangentialvektorn

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$ och en längs $\hat{\boldsymbol{z}}$-riktningen. Tangentialkomponenternas värden är desamma som för en perfekt ledande yta, under de approximationer vi gjort i detta avsnitt. Motsvarande elektriska fält fås genom insättning av (3.38) i Ampères lag i ekvation (3.37).

$$\boldsymbol{E}_c \simeq \frac{i-1}{\sigma\delta}\left(\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_{\|}\right) e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta}$$

Vi kan nu bestämma de ohmska förlusterna i metallen. Tidsmedelvärdet av effektförlusten per volymsenhet i metallen ges av (se (1.23) på sidan 14)

$$p = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_c^*\} = \frac{\sigma}{2}\boldsymbol{E}_c \cdot \boldsymbol{E}_c^* = \frac{1}{\sigma\delta^2}|\boldsymbol{H}_{\|}|^2 e^{-2\xi/\delta}$$

För att få effektförlusten per ytenhet integrerar vi detta uttryck i ξ-led.

$$\frac{dP}{da} = \int_0^\infty p(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\sigma\delta}|\boldsymbol{H}_{\|}|^2 = \frac{1}{2}R_s|\boldsymbol{H}_{\|}|^2 \tag{3.39}$$

där vi infört $R_s = 1/\sigma\delta$ =ytresistansen. Eftersom $\boldsymbol{H}_{\|}$ i vår approximation antas vara densamma som för en perfekt ledande yta kan vi relatera $\boldsymbol{H}_{\|}$ till ytströmtätheten på en perfekt ledande yta

$$\boldsymbol{H}_{\|} = -\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{J}_S$$

och därmed

$$\frac{dP}{da} = \frac{1}{2}R_s|\boldsymbol{J}_S|^2 \tag{3.40}$$

Vi övergår nu till att studera dämpningen av moder i en vågledare, och väljer att studera en mod i taget. För enkelhets skull antar vi att vågledaren är fylld med ett förlustfritt material med materialparametrar ϵ och μ. I en första ordningens approximation får vi en dämpning av moden pga. förlusterna i väggarna. Frekvensen för vågen antas ligga över modens gränsfrekvens, dvs. k_{zn} är reell. Vi antar en i positiv z-led propagerande mod i en vågledare vars väggar är goda men inte perfekta ledare, dvs. med ändlig ledningsförmåga σ. Modens E_z respektive H_z komponent ges av

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r}) = a_n^+ v_n(\boldsymbol{\rho}) e^{ik_{zn}z} & \text{TM-mod} \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r}) = b_n^+ w_n(\boldsymbol{\rho}) e^{ik_{zn}z} & \text{TE-mod} \end{cases}$$

där egenfunktionerna v_n och w_n är normerade enligt (3.22). Motsvarande tangentialkomponenter av det magnetiska fältet ges av (3.13)

$$\eta_0^2|\boldsymbol{H}_{\|T}|^2 = \begin{cases} |a_n^+|^2 \left(\dfrac{\omega\epsilon}{c_0 k_{tn}^2}\right)^2 |\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n|^2, & \text{TM-mod} \\ |b_n^+|^2 \dfrac{k_{zn}^2}{k_{tn}^4}|\nabla_T w_n|^2, & \text{TE-mod} \end{cases}$$

Det totala magnetiska fältet på metallytan fås således genom

$$\eta_0^2|\boldsymbol{H}_{\|}|^2 = \eta_0^2|\boldsymbol{H}_{\|T}|^2 + \eta_0^2|H_z|^2 = \begin{cases} |a_n^+|^2 \left(\dfrac{\omega\epsilon}{c_0 k_{tn}^2}\right)^2 |\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n|^2, & \text{TM-mod} \\ |b_n^+|^2 \left(\dfrac{k_{zn}^2}{k_{tn}^4}|\nabla_T w_n|^2 + |w_n|^2\right), & \text{TE-mod} \end{cases} \tag{3.41}$$

Vi har tidigare sett, se (3.34), att tidsmedelvärdet av effektflödet, P, i en förlustfri vågledare med perfekt ledande väggar ges av

$$P = \iint_{\Omega} \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \, dxdy = \begin{cases} |a_n^+|^2 \dfrac{\epsilon_0 \omega k_{zn}}{2k_{tn}^2} \epsilon, & \text{TM-mod} \\ |b_n^+|^2 \dfrac{\epsilon_0 \omega k_{zn}}{2k_{tn}^2} \mu, & \text{TE-mod} \end{cases} \tag{3.42}$$

Effektflödet är alltså i fallet med perfekt ledande väggar oberoende av z och moden dämpas inte. I fallet med ej perfekt ledande väggar förlorar moden energi när den propagerar pga. förlusterna i väggarna. Därmed kommer P, genom amplituderna a_n^+ och b_n^+, att vara avtagande funktioner av z. På en sträcka dz av vågledaren förändras modens effekt med

$$dP = -dz \oint_{\Gamma} \frac{dP}{da} \, dl$$

Vi kan uttrycka dP/da i koefficienterna a_n^+ och b_n^+ genom att utnyttja ekvationerna (3.39) och (3.41). Ur ekvationen (3.42) kan a_n^+ och b_n^+ elimineras. Därmed fås följande ekvation för effektflödet

$$\frac{dP}{dz} = -\alpha_p P$$

med lösningen

$$P(z) = P(0) e^{-\alpha_p z}$$

där

$$\alpha_p = \begin{cases} \dfrac{\omega \epsilon \epsilon_0}{\sigma \delta k_{tn}^2 k_{zn}} \displaystyle\oint_{\Gamma} |\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n|^2 \, dl, & \text{TM-mod} \\ \dfrac{k_{tn}^2}{\omega \sigma \delta \mu_0 \mu k_{zn}} \displaystyle\oint_{\Gamma} \left(\frac{k_{zn}^2}{k_{tn}^4} |\nabla_T w_n|^2 + |w_n|^2 \right) dl, & \text{TE-mod} \end{cases}$$

Dessa uttryck ger dämpningen i en vågledare vars väggar är goda, men ej perfekt, ledande.

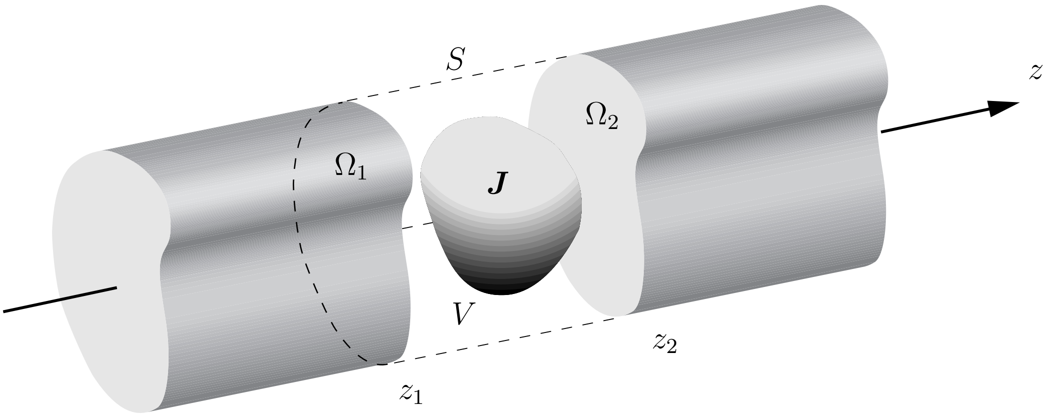
3.9 Källor i vågledare

I detta avsnitt skall vi bestämma fälten som genereras av en given strömtäthet i en vågledare. Vi antar därför en hålrumsvågledare med konstant tvärsnittsyta och perfekt ledande ytor. I en ändlig volym V som begränsas av tvärsnittsytorna Ω_1 och Ω_2, se figur 3.10, finns en given tidsharmonisk strömtäthet

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, \omega) e^{-i\omega t}\}$$

Eftersom modlösningarna, som vi utvecklade och analyserade i avsnitt 3.4, utgör ett fullständigt funktionssystem kan fälten skrivas som en superposition av dessa propagerande och icke-propagerande moder. De lämpliga utvecklingsfunktionerna ges i (3.25), samt tillhörande definitioner i (3.21), (3.19) och (3.20).

På samma sätt som förut använder vi oss utav två index, ett n-index för moden, medan indexet ν antar två värden, ν = TM,TE, vilket anger om moden är en



Figur 3.10: Vågledare med källområde V, som begränsas av tvärsnittytorna Ω_1, Ω_2 och en del av mantelytan S.

TM-mod eller TE-mod. Som vanligt är v_n respektive w_n lösningar till egenvärdesproblemen i ekvation (3.4) och (3.5), samt normerade enligt (3.22). De normerade moderna uppfyller ortogonalitetssambanden i (3.32).

Låt ytorna Ω_1 och Ω_2 vara två tvärsnittsytor vid $z = z_1$ respektive $z = z_2$ som innesluter källvolymen V, se figur 3.10. I området $z \geq z_2$ utbreder sig alla fält i positiv z-riktning, eftersom fältets källor befinner sig i området $z < z_2$. Därmed kan vi skriva

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^+(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\mathrm{TM,TE}}} a_{n\nu}^+ \boldsymbol{E}_{n\nu}^+(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}^+(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\mathrm{TM,TE}}} a_{n\nu}^+ \boldsymbol{H}_{n\nu}^+(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \quad z \geq z_2 \tag{3.43}$$

där summationen sker över modindexet n och $\nu = $ TM,TE. Analogt utbreder sig alla fält i negativ z-riktning då $z \leq z_1$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}^-(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\mathrm{TM,TE}}} a_{n\nu}^- \boldsymbol{E}_{n\nu}^-(\boldsymbol{r},\omega) \\ \boldsymbol{H}^-(\boldsymbol{r},\omega) = \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\mathrm{TM,TE}}} a_{n\nu}^- \boldsymbol{H}_{n\nu}^-(\boldsymbol{r},\omega) \end{cases} \quad z \leq z_1 \tag{3.44}$$

För att bestämma koefficienterna $a_{n\nu}^{\pm}$ använder vi Lorentz reciprocitetssats vilken vi först härleder. Låt $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ vara fälten som genereras av strömtätheten $\boldsymbol{J}$, dvs $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ satisfierar

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu_0\mu\boldsymbol{H} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} - i\omega\epsilon_0\epsilon\boldsymbol{E} \end{cases}$$

där det elektriska fältet $\boldsymbol{E}$ satisfierar randvillkoret $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ på vågledarens väggar. Genom sin definition satisfierar modernas fält $\boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm}$, $\boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}$ de homogena Maxwellska ekvationerna (ingen strömtäthet), dvs.

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} = i\omega\mu_0\mu\boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm} = -i\omega\epsilon_0\epsilon\boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} \end{cases}$$

samt uppfyller randvillkoret $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} = 0$ på väggarna.

Följande identitet fås från Maxwells fältekvationer och räknereglerna för nabla-operatorn

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}\right) &= \boldsymbol{H} \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm}\right) - \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\ &- \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{E} \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}\right) = -\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} \end{aligned}$$

Vi integrerar denna relation över en volym V och utnyttjar Gauss sats

$$\iint\limits_{S_0} (\boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = -\iiint\limits_{V} \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm}\, dv \tag{3.45}$$

där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den *utåtriktade* normalen till volymen V:s begränsningsyta S_0, som består av de båda tvärsnittsareorna Ω_1 och Ω_2, samt en del av vågledarens mantelyta S mellan planen $z = z_1$ och $z = z_2$, se figur 3.10. Eftersom mantelytan utgörs av perfekt ledande väggar där $\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm} = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, så ger den inga bidrag till ytintegralen. Integralerna över Ω_1 och Ω_2 ger däremot bidrag som vi kan bestämma mha. utvecklingarna (3.43) och (3.44) samt ortogonalitetsrelationen (3.32).

Med fältet $\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}$ på ytan Ω_1 använder vi oss utav utvecklingen (3.44) samt (3.19) och (3.20). Ortogonalitetsrelationen (3.32) ger

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega_1} (\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{+}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS \\ &\quad = -\sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} a_{n'\nu'}^{-} \iint\limits_{\Omega_1} \left(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+} \times \boldsymbol{H}_{n'\nu'}^{-} - \boldsymbol{E}_{n'\nu'}^{-} \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{+}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dS \\ &\quad = \sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} a_{n'\nu'}^{-} e^{i(k_{zn}-k_{zn'})z_1} \iint\limits_{\Omega_1} (\boldsymbol{E}_{Tn\nu} \times \boldsymbol{H}_{Tn'\nu'} + \boldsymbol{E}_{Tn'\nu'} \times \boldsymbol{H}_{Tn\nu}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dS \\ &\quad = -\frac{2a_{n\nu}^{-}}{\eta_0} Y_{n\nu} \end{aligned}$$

Notera att på ytan Ω_1 är den utåtriktade normalen riktad längs $-\hat{\boldsymbol{z}}$. På ytan Ω_2 använder vi analogt utvecklingen (3.43). Vi får

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega_2} (\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+} \times \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{+}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS \\ &\quad = \sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} a_{n'\nu'}^{+} \iint\limits_{\Omega_2} \left(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+} \times \boldsymbol{H}_{n'\nu'}^{+} - \boldsymbol{E}_{n'\nu'}^{+} \times \boldsymbol{H}_{n\nu}^{+}\right) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dS \\ &\quad = \sum_{\substack{n' \\ \nu'=\text{TM,TE}}} a_{n'\nu'}^{+} e^{i(k_{zn}+k_{zn'})z_2} \iint\limits_{\Omega_2} (\boldsymbol{E}_{Tn\nu} \times \boldsymbol{H}_{Tn'\nu'} - \boldsymbol{E}_{Tn'\nu'} \times \boldsymbol{H}_{Tn\nu}) \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, dS = 0 \end{aligned}$$

vilket mha. (3.45) ger

$$a_{n\nu}^{-}=\frac{\eta_0}{2Y_{n\nu}}\iiint_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}\,dv$$

För $\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}$ fås på samma sätt

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_1}(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_{n\nu}^{-})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS\\
&\quad=-\sum_{\substack{n'\\ \nu'=\mathrm{TM,TE}}}a_{n'\nu'}^{-}\iint_{\Omega_1}\left(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}\times\boldsymbol{H}_{n'\nu'}^{-}-\boldsymbol{E}_{n'\nu'}^{-}\times\boldsymbol{H}_{n\nu}^{-}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,dS\\
&\quad=\sum_{\substack{n'\\ \nu'=\mathrm{TM,TE}}}a_{n'\nu'}^{-}e^{-i(k_{zn}+k_{zn'})z_1}\iint_{\Omega_1}(\boldsymbol{E}_{Tn\nu}\times\boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}-\boldsymbol{E}_{Tn'\nu'}\times\boldsymbol{H}_{Tn\nu})\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,dS=0
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_2}(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}\times\boldsymbol{H}-\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_{n\nu}^{-})\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,dS\\
&\quad=\sum_{\substack{n'\\ \nu'=\mathrm{TM,TE}}}a_{n'\nu'}^{+}\iint_{\Omega_2}\left(\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}\times\boldsymbol{H}_{n'\nu'}^{+}-\boldsymbol{E}_{n'\nu'}^{+}\times\boldsymbol{H}_{n\nu}^{-}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,dS\\
&\quad=\sum_{\substack{n'\\ \nu'=\mathrm{TM,TE}}}a_{n'\nu'}^{+}e^{-i(k_{zn}-k_{zn'})z_2}\iint_{\Omega_2}(\boldsymbol{E}_{Tn\nu}\times\boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}+\boldsymbol{E}_{Tn'\nu'}\times\boldsymbol{H}_{Tn\nu})\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,dS\\
&\quad=-\frac{2a_{n\nu}^{+}}{\eta_0}Y_{n\nu}
\end{aligned}$$

vilket på liknande sätt ger

$$a_{n\nu}^{+}=\frac{\eta_0}{2Y_{n\nu}}\iiint_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}\,dv$$

Vi kan sammanfatta dessa båda ekvationer i en:

$$a_{n\nu}^{\pm}=\frac{\eta_0}{2Y_{n\nu}}\iiint_V \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}_{n\nu}^{\mp}\,dv \tag{3.46}$$

Antag nu att strömtätheten $\boldsymbol{J}$ är koncentrerad till en tråd längs kurvan C med tangentialvektor $\hat{\boldsymbol{\tau}}$. Volymintegralerna i (3.46) övergår då till linjeintegraler.

$$a_{n\nu}^{\pm}=\frac{\eta_0}{2Y_{n\nu}}\int_C I(\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{E}_{n\nu}^{\mp}\cdot\,d\boldsymbol{r} \tag{3.47}$$

där $d\boldsymbol{r}=\hat{\boldsymbol{\tau}}dl$.

Exempel 3.6
Om kurvan C ligger i ett transversellt plan $z = z_0$ så ser vi från (3.47), (3.19), (3.20) och (3.23) att $a_{n\nu}^{+} = a_{n\nu}^{-} \exp(-2ik_z z_0)$. ∎

Exempel 3.7
En liten plan sluten strömslinga med $\boldsymbol{r}$-oberoende ström I befinner sig i punkten $\boldsymbol{r}_0$. Slingan kan representeras av en magnetisk elementardipol $\boldsymbol{m} = IA\hat{\boldsymbol{n}}$, där A är slingans area och $\hat{\boldsymbol{n}}$ normalen till A riktad enligt skruvregeln (högerregeln). Eftersom slingan är liten så är $\boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}(\boldsymbol{r}) \simeq \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}(\boldsymbol{r}_0)$ inuti slingan. Vi får med (3.47), Stokes sats och Faradays induktionslag

$$\begin{aligned} a_{n\nu}^{\pm} &= \frac{I\eta_0}{2Y_{n\nu}} \oint_C \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\mp} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{I\eta_0}{2Y_{n\nu}} \iint_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\mp}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS \\ &\simeq \frac{I\eta_0}{2Y_{n\nu}} i\omega\mu_0\mu \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\mp}(\boldsymbol{r}_0) \cdot \iint_\Omega \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = \frac{i\omega\mu_0\mu\eta_0}{2Y_{n\nu}} \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\mp}(\boldsymbol{r}_0) \cdot \boldsymbol{m} \end{aligned}$$

∎

Exempel 3.8
Om vi placerar en elektrisk elementardipol, $\boldsymbol{p} = iI\, d\boldsymbol{r}/\omega$ i en vågledare där $d\boldsymbol{r}$ är en infinitesimal, riktad sträcka, så ser vi att (3.47) ger

$$a_{n\nu}^{\pm} = -\frac{i\omega\eta_0}{2Y_{n\nu}} \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\mp}$$

Antag att dipolen är belägen i punkten $\boldsymbol{r}_0$. Fältet från dipolen ges då av

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\dfrac{i\omega\eta_0}{2} \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE}}} \frac{1}{Y_{n\nu}} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}(\boldsymbol{r}_0)) \boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}(\boldsymbol{r}), & z > z_0 \\ -\dfrac{i\omega\eta_0}{2} \displaystyle\sum_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE}}} \frac{1}{Y_{n\nu}} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}(\boldsymbol{r}_0)) \boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}(\boldsymbol{r}), & z < z_0 \end{cases}$$

Detta kan skrivas

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{i\omega\eta_0}{2} \boldsymbol{p} \cdot \mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0)$$

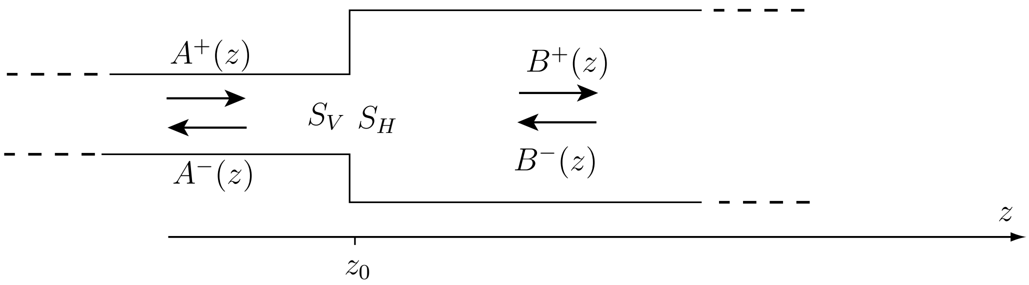
Storheten $\mathcal{G}$ ges av

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_0) = \begin{cases} -\sum\limits_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE}}} Z_{n\nu} \boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}(\boldsymbol{r}_0) \boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}(\boldsymbol{r}), & z > z_0 \\ -\sum\limits_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE}}} Z_{n\nu} \boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}(\boldsymbol{r}_0) \boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}(\boldsymbol{r}), & z < z_0 \end{cases}$$

och kallas för Greendyaden, vilket är den vektoriella motsvarigheten till Greenfunktionen för skalära fält. Modens impedans $Z_{n\nu} = 1/Y_{n\nu}$. ∎

3.10 Modanpassningsmetoden

Modanpassningstekniken är en effektiv metod för att bestämma reflektion och transmission av fält vid skarvar mellan vågledare av olika dimensioner. Tekniken kan med fördel användas även vid analys av hornantenner.



Figur 3.11: Geometrin för modanpassningstekniken.

Vi börjar med att studera fallet med en *förlustfri* vågledare där det vid $z = z_0$ är en utvidgning av tvärsnittet från S_V till S_H, se figur 3.11. Vi antar propagerande moder i positiv och negativ z-led både för $z > z_0$ och $z < z_0$. Följande utvecklingar av fälten antas, se (3.25) på sidan 53 (vi skiver för enkelhets skull inte ut beroendet av vinkelfrekvensen ω)

$$\left.\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(a^+_{n\nu}\boldsymbol{E}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r}) + a^-_{n\nu}\boldsymbol{E}^-_{n\nu}(\boldsymbol{r})\right) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(a^+_{n\nu}\boldsymbol{H}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r}) + a^-_{n\nu}\boldsymbol{H}^-_{n\nu}(\boldsymbol{r})\right) \end{cases}\right. \qquad z < z_0$$

$$\left.\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(b^+_{n\nu}\boldsymbol{E}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r}) + b^-_{n\nu}\boldsymbol{E}^-_{n\nu}(\boldsymbol{r})\right) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(b^+_{n\nu}\boldsymbol{H}^+_{n\nu}(\boldsymbol{r}) + b^-_{n\nu}\boldsymbol{H}^-_{n\nu}(\boldsymbol{r})\right) \end{cases}\right. \qquad z > z_0$$

där de infallande modernas amplituder $a^+_{n\nu}$ och $b^-_{n\nu}$ antas kända. De transversella komponenterna av fältet kan skrivas

$$\left.\begin{cases} \boldsymbol{E}^V_T(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(a^+_{n\nu}e^{ik^V_{zn}z} + a^-_{n\nu}e^{-ik^V_{zn}z}\right)\boldsymbol{E}^V_{T\,n\nu}(\boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{H}^V_T(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(a^+_{n\nu}e^{ik^V_{zn}z} - a^-_{n\nu}e^{-ik^V_{zn}z}\right)\boldsymbol{H}^V_{T\,n\nu}(\boldsymbol{\rho}) \end{cases}\right. \qquad z < z_0$$

$$\left.\begin{cases} \boldsymbol{E}^H_T(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(b^+_{n\nu}e^{ik^H_{zn}z} + b^-_{n\nu}e^{-ik^H_{zn}z}\right)\boldsymbol{E}^H_{T\,n\nu}(\boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{H}^H_T(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{\substack{n\\ \nu=\text{TM,TE,TEM}}} \left(b^+_{n\nu}e^{ik^H_{zn}z} - b^-_{n\nu}e^{-ik^H_{zn}z}\right)\boldsymbol{H}^H_{T\,n\nu}(\boldsymbol{\rho}) \end{cases}\right. \qquad z > z_0$$

Notera att de transversella utvecklingsfunktionerna är olika på vänster respektive höger sida om skarven $z = z_0$ eftersom det transversella vågtalet (egenvärdena) k_{tn} ändras då det geometriska tvärsnittet ändras. Vi betecknar dessa funktioner $\boldsymbol{E}^V_{T\,n\nu}$ och $\boldsymbol{E}^H_{T\,n\nu}$ med liknande beteckningar för det magnetiska fältets egenmoder och för de longitudinalla vågtalen $k_{zn}^{H,V}$. Vid $z = z_0$ gäller att de transversella komponenterna är kontinuerliga över S_V och att det transversella elektriska fältet är noll över den återstående delen av ytan S_H, dvs. $\boldsymbol{\rho} \in S_H$ men $\boldsymbol{\rho} \notin S_V$. Därmed fås

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_T^H(\boldsymbol{\rho}, z_0) &= \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{\rho} \in S_H \text{ och } \boldsymbol{\rho} \notin S_V \\ \boldsymbol{E}_T^V(\boldsymbol{\rho}, z_0), & \boldsymbol{\rho} \in S_V \end{cases} \\ \boldsymbol{H}_T^H(\boldsymbol{\rho}, z_0) &= \boldsymbol{H}_T^V(\boldsymbol{\rho}, z_0), \qquad \boldsymbol{\rho} \in S_V \end{aligned} \tag{3.48}$$

Ta nu normalytintegralen över S_H av vektorprodukten mellan $\boldsymbol{H}_{T\,n'\nu'}^{H*}$ och den övre av ekvationerna i (3.48). Genom att utnyttja normeringsintegralen (3.32) på sidan 63

$$\iint\limits_{S_H} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \left(\boldsymbol{E}_{T\,n\nu}^H(\boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{H}_{T\,n'\nu'}^{H*}(\boldsymbol{\rho})\right) dS = \frac{1}{\eta_0} Y_{n\nu}^H \delta_{nn'} \delta_{\nu\nu'}$$

där admittanserna för förlustfria material i vågledaren ges av, se (3.33)

$$Y_{n\nu}^{H,V} = \begin{cases} \dfrac{\epsilon\omega k_{zn}^{H,V}}{c_0 \left(k_{tn}^{H,V}\right)^2}, & \nu = \mathrm{TM} \\ \dfrac{\mu\omega k_{zn}^{H,V*}}{c_0 \left(k_{tn}^{H,V}\right)^2}, & \nu = \mathrm{TE} \\ \sqrt{\dfrac{\epsilon}{\mu}}, & \nu = \mathrm{TEM} \end{cases} \tag{3.49}$$

fås

$$Q(B^+(z_0) + B^-(z_0)) = P^t(A^+(z_0) + A^-(z_0)) \tag{3.50}$$

där $A^\pm(z_0)$ och $B^\pm(z_0)$ är kolonnvektorerna $A_{n\nu}^\pm(z) = a_{n\nu}^\pm e^{\pm ik_{zn}^V z}$ och $B_{n\nu}^\pm(z) = b_{n\nu}^\pm e^{\pm ik_{zn}^H z}$ och ^{t} står för transponat. Matrisen P är given av

$$P_{n\nu,n'\nu'} = \iint\limits_{S_V} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \left(\boldsymbol{E}_{T\,n\nu}^V(\boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{H}_{T\,n'\nu'}^{H*}(\boldsymbol{\rho})\right) dS$$

och Q är den diagonala matrisen

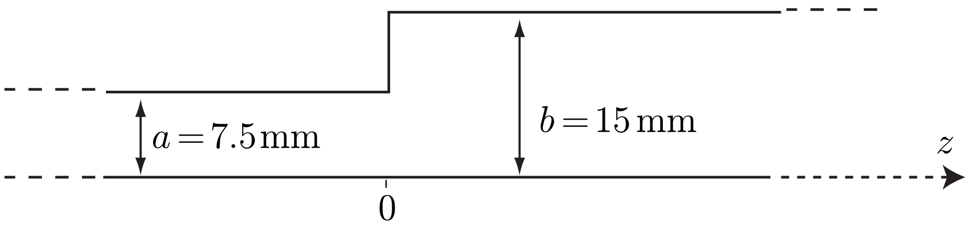
$$Q_{n\nu,n'\nu'} = \frac{1}{\eta_0} Y_{n\nu}^H \delta_{nn'} \delta_{\nu\nu'}$$

Genom att bilda normalytintegralen över S_V av vektorprodukten mellan $\boldsymbol{E}_{T\,n'\nu'}^{V*}$ och den undre av ekvationerna i (3.48) fås på samma sätt

$$P^*(B^+(z_0) - B^-(z_0)) = R^*(A^+(z_0) - A^-(z_0)) \tag{3.51}$$

där R är den diagonala matrisen

$$R_{n\nu,n'\nu'} = \frac{1}{\eta_0} Y_{n\nu}^V \delta_{nn'} \delta_{\nu\nu'}$$



Figur 3.12: Övergång mellan två planvågledare.

Modadmittansen $Y^V_{n\nu}$ ges av (3.49).

Systemet av ekvationer (3.50) och (3.51) ger följande relation mellan de infallande modernas amplituder $A^+(z_0)$, $B^-(z_0)$ och de utgående modernas amplituder $A^-(z_0)$, $B^+(z_0)$:

$$\begin{pmatrix} A^-(z_0) \\ B^+(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+(z_0) \\ B^-(z_0) \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} A^+(z_0) \\ B^-(z_0) \end{pmatrix}$$

där $\mathbf{S}$ kallas spridningsmatrisen och vars element ges av

$$\begin{cases} S_{11} = (P^* Q^{-1} P^t + R^*)^{-1}(R^* - P^* Q^{-1} P^t) \\ S_{12} = 2(P^* Q^{-1} P^t + R^*)^{-1} P^* \\ S_{21} = 2(P^t R^{*-1} P^* + Q)^{-1} P^t \\ S_{22} = (P^t R^{*-1} P^* + Q)^{-1}(P^t R^{*-1} P^* - Q) \end{cases}$$

Vi har nu haft en utvidgning av vågledaren dvs $S_V < S_H$. Om vi istället har $S_V > S_H$ fås snarlika uttryck. Relationen mellan amplitudvektorerna kan då skrivas

$$\begin{pmatrix} A^-(z_0) \\ B^+(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{11} & \widetilde{S}_{12} \\ \widetilde{S}_{21} & \widetilde{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+(z_0) \\ B^-(z_0) \end{pmatrix}$$

där spridningsmatrisen ges av

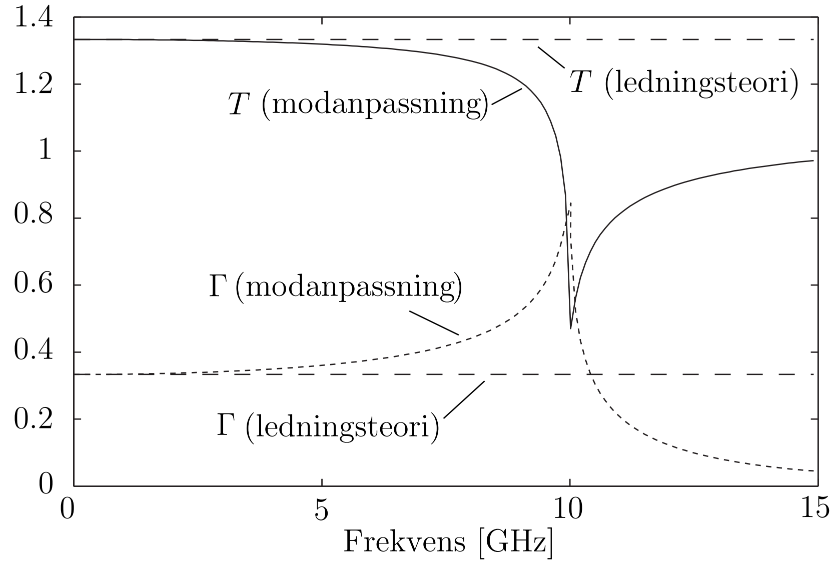
$$\begin{cases} \widetilde{S}_{11} = (R + \widetilde{P}^t Q^{*-1} \widetilde{P}^*)^{-1}(\widetilde{P}^t Q^{*-1} \widetilde{P}^* - R) \\ \widetilde{S}_{12} = 2(R + \widetilde{P}^t Q^{*-1} \widetilde{P}^*)^{-1} \widetilde{P}^t \\ \widetilde{S}_{21} = 2(\widetilde{P}^* R^{-1} \widetilde{P}^t + Q^*)^{-1} \widetilde{P}^* \\ \widetilde{S}_{22} = (\widetilde{P}^* R^{-1} \widetilde{P}^t + Q^*)^{-1}(Q^* - \widetilde{P}^* R^{-1} \widetilde{P}^t) \end{cases}$$

och

$$\widetilde{P}_{n\nu,n'\nu'} = \iint_{S_H} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \left(\boldsymbol{E}^H_{T\,n\nu}(\boldsymbol{\rho}) \times \boldsymbol{H}^{V*}_{T\,n'\nu'}(\boldsymbol{\rho}) \right) dS$$

Exempel 3.9

Studera en övergång mellan två planvågledare enligt figur 3.12. En infallande TEM våg utbreder sig i positiv z-led och ger upphov till en reflekterad och transmitterad TEM-våg vid $z = 0$. Frekvensen är såpass låg att inga andra moder än TEM-vågen kan propagera.



Figur 3.13: Reflektions- och transmissionskoefficient för TEM-moden.

För låga frekvenser kan övergången behandlas med ledningsteori, vilken ger reflektionskoefficienten $\Gamma = (Z_2 - Z_1)/(Z_2 + Z_1)$ och transmissionskoefficienten $T = 2Z_2/(Z_2 + Z_1)$. För en planvågledare ges karakteristiska impedansen av $Z = d\eta/w$, där d är avståndet mellan plattorna och w är ledningens bredd. Reflektions- och transmissionskoefficienterna ges alltså av

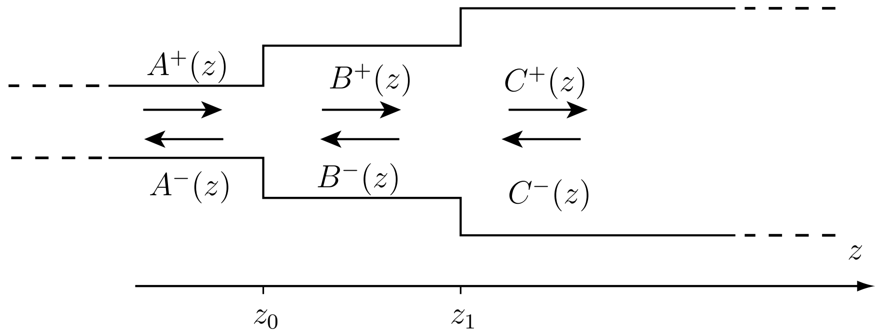
$$R = \frac{b-a}{b+a}$$
$$T = \frac{2b}{b+a}$$

Dessa koefficienter kan nu jämföras med de koefficienter som modanpassningsmetoden ger. I detta fall är det ingen infallande våg från höger dvs. $B^-(z_0) = 0$. Matrisen S_{11} fungerar då som en reflektionsmatris och matrisen S_{21} som en transmissionsmatris. Eftersom den infallande vågen är en TEM våg ges reflektions- och transmissionskoefficienten för TEM vågen av $S_{11,TEM}$, respektive $S_{21,TEM}$. I figur 3.13 jämförs reflektionskoefficienten för TEM vågen beräknad med modanpassningstekniken och med vanlig ledningsteori. I detta fall är $a = 7.5$ mm och $b = 15$ mm. Som synes fungerar ledningsteorin bra upp till 1 GHz men därefter ger den allt sämre resultat. Detta trots att de näst lägsta moderna TE_1 och TM_1 inte börjar propagera förrän vid 10 GHz. ∎

3.10.1 Kaskadkoppling

En vågledare med flera diskontinuiteter kan behandlas med kaskadkoppling. Antag att vågledarens geometri ser ut som i figur 3.14. Relationen mellan $A^{\pm}(z_0)$ och $B^{\pm}(z_0)$ kan skrivas, se (3.50) och (3.51)

$$\begin{pmatrix} Q_0 & Q_0 \\ P_0^* & -P_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^+(z_0) \\ B^-(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0^t & P_0^t \\ R_0^* & -R_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+(z_0) \\ A^-(z_0) \end{pmatrix}$$



Figur 3.14: Tre kaskadkopplade vågledare.

Relationen mellan $B^{\pm}(z_1)$ och $C^{\pm}(z_1)$ ges av

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 \\ P_1^* & -P_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^+(z_1) \\ C^-(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1^t & P_1^t \\ R_1^* & -R_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^+(z_1) \\ B^-(z_1) \end{pmatrix}$$

Relationen mellan $B^{\pm}(z_1)$ och $B^{\pm}(z_0)$ ges av

$$\begin{pmatrix} B^+(z_1) \\ B^-(z_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^+(z_1 - z_0) & 0 \\ 0 & E^-(z_1 - z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^+(z_0) \\ B^-(z_0) \end{pmatrix}$$

där $E^{\pm}_{n\nu,n'\nu'}(z) = \delta_{nn'}\delta_{\nu\nu'} \exp(\pm ik_{zn}z)$. Genom matrismultiplikation kan man nu få relationen mellan $A^{\pm}(z_0)$ och $C^{\pm}(z_1)$. Det är också enkelt att generalisera till en vågledare med ett godtyckligt antal diskontinuiteter.

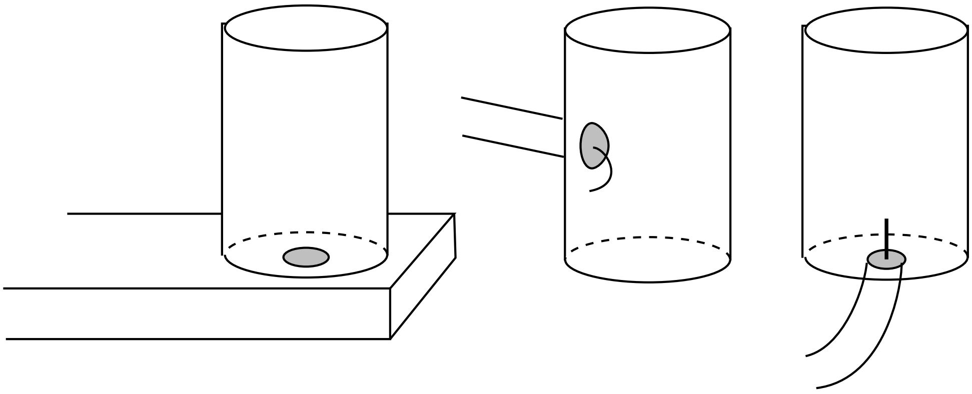
Genom kaskadkoppling av många korta segment med konstanta tvärsnitt kan metoden tillämpas även på kontinuerliga övergångar i vågledare och på hornantenner.

3.11 Resonanskaviteter

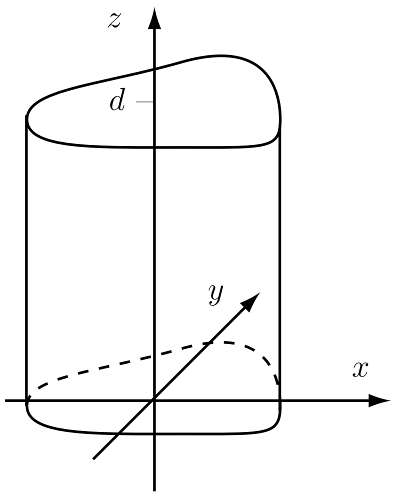
En resonanskavitet fungerar som ett bandpassfilter eftersom endast fält med vissa frekvenser kan existera i en källfri kavitet. Resonanskaviteter används ofta i mikrovågssystem eftersom de i de flesta fall har betydligt smalare bandbredd än traditionella bandpassfilter inom kretstekniken, se figur 3.15.

Vi skall analysera en vanlig typ av resonanskavitet som består av en hålrumsvågledare med metalliska ändytor vid $z = 0$ och $z = d$, se figur 3.16. För att bestämma de fält som kan existera i kaviteten behöver vi randvillkor för z-komponenten av de elektriska och magnetiska fälten vid $z = 0$ och $z = d$. Eftersom $\boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, 0) = \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, d) = \mathbf{0}$ för alla $\boldsymbol{\rho}$, följer att $\nabla_T \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, 0) = \nabla_T \cdot \boldsymbol{E}_T(\boldsymbol{\rho}, d) = 0$. Eftersom $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$ inuti kaviteten följer att z-derivatan av E_z är noll vid ändytorna. För magnetfältet gäller att H_z är noll vid ändytorna eftersom $\boldsymbol{H}$ är noll i metallen och normalkomponenten av $\boldsymbol{B}$ alltid är kontinuerlig. Därmed har vi följande randvillkor

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z(\boldsymbol{\rho}, 0)}{\partial z} = \dfrac{\partial E_z(\boldsymbol{\rho}, d)}{\partial z} = 0 \\ H_z(\boldsymbol{\rho}, 0) = H_z(\boldsymbol{\rho}, d) = 0 \end{cases} \tag{3.52}$$



Figur 3.15: Exempel på mikrovågskaviteter och matning. Den vänstra kaviteten matas av en vågledare via ett hål i botten. Den mellersta kaviteten matas av en koaxialkabel vars innerledare böjts i en halvcirkel och fästs vid kavitetens vägg. Den högra kaviteten matas av en koaxialkabel där innerledaren sticker in en bit vertikalt.



Figur 3.16: Geometri för resonanskavitet.

Fälten i kaviteten består av vågor som går i positiv och negativ z-led. Genom att använda utvecklingarna i ekvationerna (3.19) och (3.20) kan z-komponenten av fälten skrivas

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r}) = (a_{n\nu}^+ e^{ik_z z} - a_{n\nu}^- e^{-ik_z z}) v_n(\boldsymbol{\rho}) & \nu = \text{TM} \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r}) = (a_{n\nu}^+ e^{ik_z z} + a_{n\nu}^- e^{-ik_z z}) w_n(\boldsymbol{\rho}) & \nu = \text{TE} \end{cases}$$

Randvillkoren ger $a_{n\nu}^+ = -a_{n\nu}^-$ och $\sin k_z d = 0$. Därmed kan k_z endast anta de diskreta värdena

$$k_{z\ell} = \frac{\ell\pi}{d} \qquad \begin{cases} \ell = 0, 1, 2 \dots & \nu = \text{TM} \\ \ell = 1, 2 \dots & \nu = \text{TE} \end{cases}$$

De frekvenser som kan existera i kaviteten bestäms av att $k^2 = k_{tn}^2 + k_{z\ell}^2$ och därmed

$$f_{n\ell} = \frac{c}{2\pi}\sqrt{k_{tn}^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2} \tag{3.53}$$

Fälten för motsvarande moder ges enligt (3.19) och (3.20) av

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{n\ell}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_\ell}{d}}\left(i\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho})\sin\frac{\ell\pi z}{d} + v_n(\boldsymbol{\rho})\cos\frac{\ell\pi z}{d}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \\ \boldsymbol{H}_{n\ell}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_\ell}{d}}\boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho})\cos\frac{\ell\pi z}{d} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nu = \mathrm{TM} \\ \ell = 0, 1, 2\ldots \end{array} \tag{3.54}$$

där $\varepsilon_\ell = 2 - \delta_{\ell,0}$ och

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{n\ell}(\boldsymbol{r}) = i\sqrt{\frac{2}{d}}\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho})\sin\frac{\ell\pi z}{d} \\ \boldsymbol{H}_{n\ell}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{2}{d}}\left(\boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho})\cos\frac{\ell\pi z}{d} + i\eta_0^{-1}w_n(\boldsymbol{\rho})\sin\frac{\ell\pi z}{d}\hat{\boldsymbol{z}}\right) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nu = \mathrm{TE} \\ \ell = 1, 2\ldots \end{array} \tag{3.55}$$

3.11.1 Q-värde för kaviteten

Väggarna i en resonanskavitet är inte perfekt ledande vilket leder till effektförluster, jfr avsnitt 3.8, och ökad bandbredd. Q-värdet (Quality factor) är ett mått på hur stora förlusterna är i ett resonanssystem. Vi skall här härleda ett uttryck för Q-värdet och visa hur Q-värdet är relaterat till kavitetens bandbredd.

Vi betraktar en resonansmod med index $n\ell$ som genererats vid $t = 0$. Förlusterna i väggarna antas vara små och de ger upphov till en dämpterm i ekvationerna för det elektriska och magnetiska fältet. Detta ger att z-komponenten av magnetfältet respektive det elektriska fältet för TE-moderna och TM-moderna satisfierar följande ekvation

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{2\alpha}{c^2}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$

där dämpkoefficienten α är liten. Variabelseparationen $f(\boldsymbol{r}, t) = g(\boldsymbol{r})h(t)$ ger

$$\frac{1}{g(\boldsymbol{r})}\nabla^2 g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{h(t)}\left(\frac{1}{c^2}\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{2\alpha}{c^2}\frac{dh(t)}{dt}\right) = -k^2$$

Vi antar att $\alpha > 0$ är såpass liten att de homogena randvillkoren som gäller i det förlustfria fallet, se ekv. (3.2) och (3.52), inte ändras. Detta ger att egenvärdena k^2 antar värdena $k_{n\ell}^2 = (2\pi f_{n\ell}/c)^2$, där $f_{n\ell}$ är given av ekv. (3.53). Ekvationen för $h(t)$ ges då av

$$\frac{1}{c^2}\frac{d^2h_{n\ell}(t)}{dt^2} + \frac{2\alpha}{c^2}\frac{dh_{n\ell}(t)}{dt} + k_{n\ell}^2 h_{n\ell}(t) = 0$$

Den allmänna lösningen kan skrivas

$$h_{n\ell}(t) = A_{n\ell}e^{-\alpha t - i\omega'_{n\ell}t} + B_{n\ell}e^{-\alpha t + i\omega'_{n\ell}t}$$

där koefficienterna $A_{n\ell}$ och $B_{n\ell}$ bestäms av begynnelsevärdena $h_{n\ell}(0)$ och $h'_{n\ell}(0)$. Självsvängningsfrekvensen $\omega'_{n\ell}$ ges av

$$\omega'_{n\ell} = \sqrt{(2\pi f_{n\ell})^2 - \alpha^2} \approx \omega_{n\ell}$$

Vi ser att dämpningen sänker resonansfrekvensen något. Eftersom α är liten kan vi försumma sänkningen. För att bestämma frekvensspektrum för moden, antar vi att $h_{n\ell}(t) = 0$ för $t < 0$. Fouriertransformering ger

$$h_{n\ell}(\omega) = \int_0^\infty h_{n\ell}(t) e^{i\omega t} dt = A_{n\ell} \frac{1}{-i(\omega - \omega_{n\ell}) + \alpha} + B_{n\ell} \frac{1}{-i(\omega + \omega_{n\ell}) + \alpha}$$

För vinkelfrekvenser ω nära resonansfrekvensen $\omega_{n\ell}$ dominerar den första termen (endast positiva frekvenser aktuella). Energin är proportionell mot $|h_{n\ell}(\omega)|^2 \approx A_{n\ell}^2 / \left((\omega - \omega_{n\ell})^2 + \alpha^2\right)$. Resonansens bandbredd $B > 0$ definieras av $|h_{n\ell}(\omega_{n\ell} \pm B/2)|^2 = |h_{n\ell}(\omega_{n\ell})|^2/2$. Därmed är $B = 2\alpha$.

Vid resonans kan vi approximativt skriva de elektriska och magnetiska fälten i kaviteten på följande sätt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega_{nl} t}\} e^{-\alpha t} \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) &= \mathrm{Re}\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega_{nl} t}\} e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

där $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ och $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ är de komplexa fälten i en resonanskavitet med perfekt ledande väggar, se ekvationerna (3.54) och (3.55). Den upplagrade elektriska energin i kaviteten ges av

$$\begin{aligned} W_e(t) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) dV \\ &= \frac{\varepsilon_0}{8} \int_V (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega_{nl} t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_{nl} t}) \cdot (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{i\omega_{nl} t} + \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}) e^{-i\omega_{nl} t}) dV e^{-2\alpha t} \end{aligned}$$

Dämpkoefficienten α är såpass liten att faktorn $e^{-2\alpha t}$ inte ändrar sig nämnvärt under en period. Vi tidmedelvärdesbildar genom att integerera över en period, $T = 2\pi/\omega_{nl}$,

$$U_e(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} W_e(t') dt' = \frac{\varepsilon_0}{4} |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 e^{-2\alpha t}$$

Tidsmedelvärdet av den upplagrade magnetiska energin behandlas på samma sätt och ger

$$U_m(t) = \int_t^{t+T} W_m(t') dt' = \frac{\mu_0}{4} |\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 e^{-2\alpha t}$$

Tidsmedelvärdet av den upplagrade energin ges av $U(t) = U_e(t) + U_m(t) = U(0) e^{-2\alpha t}$. Man kan visa, se övning 3.14, att tidsmedelvärdet av de upplagrade elektriska och magnetiska energierna är lika.

Dämpkoefficienten α bestäms nu genom att beräkna tidsmedelvärdet av de joulska effektförlusterna i väggarna. Både mantelytan och ändytorna bidrar till förlusterna.

Energiförlusten under en period ges av

$$P_a(t)\frac{2\pi}{\omega_{n\ell}} = -U'(t)\frac{2\pi}{\omega_{n\ell}} = 2\alpha U(t)\frac{2\pi}{\omega_{n\ell}}$$

där $P_a(t) = -U'(t)$ är den joulska effektförbrukningen medelvärdesbildad under en period. För en resonanskavitet definieras Q-värdet genom

$$Q = 2\pi\frac{\text{tmv av energin i kaviteten vid resonansfrekvensen}}{\text{energiförlusten under en period vid denna frekvens}} = \omega_{n\ell}\frac{U(t)}{P_a(t)} = \frac{\omega_{n\ell}}{2\alpha}$$

Vi har redan visat att kavitetens bandbredd ges av $B = 2\alpha$. Därmed gäller en enkel relationen mellan Q-värde och bandbredd, $B = \omega_{n\ell}/Q$.

Tidsmedelvärdet av förlusterna i väggarna får ett bidrag $P_t(t)$ från ändytorna och ett bidrag $P_m(t)$ från mantelytan,

$$P_a(t) = P_t(t) + P_m(t)$$

Från (3.54) och (3.21) följer att den upplagrade energin för en normerad TM mod kan skrivas

$$U_{TM}(t) = 2U_m(t) = \frac{\epsilon_0\varepsilon_\ell}{2d}\int_0^d \cos^2\frac{\ell\pi z}{d}\,dz \iint\limits_\Omega \frac{k_{n\ell}^2}{k_{tn}^4}|\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})|^2\,dxdy e^{-2\alpha t} = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{k_{n\ell}^2}{k_{tn}^2}e^{-2\alpha t}$$

där $\varepsilon_\ell = 2 - \delta_{\ell,0}$ och där vi utnyttjat att $(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n)\cdot(\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n) = \nabla_T v_n \cdot \nabla_T v_n = |\nabla_T v_n|^2$ samt ortogonalitetsrelationen i (3.28). Motsvarande energi för en TE-mod ges av ekvationerna (3.55) och (3.21)

$$U_{TE}(t) = 2U_e(t) = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{2}{d}\int_0^d \sin^2\frac{\ell\pi z}{d}\,dz \iint\limits_\Omega \frac{k_{n\ell}^2}{k_{tn}^4}|\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 dxdy = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{k_{n\ell}^2}{k_{tn}^2}e^{-2\alpha t}$$

vilket är samma uttryck som för TM-moden. Tidsmedelvärdet av förlusterna i ändytorna ges av

$$P_t(t) = \frac{R_s}{2}\iint\limits_\Omega |\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},0)|^2 + |\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},d)|^2 dxdy e^{-2\alpha t} = R_s\iint\limits_\Omega |\boldsymbol{H}_T(\boldsymbol{\rho},0)|^2 dxdy e^{-2\alpha t}$$

där $R_s = 1/(\sigma\delta) = \sqrt{\omega\mu/(2\sigma)}$ är ytresistansen, se (3.39). Från (3.21) och ortogonalitetsrelationen i (3.28) fås att

$$P_t(t) = \begin{cases} R_s\dfrac{\varepsilon_\ell k_{n\ell}^2}{\eta_0^2 k_{tn}^2 d}e^{-2\alpha t} & \text{TM} \\[2ex] R_s\dfrac{2k_{z\ell}^2}{\eta_0^2 k_{tn}^2 d}e^{-2\alpha t} & \text{TE} \end{cases}$$

Vi ser att kvoten $P_t(t)/U(t)$ är oberoende av tvärsnittsytan Ω och bara beror av kavitetens längd

$$\frac{P_t(t)}{U(t)} = \begin{cases} R_s \dfrac{2\varepsilon_\ell}{\mu_0 d} & \text{TM} \\ \\ R_s \dfrac{4k_{z\ell}^2}{\mu_0 k_{n\ell}^2 d} & \text{TE} \end{cases}$$

Tidsmedelvärdet av förlusterna i mantelytan ges av

$$P_m(t) = \frac{1}{2} R_s \int_0^d \int_\Gamma |\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 d\Gamma dz e^{-2\alpha t}$$

där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är normalen till mantelytan och Γ är tvärsnittets randkurva. Genom att utnyttja (3.19)–(3.21) fås

$$P_m(t) = \frac{1}{2}\eta_0^{-2} R_s e^{-2\alpha t} \begin{cases} \dfrac{k_{n\ell}^2}{k_{tn}^4} \displaystyle\int_\Gamma |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})|^2 d\Gamma & \text{TM} \\ \\ \displaystyle\int_\Gamma \frac{k_{z\ell}^2}{k_{tn}^4} |\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 + |w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 d\Gamma & \text{TE} \end{cases} \tag{3.56}$$

Sammanfattningsvis fås att kavitetens Q-värde är relaterat till dämpkoefficienten α genom $Q = \omega_{n\ell}/2\alpha$ och att α ges av

$$\alpha = \frac{P_a(t)}{2U(t)} = \begin{cases} \dfrac{R_s}{\mu_0} \left(\dfrac{\varepsilon_\ell}{d} + \dfrac{1}{2k_{tn}^2} \displaystyle\int_\Gamma |\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})|^2 d\Gamma \right) & \text{TM} \\ \dfrac{R_s}{\mu_0 k_{n\ell}^2} \left(\dfrac{2k_{z\ell}^2}{d} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Gamma \frac{k_{z\ell}^2}{k_{tn}^2} |\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 + k_{tn}^2 |w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 d\Gamma \right) & \text{TE} \end{cases}$$

Exempel 3.10

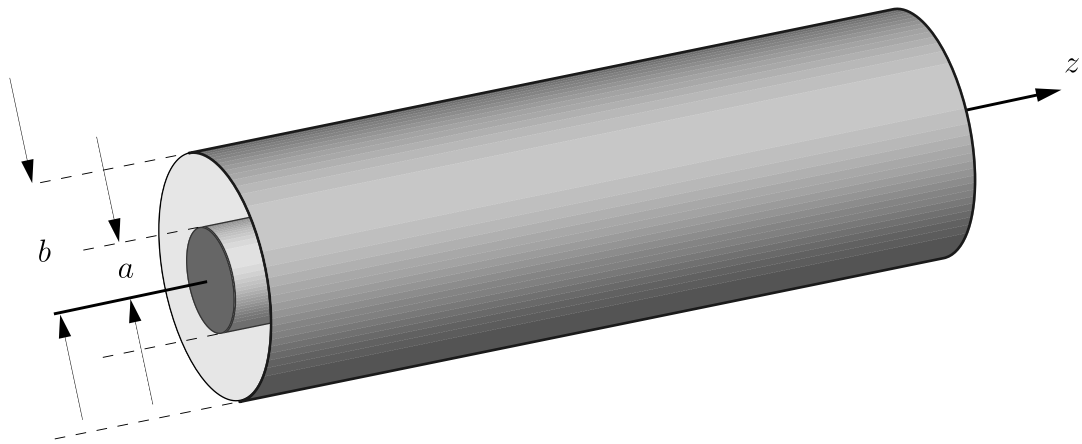
Vi exemplifierar med fallet en cirkulärcylindrisk kavitet. För en cirkulär vågledare med radien a ges v_n och w_n av tabell 3.4 på sidan 60. Genom insättning av dessa uttryck i ekv. (3.56) fås effektförlusterna i mantelytan till

$$P_m(t) = R_s e^{-2\alpha t} \begin{cases} (k_{mn\ell} a)^2 \xi_{mn}^{-2} \eta_0^{-2} a^{-1} & \text{TM} \\ \eta_0^{-2} \dfrac{\eta_{mn}^2}{(\eta_{mn}^2 - m^2) a} \left(m^2 \dfrac{(k_{z\ell} a)^2}{\eta_{mn}^4} + 1 \right) & \text{TE} \end{cases}$$

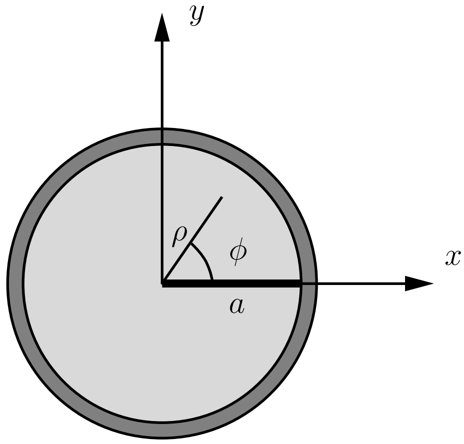
Därmed fås följande Q-värden

$$\begin{cases} Q_{TM} = \dfrac{\eta_0 k_{mn\ell} a}{R_s (1 + \varepsilon_\ell a/d)} \\ \\ Q_{TE} = \dfrac{(k_{mn\ell} a)^3 \eta_0 (1 - m^2 \eta_{mn}^{-2})}{2 R_s \eta_{mn}^2 \left(1 + (k_{z\ell} a)^2 m^2 \eta_{mn}^{-4} + 2\left(1 - m^2 \eta_{mn}^{-2}\right) k_{z\ell}^2 a^3 d^{-1} \eta_{mn}^{-2}\right)} \end{cases}$$

Eftersom $k_{mn\ell} a = \sqrt{\eta_{mn}^2 + (\ell\pi a/d)^2}$ respektive $k_{mn\ell} a = \sqrt{\xi_{mn}^2 + (\ell\pi a/d)^2}$ kan både Q_{TM} och Q_{TE} skrivas på formen $f(a/d)/R_s$. ■



Figur 3.17: Koaxialkabel och dess geometri för övning 3.3.



Figur 3.18: Geometri för övning 3.4 och en vågledare med cirkulärt tvärsnitt med en metallisk platta.

Övningar till kapitel 3

3.1 Visa att fälten för propagerande TE- och TM-moder i en plan vågledare kan skrivas som en superposition av två plana vågor. Beskriv åt vilket håll vågorna rör sig. Hur rör de sig vid gränsfrekvensen respektive vid mycket höga frekvenser?

3.2 Tidsmedelvärdet av effekttransporten i en förlustfri vågledare är alltid noll för de icke-propagerande moderna. Visa att effekttransporten för alla moder i en vågledare (oändligt lång) fylld med ett ledande material är skild från noll oavsett frekvens. Vart tar effekten som transporteras i vågledaren vägen?

***3.3** Bestäm modlösningarna i en koaxialkabel, vars innerledare respektive ytterledare har radierna a och b, se figur 3.17.

3.4 I en cirkulär vågledare är det TE_{11}-moden som har den lägsta gränsfrekvensen. Dess gränsfrekvens ges av $f_{c\mathrm{TE}_{11}} = 1.841 c_0/2\pi a$, se tabell 3.4. Genom att sätta in en metallplatta radiellt kan man sänka den lägsta gränsfrekvensen. Beräkna moderna för en geometri enligt figur 3.18, och bestäm hur stor sänkningen av den lägsta gränsfrekvensen är.

Ledning: Besselfunktioner med halvtaliga index kan skrivas i de trigonometriska funktionerna

$$J_{m+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{m+1/2} \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{\sin z}{z} = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} j_m(z)$$

där $j_m(z)$ är en s.k. sfärisk Besselfunktion. Speciellt

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \qquad J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} (\sin z - z\cos z)$$

3.5 En rektangulär vågledare med sidorna $a = 4$ cm och $b = 3$ cm är för $z < 0$ fylld med luft ($\epsilon = 1$) och för $z > 0$ fylld med ett dielektrikum med $\epsilon = 2$. TM-moden med den lägsta cut-off frekvensen propagerar i positiv z-riktning för $z < 0$. Frekvensen är vald så att den sammanfaller med cut-off frekvensen i området $z < 0$ för den näst lägsta TM-moden. Låt P_i och P_r vara tidsmedelvärdet av den totala effekten som flödar genom ett tvärsnitt av vågledaren för $z < 0$, för det inkommmande respektive reflekterade fältet.

a) Bestäm kvoten P_r/P_i.

b) Finns det någon frekvens för vilken $P_r = 0$?

3.6 Antag en cirkulär hålrumsvågledare med radien $a = 3$ cm.

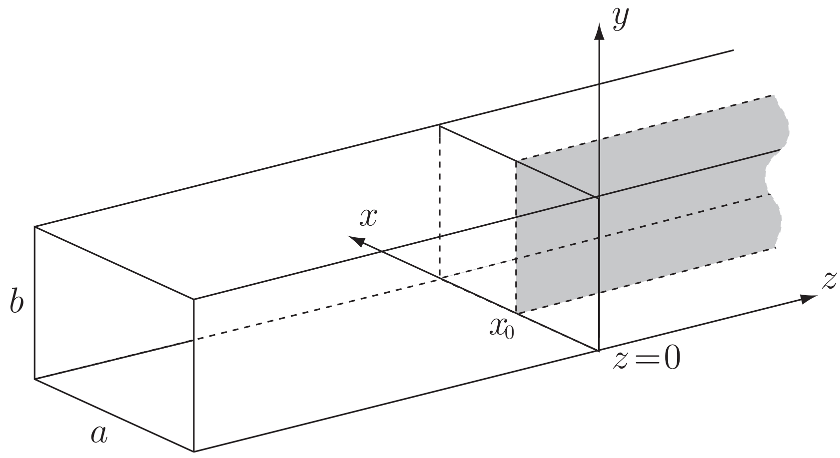
a) Bestäm vilka moder som kan propagera vid $f = 5$ GHz då vågledaren är luftfylld.

b) Antag att vågledaren fylls med ett plastmaterial som har relativa permittiviteten $\epsilon = 3$ och konduktiviteten $\sigma = 10^{-11}$ S/m. Bestäm dämpningen av den dominanta moden i dB/km som funktion av frekvensen.

3.7 En vågledare har ett ellipsformat tvärsnitt med halvaxlar a, b, där $b = \frac{2}{3}a$ dvs $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{3y}{2a})^2 = 1$. Bestäm den bästa övre och undre gräns för den lägsta TM-modens gränsfrekvens (uttryckta i a) som kan fås genom att jämföra med gränsfrekvenserna för vågledare med rektangulärt tvärsnitt och med cirkulärt tvärsnitt.

Ledning: Enligt variationskalkylen gäller att en undre gräns för gränsfrekvensen ges av gränsfrekvensen för en vågledare vars tvärsnitt omskriver ellipsen, och en övre gräns ges av gränsfrekvensen för en vågledare vars tvärsnitt omskrives av ellipsen.

3.8 I en rektangulär vågledare med måtten $0 < x < a$, $0 < y < b$, $a = 6$ cm, $b = 4$ cm sätter man in en mellanvägg i området $z > 0$, se figur 3.19. Mellanväggen är parallell med y-z-planet och befinner sig vid $x = x_0$. Både vågledarens väggar och mellanväggen är perfekt ledande. För ett visst värde på x_0 mäts P_i och P_r upp, där P_i och P_r är tidsmedelvärdet av effekten som transporteras i positiv respektive negativ z-led i delen $z < 0$. Om endast grundmoden TE_{10} propagerar i positiv z-led för $z < 0$ så gäller att $P_r/P_i = 1$ för alla frekvenser lägre än 3.75 GHz och $P_r/P_i < 1$ för frekvenser högre än 3.75 GHz.



Figur 3.19: Geometri för övning 3.8.

a) Bestäm x_0.

b) Vad är kvoten P_r/P_i då en TE_{03} mod propagerar i positiv riktning för $z < 0$ vid frekvensen 10 GHz?

c) Vad är kvoten P_r/P_i då en TE_{30} mod propagerar i positiv riktning för $z < 0$ vid frekvensen 20 GHz?

3.9 En cirkulär plattkondensator, med en radie som är mycket större än avståndet mellan plattorna och där utrymmet mellan plattorna är fyllt med luft, är given. Om man i första approximationen antar att det elektriska fältet, som varierar sinusformat i tiden, är oberoende av rumskoordinaterna och har toppvärdet E_0, vad blir då toppvärdet av det magnetiska fältet mellan plattorna.

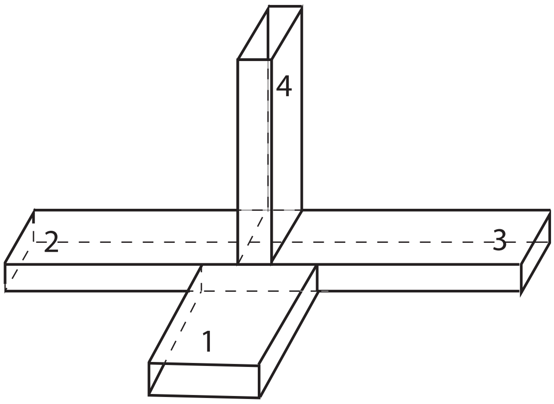
***3.10** Fältet i föregående uppgift uppfyller ekvationen $\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ men ej $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ på grund av att det är kvasistationärt. En bättre approximation till den korrekta lösningen fås genom att bestämma $\boldsymbol{E}$ ur $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ där $\boldsymbol{B}$ är den kvasistationära magnetiska induktionen given av föregående uppgift. Det erhållna fältet $\boldsymbol{E}$ kan sedan användas för att få en bättre approximation av $\boldsymbol{H}$ osv. Antag att plattorna i föregående uppgift är oändligt stora och låt vidare $\sigma = 0$ och $\epsilon \neq 1$ mellan plattorna. Visa med hjälp av den iterativa metoden beskriven ovan att en lösning som uppfyller Maxwells ekvationer ges av

$$\boldsymbol{H}(\rho, t) = -\frac{1}{c\mu_0} E_0 J_0'(\frac{\omega}{c}\rho)\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

där $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\epsilon\mu_0)}$ och och $J_0(x)$ är nollte ordningens Besselfunktion.

***3.11** a) Bestäm fältet i föregående uppgift genom att lösa Helmholtz ekvation för fältet $\boldsymbol{E} = E(\rho)\hat{\boldsymbol{z}}$, i ett område mellan två stora cirkulära plattor.

b) Antag att plattorna har radien a och att det vid $r = a$ finns en perfekt ledande mantelyta. Detta ger att det endast kan finnas fält med vissa frekvenser mellan plattorna. Bestäm dessa frekvenser.



Figur 3.20: Geometri för övning 3.17.

3.12 En vågledare har ett kvartscirkelformat tvärsnitt med radien R. Bestäm samtliga TE- och TM-moder.

3.13 En hålrumsvågledare avslutas med en perfekt ledande tvärsnittsyta. Visa att den ytström som induceras av en infallande mod ger upphov till den reflekterade moden samt till en "transmitterad" mod som släcker ut den infallande moden.

3.14 Visa att den upplagrade elektriska och magnetiska energin är lika stora i en resonanskavitet.

3.15 Antag en resonanskavitet med viss geometri. Visa att om alla längder skalas med en faktor K så förändras Q-värdet med en faktor $\sqrt{K}$ om konduktiviteten i väggarna ej ändras.

3.16
a) Bestäm Q för TE_{101}-moden i en rätvinklig parallellepiped med sidorna $a \times b \times d$.

b) Bestäm resonansfrekvensen och Q-värdet för TE_{101}-moden då $a = b = 2$ cm, $d = 4$ cm och kaviteten är tillverkad av koppar ($\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m).

c) Bestäm resonansfrekvensen och Q-värdet för TE_{101}-moden då $a = b = 20$ cm, $d = 40$ cm och kaviteten är tillverkad av koppar ($\sigma = 5.8 \cdot 10^7$ S/m).

3.17 Figuren visar ett magiskt T. Samtliga vågledare är av samma dimensioner $a \times b$ där $a > b$. Man skickar in grundmoden TE_{10} moden i portarna.

a) Antag att en TE_{10} skickas in i port 1 och att vi kan föorsumma den effekt som reflekteras tillbaks i port 1. Hur mycket effekt går ut i port 2, 3 respektive 4? Antag att det elektriska fältet vid en viss tidpunkt är riktat uppåt i ett tvärsnitt till port 2. Hur är det då riktat i ett tvärsnitt till port 3 om de båda tvärsnitten ligger på samma avstånd från symmetriplanet?

b) Antag att TE_{10} skickas in i port 4 och att vi kan försumma den effekt som reflekteras tillbaks i port 4. Hur mycket effekt går ut i port 1, 2 respektive 3? Antag att det elektriska fältet vid en viss tidpunkt är riktat uppåt i ett tvärsnitt till port 2. Hur är det då riktat i ett tvärsnitt till port 3 om de båda tvärsnitten ligger på samma avstånd från symmetriplanet?

Sammanfattning av kapitel 3

Modlösningar—TM- och TE-moder

Egenvärdesproblemet

$$\begin{cases} \nabla_T^2 v_n(\boldsymbol{\rho}) + k_{tn}^2 v_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \boldsymbol{\rho} \in \Omega \\ v_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TM-fallet)}$$

$$\begin{cases} \nabla_T^2 w_n(\boldsymbol{\rho}) + k_{tn}^2 w_n(\boldsymbol{\rho}) = 0 & \boldsymbol{\rho} \in \Omega \\ \dfrac{\partial w_n(\boldsymbol{\rho})}{\partial n} = 0 & \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{cases} \qquad \text{(TE-fallet)}$$

Normering

$$\iint_\Omega v_n(\boldsymbol{\rho}) v_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = \delta_{n,n'}$$

$$\iint_\Omega w_n(\boldsymbol{\rho}) w_{n'}(\boldsymbol{\rho})\, dxdy = \delta_{n,n'}$$

Egenmoder

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm}(\boldsymbol{r},\omega) = \{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) \pm v_n(\boldsymbol{\rho})\hat{\boldsymbol{z}}\}\, e^{\pm ik_{zn}z} \\ \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}(\boldsymbol{r},\omega) = \pm \boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) e^{\pm ik_{zn}z} \end{cases} \qquad \nu = \text{TM}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\pm}(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) e^{\pm ik_{zn}z} \\ \boldsymbol{H}_{n\nu}^{\pm}(\boldsymbol{r},\omega) = \left\{\pm \boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) + \eta_0^{-1} w_n(\boldsymbol{\rho})\hat{\boldsymbol{z}}\right\} e^{\pm ik_{zn}z} \end{cases} \qquad \nu = \text{TE}$$

Transversella modkomponenter

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) &= \frac{i}{k_{tn}^2(\omega)}\begin{cases} k_{zn}(\omega)\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TM} \\ -\dfrac{\omega}{c_0}\mu(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TE} \end{cases} \\ \eta_0 \boldsymbol{H}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega) &= \frac{i}{k_{tn}^2(\omega)}\begin{cases} \dfrac{\omega}{c_0}\epsilon(\omega)\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TM} \\ k_{zn}(\omega)\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho}), & \nu = \text{TE} \end{cases} \end{aligned}}$$

Modlösningar—TEM-mod

Potentialproblemet

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla_T^2\psi(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ &\psi(\boldsymbol{\rho}) = \ \text{konstant} \qquad \boldsymbol{\rho} \text{ på } \Gamma \end{aligned}}$$

Normering

$$\boxed{\iint_\Omega \nabla_T\psi(\boldsymbol{\rho})\cdot\nabla_T\psi(\boldsymbol{\rho})\,dxdy = 1}$$

Egenmod

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{E}_\nu^\pm(\boldsymbol{r},\omega) = \boldsymbol{E}_{T\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{\pm ikz} \\ \boldsymbol{H}_\nu^\pm(\boldsymbol{r},\omega) = \pm\boldsymbol{H}_{T\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{\pm ikz} \end{cases} \qquad \nu = \text{TEM}}$$

Transversella komponenter

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{E}_{T\,\mathrm{TEM}}(\boldsymbol{\rho},\omega)=-\nabla_T\psi(\boldsymbol{\rho},\omega)\\&\eta_0\boldsymbol{H}_{T\,\mathrm{TEM}}(\boldsymbol{\rho},\omega)=\frac{k(\omega)c_0}{\omega\mu(\omega)}\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{E}_{T\,\mathrm{TEM}}(\boldsymbol{\rho},\omega)\end{aligned}}$$

Allmän utveckling i moder

$$\boxed{\begin{cases}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega)=\displaystyle\sum_{\substack{n\\ \nu=\mathrm{TM,TE,TEM}}}\left(a_{n\nu}^{+}\boldsymbol{E}_{n\nu}^{+}(\boldsymbol{r},\omega)+a_{n\nu}^{-}\boldsymbol{E}_{n\nu}^{-}(\boldsymbol{r},\omega)\right)\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},\omega)=\displaystyle\sum_{\substack{n\\ \nu=\mathrm{TM,TE,TEM}}}\left(a_{n\nu}^{+}\boldsymbol{H}_{n\nu}^{+}(\boldsymbol{r},\omega)+a_{n\nu}^{-}\boldsymbol{H}_{n\nu}^{-}(\boldsymbol{r},\omega)\right)\end{cases}\qquad\begin{cases}z\in[z_1,z_2]\\ \boldsymbol{\rho}\in\Omega\end{cases}}$$

Ortogonalitetsrelationer

$$\boxed{\begin{aligned}&\iint_\Omega\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\left\{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)\times\boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}^{*}(\boldsymbol{\rho},\omega)\right\}\,dS=\frac{1}{\eta_0}Y_{n\nu}^{E}\delta_{n,n'}\delta_{\nu,\nu'}\\&\iint_\Omega\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\left\{\boldsymbol{E}_{Tn\nu}(\boldsymbol{\rho},\omega)\times\boldsymbol{H}_{Tn'\nu'}(\boldsymbol{\rho},\omega)\right\}\,dS=-\frac{1}{\eta_0}Y_{n\nu}\delta_{n,n'}\delta_{\nu,\nu'}\end{aligned}}$$

Modadmittanser

$$\boxed{\begin{aligned}&Y_{n\nu}^{E}=\frac{\omega}{c_0k_{tn}^2(\omega)}\begin{cases}k_{zn}(\omega)\epsilon^*(\omega), & \nu=\mathrm{TM}\\ k_{zn}^{*}(\omega)\mu(\omega), & \nu=\mathrm{TE}\end{cases}\\&Y_{n\nu}=\frac{\omega k_{zn}(\omega)}{c_0k_{tn}^2(\omega)}\begin{cases}\epsilon(\omega), & \nu=\mathrm{TM}\\ \mu(\omega), & \nu=\mathrm{TE}\end{cases}\end{aligned}}$$

Effekttransport

Allmänt

$$\iint_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega)\, dxdy$$
$$= \sum_{\substack{n \\ \nu=\text{TM,TE}}} \frac{1}{2\eta_0} \operatorname{Re} Y_{n\nu}^E \Big\{ \left|a_{n\nu}^+\right|^2 e^{-2\operatorname{Im} k_{zn} z} - \left|a_{n\nu}^-\right|^2 e^{2\operatorname{Im} k_{zn} z} + 2i \operatorname{Im}\left(a_{n\nu}^- a_{n\nu}^{+*} e^{-2i\operatorname{Re} k_{zn} z}\right) \Big\}$$

Propagerande moder

$$\iint_{\Omega} \hat{\boldsymbol{z}} \cdot <\boldsymbol{S}(t)> (\boldsymbol{r},\omega)\, dxdy = \pm \sum_{k_{tn}<k(\omega)} \frac{Y_{n\nu}^E}{2\eta_0} \left|a_{n\nu}^{\pm}\right|^2$$

Förluster i väggar

$$P(z) = P(0) e^{-\alpha z}$$
$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{\omega\epsilon\epsilon_0}{\sigma\delta k_{tn}^2 k_{zn}} \displaystyle\oint_\Gamma |\hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla_T v_n|^2\, dl, & \text{TM-mod} \\ \dfrac{k_{tn}^2}{\omega\sigma\delta\mu_0\mu k_{zn}} \displaystyle\oint_\Gamma \left(\frac{k_{zn}^2}{k_{tn}^4} |\nabla_T w_n|^2 + |w_n|^2 \right) dl, & \text{TE-mod} \end{cases}$$

Källor och utvecklingskoefficienter

$$a_{n\nu}^{\pm} = \frac{\eta_0}{2Y_{n\nu}} \iiint_V \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}_{n\nu}^{\mp}\, dv$$

Resonanskaviteter

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{R_s}{\mu_0}\left(\dfrac{\varepsilon_\ell}{d} + \dfrac{1}{2k_{tn}^2}\int\limits_\Gamma |\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla_T v_n(\boldsymbol{\rho})|^2 d\Gamma\right) & \text{TM} \\ \dfrac{R_s}{\mu_0 k_{n\ell}^2}\left(\dfrac{2k_{z\ell}^2}{d} + \dfrac{1}{2}\int\limits_\Gamma \dfrac{k_{z\ell}^2}{k_{tn}^2}|\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla_T w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 + k_{tn}^2|w_n(\boldsymbol{\rho})|^2 d\Gamma\right) & \text{TE} \end{cases}$$

$$Q = \frac{\omega_{n\ell}}{2\alpha} \qquad B = 2\alpha$$

Kapitel 4

Transienta förlopp i vågledare

I kapitel 3 beskrevs hur tidsharmoniska fält propagerar i vågledare. I många tillämpningar är fälten inte rent tidsharmoniska utan varierar i tiden. Signalerna som skickas består då av ett helt spektrum av frekvenser. Ett sätt att analysera utbredningen av tidsberoende signaler är att Fouriertransformera signalen som sänds in, propagera det Fouriertransformerade fältet och därefter bestämma utsignalen genom en invers Fouriertransform. I detta kapitel presenteras en mer allmän formulering där en propagator härleds. Genom att falta propagatorn med en inkommande puls kan man bestämma fältet i en godtycklig punkt i vågledaren. Propagatorn motsvarar alltså vågledarens impulssvar och är oberoende av den inkommande pulsen, vågledarens geometri och av modtalet.

Vågutbredning av en *fix* mod i en hålrumsvågledare vid given fix frekvens bestäms av

$$\begin{aligned} E_z(\boldsymbol{r},\omega) &= v(\boldsymbol{\rho})a(z,\omega) = v(\boldsymbol{\rho})A(\omega)e^{ik_z(\omega)z} \quad \text{(TM-fallet)} \\ H_z(\boldsymbol{r},\omega) &= w(\boldsymbol{\rho})a(z,\omega) = w(\boldsymbol{\rho})A(\omega)e^{ik_z(\omega)z} \quad \text{(TE-fallet)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

där det longitudinella vågtalet är

$$k_z(\omega) = \left\{k^2(\omega) - k_t^2\right\}^{1/2} = \left\{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_t^2\right\}^{1/2}$$

Notera att $v(\boldsymbol{\rho})$, $w(\boldsymbol{\rho})$, k_t^2 och c_0 är oberoende av (vinkel)frekvensen[1] ω. Vi vill nu transformera detta uttryck till tidsdomänen, för att kunna studera transienta vågfenomen i vågledaren. Den inversa Fouriertransformen av (4.1) ger fältens z-komponent i en punkt z

$$\begin{aligned} E_z(\boldsymbol{r},t) &= v(\boldsymbol{\rho})a(z,t) \\ H_z(\boldsymbol{r},t) &= w(\boldsymbol{\rho})a(z,t) \end{aligned}$$

där

$$a(z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a(z,\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{ik_z(\omega)z}e^{-i\omega t}\,d\omega$$

[1]Med en enkel modifikation av analysen i detta kapitel kan man hantera fall där ljushastigheten c inte nödvändigtvis är lika med ljushastigheten i vakuum. Även fall med materialdispersion (ϵ frekvensberoende) kan behandlas. För en dielektrisk vågledare är k_t, $v(\boldsymbol{\rho})$ och $w(\boldsymbol{\rho})$ frekvensberoende, vilket leder till ett komplicerat vågutbredningsproblem som ej behandlas här.

Amplituden $A(\omega)$ bestäms av fältets Fouriertransform vid $z = 0$

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} a(0,t)e^{i\omega t}\, dt$$

Det visar sig lämpligt att i (4.1) addera och subtrahera en faktor $\exp\{i\omega z/c_0\}$, som bestäms av funktionen $k_z(\omega)$:s asymptotiska uppförande för höga frekvenser, dvs.

$$a(z,\omega) = A(\omega)e^{i\omega z/c_0} + A(\omega)e^{i\omega z/c_0}\left(e^{ik_z(\omega)z - i\omega z/c_0)} - 1\right)$$

En produkt av Fouriertransformer ger en faltning i tidsplanet, och multiplikation med en faktor $\exp(-i\omega t_0)$ ger en tidsförskjutning t_0 i tidsplanet. Det elektriska fältets z-komponent i en punkt z kan då skrivas

$$a(z,t) = a(0, t - z/c_0) + \int_{-\infty}^{\infty} P(z, t - z/c_0 - t')a(0,t')\, dt' \tag{4.2}$$

där

$$\begin{cases} P(z, t - z/c_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{ik_z(\omega)z - iz\omega/c_0} - 1\right) e^{-i\omega(t - z/c_0)}\, d\omega \\ a(0,t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

Funktionen $P(z,t)$ kallas fältets propagatorkärna, eftersom den avbildar fältet vid $z = 0$ på fältet i en inre punkt z.

Följande Fouriertransformpar är nu lämpliga att använda

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - e^{-ib\omega + ib\left(\omega^2 - a^2\right)^{1/2}}\right) e^{-i\omega t}\, d\omega = H(t)ab\dfrac{J_1\left(a\sqrt{t^2 + 2bt}\right)}{\sqrt{t^2 + 2bt}} \\ ab\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{J_1\left(a\sqrt{t^2 + 2bt}\right)}{\sqrt{t^2 + 2bt}}e^{i\omega t}\, dt = 1 - e^{-ib\omega + ib\left(\omega^2 - a^2\right)^{1/2}} \end{cases}$$

där $H(t)$ är Heavisidefunktionen ($H(t) = 1, t \geq 0$, annars noll) och vidare gäller att $\mathrm{Im}(\omega^2 - a^2)^{1/2} > 0$, $\arg w \in [0, 2\pi]$.

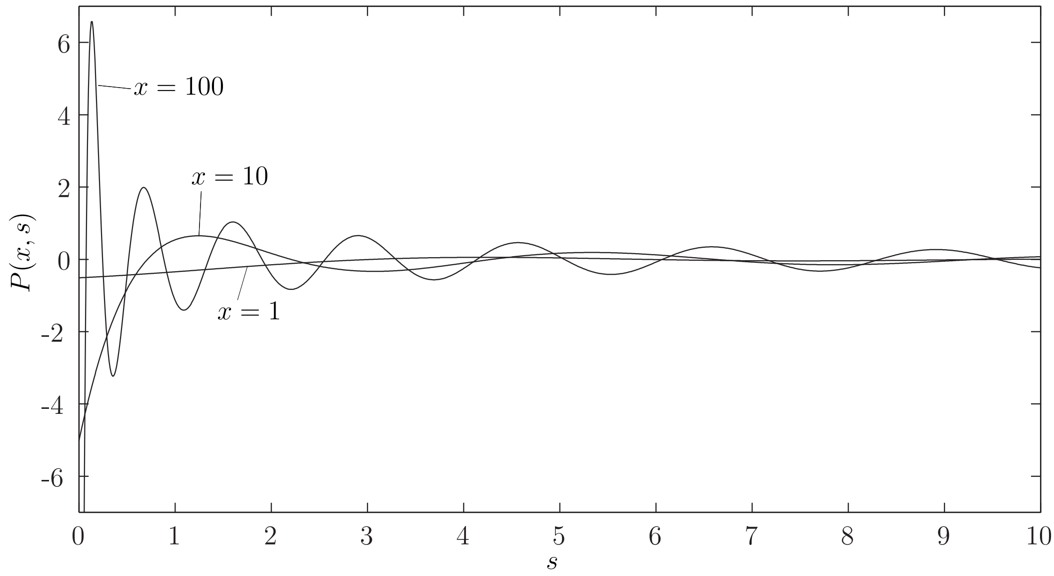
Propagatorkärnan $P(z,t)$ blir

$$P(z,t) = -c_0 k_t z \frac{J_1\left(k_t\sqrt{c_0^2t^2 + 2zc_0t}\right)}{\sqrt{c_0^2t^2 + 2zc_0t}} H(t)$$

och fältet skriver vi

$$a(z, t + z/c_0) = a(0,t) - c_0 k_t z \int_{-\infty}^{t} \frac{J_1\left(k_t\sqrt{c_0^2(t-t')^2 + 2c_0z(t-t')}\right)}{\sqrt{c_0^2(t-t')^2 + 2c_0z(t-t')}} a(0,t')\, dt' \tag{4.3}$$

Parametern t är nu inte absolut tid, utan anger tiden från vågfronten som fortplantas med hastigheten c_0.



Figur 4.1: Propagatorkärnan $P(x, s)$ vid tre olika lägen x. Notera att då x ökar trycks propagatorkärnan ihop och ökar i amplitud. Man kan visa att i gränsen $x \to \infty$ så gäller $P(x, s) \to -\delta(s)$.

Vi ser att koordinaterna

$$\begin{cases} x = k_t z \\ s = k_t c_0 t \end{cases} \tag{4.4}$$

är lämpliga dimensionslösa parametrar för att beskriva vågutbredningen i vågledaren. Med dessa dimensionslösa koordinater utbreder sig alla moder på samma sätt, nämligen

$$\begin{aligned} u(x, s + x) &= u(0, s) + \int_{-\infty}^{s} P(x, s - s')u(0, s')\, ds' \\ P(x, s) &= -x \frac{J_1\left(\sqrt{s^2 + 2xs}\right)}{\sqrt{s^2 + 2xs}} H(s) \end{aligned}$$

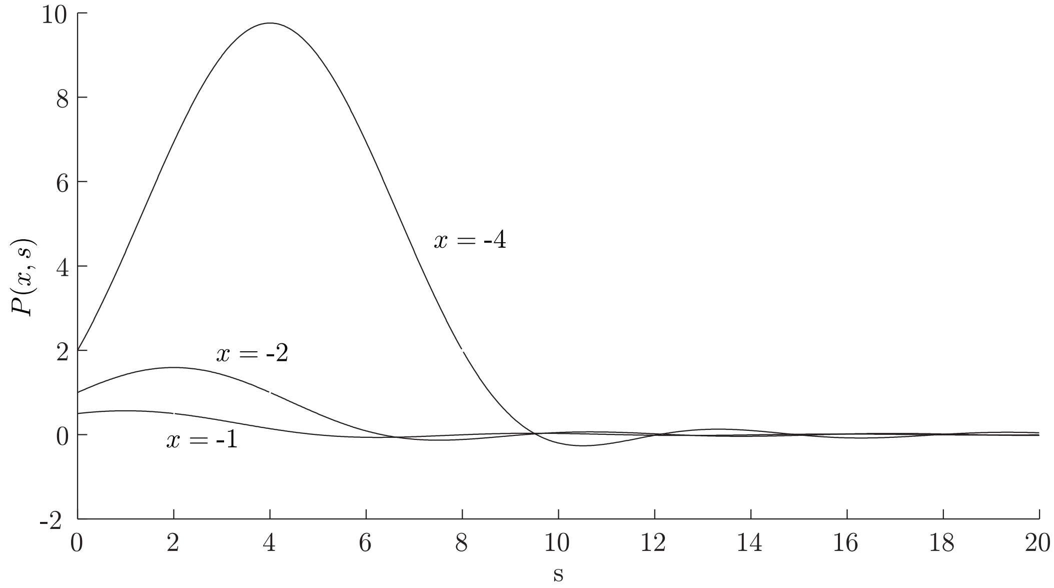
De olika moderna skiljer sig endast åt genom en skalning i rum och tid, som ges av (4.4). I figur 4.1 finns propagatorkärnan $P(x, s)$ för tre olika lägen x.

Exempel 4.1
Om $a(0, t) = \delta(t)$ gäller

$$a(z, t + z/c_0) = \delta(t) + P(z, t)$$

Vågfronten är alltså en deltafunktion som rör sig med vakuumhastigheten och denna följs av en svans som ges av $P(z, t)$. I figur 4.1 ser vi att svansen oscillerar snabbare ju längre in i vågledaren pulsen propagerar. ∎

Exempel 4.2
Uttrycket (4.3) gäller även för negativa z. Propagatorn $P(z, t)$ kan då användas för att rekonstruera hur en puls såg ut för negativa z. Man kan också använda den för att bestämma



Figur 4.2: Propagatorkärnan $P(x,s)$ för tre olika negativa x.

vilken puls man skall skicka in i en vågledare för att få ut en puls med önskad form, se problem 2. Då $t < -2z/c_0$ blir rotuttrycket i propagatorkärnan imaginärt och kan skrivas $\sqrt{c_0^2t^2 + 2c_0zt} = i\sqrt{-2c_0zt - c_0^2t^2}$. Appendix A ger då

$$P(z,t) = -c_0k_tz\frac{I_1(k_t\sqrt{-2c_0zt - c_0^2t^2})}{\sqrt{-2c_0zt - c_0^2t^2}}H(t)$$

där $I_1(y) = -iJ_1(iy)$ är den modifierade Besselfunktionen. I figur 4.2 finns $P(x,s)$ plottad för några negativa värden på x. ∎

Övningar till kapitel 4

4.1 Då en puls utbreder sig i ett dispersivt material bildas en så kallad precursor". Detta är den del av signalen som kommer direkt efter vågfronten. Vågekvationen för ett dispersivt material ges av

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')E(z,t')\,dt' = 0$$

där $\chi(t)$ är susceptibilitetskärnan för det dispersiva materialet och E är en komponent av det elektriska fältet. Susceptibilitetskärnan relaterar förskjutningsfältet till det elektriska fältet genom den konstitutiva relationen

$$D(z,t) = \varepsilon_0(E(z,t) + \int_{-\infty}^{t} \chi(t-t')E(z,t')\,dt')$$

För frekvenser i det optiska området är Lorentzmodellen en bra modell för de flesta material. Om materialet är förlustfritt ger denna modell

$$\chi(t) = \omega_p^2 \sin(\omega_0 t)/\omega_0 \, H(t)$$

där ω_p kallas plasmafrekvensen, ω_0 är resonansfrekvensen för de bundna elektronerna och $H(t)$ är Heavisidefunktionen. Om precursorn definieras som den del av signalen som anländer inom ett tidsintervall $\Delta t << 1/\omega_0$ direkt efter vågfronten, visa då att precursorn i ett dispersivt material satisfierar samma ekvation som ett transient fält i en vågledare.

4.2 I en vågledare med längd L skickas en puls av en mod med transversellt vågtal k_t. Man vill att pulsen skall vara en fyrkantpuls då den gått igenom vågledaren, dvs.

$$a(L, t) = H(t) - H(t - t_0)$$

Bestäm formen av den puls som skickas in i vågledaren. Svaret får innehålla en integral med känd integrand.

4.3 Visa att propagator kärnan $P(z, t)$ satisfierar ekvationen

$$P(z_1 + z_2, t) = P(z_1, t) + P(z_2, t) + \int_0^t P(z_1, t - t')P(z_2, t')\, dt'$$

Sammanfattning av kapitel 4

Propagatorn

$$E_z(\boldsymbol{r},t) = v(\boldsymbol{\rho})a(z,t)$$

$$a(z,t) = a(0,t-z/c_0) + \int_{-\infty}^{\infty} P(z,t-z/c_0-t')a(0,t')\,dt'$$

$$P(z,t) = -c_0 k_t z \frac{J_1\left(k_t\sqrt{c_0^2t^2+2zc_0t}\right)}{\sqrt{c_0^2t^2+2zc_0t}} H(t)$$

Kapitel 5

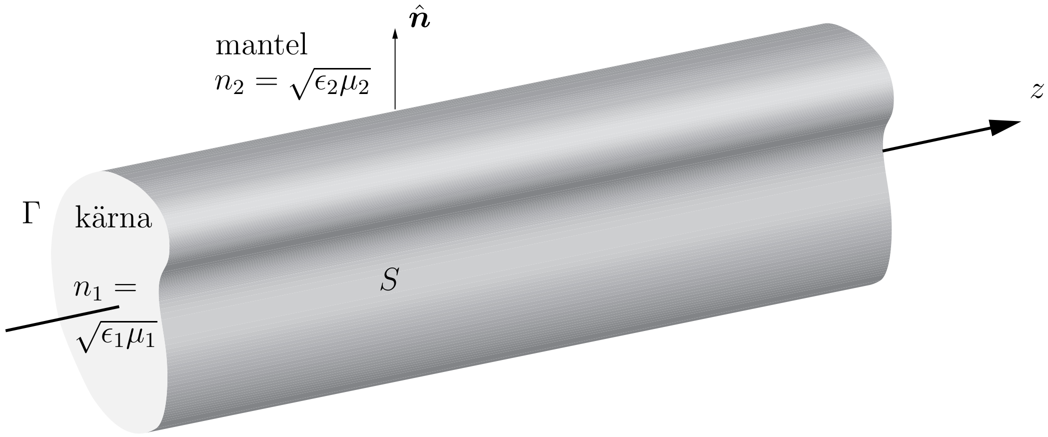
Dielektrisk vågledare

I detta avsnitt behandlas dielektriska vågledare. Vågorna leds i ett dielektriskt område som har lägre fashastighet, och därmed större brytningsindex, än det omgivande materialet. För att förstå hur ett dielektriskt område kan leda vågor gör vi följande tankeexperiment. Om man befinner sig under vatten och tittar upp mot vattenytan så fungerar ytan som en spegel, om vinkeln mellan siktlinjen och ytan är tillräckligt liten. Om man dessutom har en vattenyta under sig så fungerar även denna som en spegel. Det betyder att ljus som skickas in tillräckligt snett mot en av ytorna kommer att studsa mellan dem med låg dämpning, och vattnet mellan ytorna fungerar därmed som en plan dielektrisk vågledare.

En stor del av kapitlet behandlar den optiska fibern. Den vanligaste typen av optisk fiber är cirkulär och består av kvartsglas. Det innersta området, kärnan, är dopat med något ämne, ofta germaniumdioxid. Kärnan får på detta sätt ett brytningsindex som är lite större än det omgivande kvartsglaset och kan därmed leda vågor. Våglängden på de vågor som sänds genom fibern är vald så att dämpningen i fibern blir minimal. För kvartsglasfibrer används våglängden $\lambda = 1.55\,\mu$m, vilket ligger i det infraröda området. Vid denna våglängd är dämpningen mycket liten. I fiberoptisk kommunikation är det idag inte dämpningen utan dispersionen som är den begränsande faktorn för överföringshastigheten. Dispersionen leder till att pulserna som skickas i fibern breddas, vilket gör att en serie av distinkta pulser efter en viss sträcka smetats ut så att de inte kan särskiljas. Ett nödvändigt villkor för att få liten dispersion är att endast en mod skickas i vågledaren. Man brukar därför göra kärnan så tunn att endast grundmoden kan propagera vid den aktuella våglängden. En fiber i vilken endast en mod sänds kallas singelmodfiber.

5.1 Allmänna dielektriska vågledare

Vi antar en homogen oändligt lång och rak dielektrisk cylinder vars begränsningsyta är S och vars tvärsnitt har den sammanhängande randkurvan Γ, se figur 5.1. Cylindern har relativa permittiviteten ϵ_1 och permeabiliteten μ_1 och omges av ett yttre område med parametrarna ϵ_2 och μ_2. Det inre området kallas *kärnan* och det yttre *manteln.* Vi antar att kärnan och manteln är förlustfria dvs. ϵ och μ är reella och



Figur 5.1: Dielektrisk vågledare med mantelytan S.

positiva överallt. Brytningsindexen för de båda områdena ges av

$$n_1 = c_0/c_1 = \sqrt{\epsilon_1\mu_1}$$
$$n_2 = c_0/c_2 = \sqrt{\epsilon_2\mu_2}$$

Vågtalet i vakuum ges av $k_0 = \omega/c_0$, och vågtalen i det yttre respektive inre området ges av

$$k_1 = \omega/c_1 = k_0 n_1$$
$$k_2 = \omega/c_2 = k_0 n_2$$

5.1.1 Fält

I kapitel 2 gjorde vi en allmän uppdelning av fälten till Maxwells fältekvationer, som vi kan använda för den dielektriska vågledaren. Vi studerar endast fält som propagerar i positiv z-riktning och kan då göra följande ansats:

$$\begin{cases} E_z(\boldsymbol{r},\omega) = v(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{ik_z(\omega)z} \\ \eta_0 H_z(\boldsymbol{r},\omega) = w(\boldsymbol{\rho},\omega)e^{ik_z(\omega)z} \end{cases}$$

Notera att vi har utnyttjat att k_z måste vara lika överallt för att randvillkoren skall kunna satisfieras. Till skillnad från fallet med hålrumsvågledare är nu funktionerna v och w frekvensberoende. I fortsättningen skriver vi inte ut frekvensberoendet explicit som argument hos v, w och k_z. Funktionerna v och w är lösningar till egenvärdesproblemen

$$\begin{cases} \nabla_T^2 v(\boldsymbol{\rho}) + {k_1}_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ \nabla_T^2 w_p(\boldsymbol{\rho}) + {k_1}_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = 0 \end{cases} \quad \text{då } \boldsymbol{\rho} \text{ är innanför } \Gamma, \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \nabla_T^2 v(\boldsymbol{\rho}) + {k_2}_t^2 v(\boldsymbol{\rho}) = 0 \\ \nabla_T^2 w_p(\boldsymbol{\rho}) + {k_2}_t^2 w(\boldsymbol{\rho}) = 0 \end{cases} \quad \text{då } \boldsymbol{\rho} \text{ är utanför } \Gamma \tag{5.2}$$

De transversella vågtalen k_{it} är relaterade till vågtalen k_i och det longitudinella vågtalet k_z enligt

$$k_{it}^2 = k_i^2 - k_z^2, \quad i = 1, 2$$

5.1.2 Randvillkor

För att bestämma $v(\boldsymbol{\rho})$ och $w(\boldsymbol{\rho})$ och det longitudinella vågtalet k_z behöver vi bestämma randvillkoren på begränsningsytan S. Dessa randvillkor skiljer sig från de som använts för hålrumsvågledaren. Vi undersöker först hur randvillkoren för de elektriska och magnetiska fälten ser ut på mantelytan S till den dielektriska vågledaren.

Randvillkoren vid avsaknad av ytströmmar på en skiljeyta med normal $\hat{\boldsymbol{n}}$ är (se ekvation (1.12) på sidan 7)

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1 = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_2 \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1 = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S$$

På samma sätt som vid analysen av randvillkoren för en hålrumsvågledare med metalliska väggar, se kapitel 3, inför vi uppdelningen i en longitudinell och en transversell del av fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$, vilket ger att

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_T + \hat{\boldsymbol{z}} E_z) \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{H}_T + \hat{\boldsymbol{z}} H_z) \end{cases} \qquad \text{är kontinuerliga över ytan } S$$

Vi får på samma sätt som i kapitel 3 att

$$\begin{cases} E_z \\ H_z \end{cases} \text{och} \begin{cases} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_T \\ \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_T \end{cases} \qquad \text{är kontinuerliga över ytan } S$$

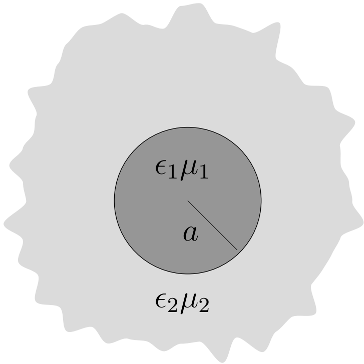
Vi kan nu utnyttja (2.7) för att skriva om fältens transversella delar i deras longitudinella komponenter. Resultatet av denna omskrivning blir att följande storheter är kontinuerliga över ytan S:

$$\begin{cases} E_z \\ H_z \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{k_t^2}\left[k_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T E_z) - \omega\mu_0\mu(\omega)\dfrac{\partial H_z}{\partial n}\right] \\ \dfrac{1}{k_t^2}\left[k_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T H_z) + \omega\epsilon_0\epsilon(\omega)\dfrac{\partial E_z}{\partial n}\right] \end{cases}$$

Eftersom faktorn $e^{ik_z z}$ är gemensam för alla termerna gäller kontinuitet även för följande funktioner:

$$\begin{cases} v(\boldsymbol{\rho}) \\ w(\boldsymbol{\rho}) \end{cases} \quad \text{och} \quad \begin{cases} \dfrac{1}{k_t^2}\left[k_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T v(\boldsymbol{\rho})) - \dfrac{\omega\mu(\omega)}{c_0}\dfrac{\partial w(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}\right] \\ \dfrac{1}{k_t^2}\left[k_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot (\hat{\boldsymbol{n}} \times \nabla_T w(\boldsymbol{\rho})) + \dfrac{\omega\epsilon(\omega)}{c_0}\dfrac{\partial v(\boldsymbol{\rho})}{\partial n}\right] \end{cases} \tag{5.3}$$

Dessa fyra randvillkor utgör ett system av fyra ekvationer. Förutom randvillkoren på mantelytan behövs även villkoren att fälten är begränsade överallt, speciellt för $\rho = \infty$ och inuti kärnan.



Figur 5.2: Cirkulär dielektrisk vågledare.

5.2 Cirkulär dielektrisk vågledare

Vi antar nu en cirkulär dielektrisk vågledare. Det inre området är då en cirkulär dielektrisk cylinder med radien $\rho = a$ och materialparametrarna ϵ_1 och μ_1. Det yttre området, $\rho > a$, (manteln) har då parametrarna ϵ_2 och μ_2, se figur 5.2. Båda områdena antas förlustfria (dvs. ϵ och μ är reella). Vi kan enkelt generalisera våra resultat till en vågledare med förluster i efterhand. Till skillnad från hålrumsvågledaren i kapitel 3 kan man nu förvänta sig att randvillkoren (5.3) leder till att z-komponenterna för det elektriska och magnetiska fälten i allmänhet kopplar till varandra.

Precis som för hålrumsvågledaren finns det för en fix frekvens ett ändligt antal propagerande moder, dvs. moder vars gränsfrekvens ligger under vågens frekvens. Det visar sig att grundmoden har noll som gränsfrekvens och därmed propagerar för alla frekvenser. Genom att göra kärnan tillräckligt tunn kommer endast den lägsta moden att propagera. Vi kallar en sådan vågledare för singelmodvågledare.

5.2.1 Vågledarmoder

Vi går över till att härleda fältuttryck, dispersionsrelationer, gränsfrekvenser och effektflöden för en cirkulär dielektrisk vågledare. Vi har sett tidigare att $v(\rho, \phi)$ och $w(\rho, \phi)$ satisfierar Helmholtz ekvation i de två områdena, se (5.1) och (5.2). I cylinderkoordinater gäller

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{5.4}$$

En separation av Helmholtz ekvation i cylinderkoordinater ger i azimutled egenfunktionssystemet $\{1, \sin m\phi, \cos m\phi\}$, där $m = 1, 2...$, se avsnitt 3.5.3 på sidan 58. Randvillkoren medför också att om v har ϕ-beroendet $\sin m\phi$ så måste w ha ϕ-beroendet $\cos m\phi$ och vice versa. Om vi begränsar oss till vågor som propagerar i positiv z-riktning kan vi skriva

$$\begin{aligned} v(\rho, \phi) &= \psi_E(\rho) \sin m\phi \\ w(\rho, \phi) &= \psi_H(\rho) \cos m\phi \end{aligned}$$

där funktionerna ψ_E och ψ_H satisfierar Bessels differentialekvation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}+k_t^2\right)\psi(\rho)=0 \tag{5.5}$$

Vi har här valt att låta E_z vara en udda funktion i ϕ, och därmed blir H_z jämn, men vi kan naturligtvis lika gärna låta E_z vara jämn och H_z udda, dvs. låta $\sin m\phi$ och $\cos m\phi$ byta plats. Bessels differentialekvation har två oberoende lösningar, se appendix A, vilka kan skrivas på några alternativa sätt.

- Om k_t är reell och vi betraktar det inre området $\rho < a$ ansätts

$$\psi(\rho)=AJ_m(k_t\rho)+\tilde{A}N_m(k_t\rho) \tag{5.6}$$

  där J_m är Besselfunktionen och N_m är Neumannfunktionen av ordning m.

- Om k_t är reell och vi betraktar det yttre området ansätter vi istället

$$\psi(\rho)=AH_m^1(k_t\rho)+\tilde{A}H_m^2(k_t\rho) \tag{5.7}$$

  där H_m^1 och H_m^2 är Hankelfunktionen av första respektive andra slaget, se appendix A.

- Om k_t är imaginär är det lämpligt att utveckla $\psi(\rho)$ i modifierade Besselfunktioner oavsett om vi är i det inre eller yttre området

$$\psi(\rho)=AK_m(q\rho)+\tilde{A}I_m(q\rho) \tag{5.8}$$

  där $q^2=-k_t^2$.

De olika typerna av Besselfunktioner finns beskrivna i appendix A. Anledningen till de olika alternativen är att man genom att utnyttja randvillkoren för $\rho = 0$ respektive $\rho=\infty$ direkt kan sätta en av konstanterna A och $\tilde{A}$ till noll.

Vi kommer framförallt att studera propagerande moder. För dessa gäller $k_{1t}^2 > 0$ och $k_{2t}^2 < 0$. Eftersom fälten är ändliga då $\rho = 0$ och $\rho = \infty$ kan vi göra följande ansats

$$\begin{cases} v_m(\rho,\phi)=AJ_m(h\rho)\sin m\phi \\ w_m(\rho,\phi)=BJ_m(h\rho)\cos m\phi \end{cases} \qquad \rho<a$$

$$\begin{cases} v_m(\rho,\phi)=CK_m(q\rho)\sin m\phi \\ w_m(\rho,\phi)=DK_m(q\rho)\cos m\phi \end{cases} \qquad \rho>a \tag{5.9}$$

där vi infört

$$\begin{cases} h=k_{1t} \\ q=-ik_{2t} \end{cases}$$

Om vi istället betraktar fält där $v_m(\rho,\phi)$ är en jämn funktion i ϕ gör vi ansatsen

$$\begin{cases} v_m(\rho,\phi)=AJ_m(h\rho)\cos m\phi \\ w_m(\rho,\phi)=-BJ_m(h\rho)\sin m\phi \end{cases} \qquad \rho<a$$

$$\begin{cases} v_m(\rho,\phi) = CK_m(q\rho)\cos m\phi \\ w_m(\rho,\phi) = -DK_m(q\rho)\sin m\phi \end{cases} \qquad \rho > a \tag{5.10}$$

Med denna ansats blir de karakteristiska ekvationerna och relationerna mellan A, B, C och D desamma för det udda och jämna fallet.

För att relatera Fourierkoefficienterna A, B, C och D till varandra och dessutom bestämma det longitudinella vågtalet k_z (och därmed de transversella vågtalen $k_{1t} = h$ och $k_{2t} = iq$), utnyttjar vi att fälten i ekvation (5.3) är kontinuerliga vid $\rho = a$. I det cirkulära fallet gäller $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}$ vilket gör att ekvation (5.3) kan skrivas

$$\begin{cases} v(a^-,\phi) = v(a^+,\phi) \\ w(a^-,\phi) = w(a^+,\phi) \\ \dfrac{1}{h^2}\left[\dfrac{k_z}{a}\dfrac{\partial v(a^-,\phi)}{\partial\phi} - \dfrac{\omega\mu_1}{c_0}\dfrac{\partial w(a^-,\phi)}{\partial\rho}\right] = -\dfrac{1}{q^2}\left[\dfrac{k_z}{a}\dfrac{\partial v(a^+,\phi)}{\partial\phi} - \dfrac{\omega\mu_2}{c_0}\dfrac{\partial w(a^+,\phi)}{\partial\rho}\right] \\ \dfrac{1}{h^2}\left[\dfrac{k_z}{a}\dfrac{\partial w(a^-,\phi)}{\partial\phi} + \dfrac{\omega\epsilon_1}{c_0}\dfrac{\partial v(a^-,\phi)}{\partial\rho}\right] = -\dfrac{1}{q^2}\left[\dfrac{k_z}{a}\dfrac{\partial w(a^+,\phi)}{\partial\phi} + \dfrac{\omega\epsilon_2}{c_0}\dfrac{\partial v(a^+,\phi)}{\partial\rho}\right] \end{cases}$$

Detta ger de fyra ekvationerna

$$\begin{pmatrix} J_m(ha) & 0 & -K_m(qa) & 0 \\ 0 & J_m(ha) & 0 & -K_m(qa) \\ \frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & -\frac{\omega\mu_1}{c_0h}J_m'(ha) & \frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) & -\frac{\omega\mu_2}{c_0q}K_m'(qa) \\ \frac{\omega\epsilon_1}{c_0h}J_m'(ha) & -\frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & \frac{\omega\epsilon_2}{c_0q}K_m'(qa) & -\frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

Kravet för att dessa ekvationer skall ha icke-triviala lösningar är att koefficientdeterminanten är noll, dvs.

$$\begin{vmatrix} J_m(ha) & 0 & -K_m(qa) & 0 \\ 0 & J_m(ha) & 0 & -K_m(qa) \\ \frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & -\frac{\omega\mu_1}{c_0h}J_m'(ha) & \frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) & -\frac{\omega\mu_2}{c_0q}K_m'(qa) \\ \frac{\omega\epsilon_1}{c_0h}J_m'(ha) & -\frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & \frac{\omega\epsilon_2}{c_0q}K_m'(qa) & -\frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) \end{vmatrix} = 0$$

Determinantvillkoret ger den karakteristiska ekvationen för det longitudinella vågtalet k_z.

Vi utvecklar determinanten längs den övre raden och får

$$\begin{aligned} &J_m(ha)\begin{vmatrix} J_m(ha) & 0 & -K_m(qa) \\ -\frac{\omega\mu_1}{c_0h}J_m'(ha) & \frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) & -\frac{\omega\mu_2}{c_0q}K_m'(qa) \\ -\frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & \frac{\omega\epsilon_2}{c_0q}K_m'(qa) & -\frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) \end{vmatrix} \\ &-K_m(qa)\begin{vmatrix} 0 & J_m(ha) & -K_m(qa) \\ \frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & -\frac{\omega\mu_1}{c_0h}J_m'(ha) & -\frac{\omega\mu_2}{c_0q}K_m'(qa) \\ \frac{\omega\epsilon_1}{c_0h}J_m'(ha) & -\frac{mk_z}{h^2a}J_m(ha) & -\frac{mk_z}{q^2a}K_m(qa) \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Genom att utveckla underdeterminanterna fås följande ekvation

$$\begin{aligned} m^2\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)^2\left(\frac{k_z}{k_0}\right)^2 \\ = \left(\frac{\mu_1J_m'(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{\mu_2K_m'(qa)}{qaK_m(qa)}\right)\left(\frac{\epsilon_1J_m'(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{\epsilon_2K_m'(qa)}{qaK_m(qa)}\right) \end{aligned} \tag{5.12}$$

där vi använt $k_0 = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Denna ekvation är en andragradsekvation i uttrycket $J_m'(ha)/(haJ_m(ha))$. Om vi löser ekvationen för denna term fås två lösningar

$$\begin{aligned}\frac{J_m'(ha)}{haJ_m(ha)} &= -\frac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\frac{\mu_1\epsilon_2+\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}\\ &\pm\left[\left(\frac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\frac{\mu_1\epsilon_2-\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}\right)^2+\left(\frac{mk_z}{k_1}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{5.13}$$

Vi får alltså två uppsättningar av lösningar till (5.12), den ena för plustecknet och den andra för minustecknet. Detta betyder att vi får två uppsättningar av moder. De som ges av ekvationen med plustecken kallar vi för EH-moder och de andra för HE-moder. De karakteristiska ekvationerna är ekvationer för det longitudinella vågtalet k_z. De motsvarande transversella vågtalen i kärnan och manteln ges av $h = \sqrt{k_1^2 - k_z^2}$ respektive $k_{2t} = iq$, där $q^2 = k_z^2 - k_2^2 = k_1^2 - k_2^2 - h^2$.

Vi definierar gränsfrekvensen för en mod som den lägsta frekvens för vilken moden propagerar utan att dämpas. Om q^2 är reell och positiv, dämpas vågorna exponentiellt i radiell led i manteln eftersom argumentet i de modifierade Besselfunktionerna i ekvation (5.9) då är reellt och positivt. Om däremot q^2 är negativ eller komplex läcker moderna effekt i ρ-led och dämpas därmed i z-led. Det är därför naturligt att definiera gränsfrekvensen som frekvensen för vilken $(qa)^2 = 0$, dvs. $qa = 0$. Vid gränsfrekvensen gäller således $h = \sqrt{k_1^2 - k_2^2} = k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

När den karakteristiska ekvationen är löst och k_z är bestämt kan man uttrycka tre av koefficienterna A, B, C och D i den fjärde. Från (5.11) fås följande relationer:

$$\frac{C}{A} = \frac{D}{B} = \frac{J_m(ha)}{K_m(qa)} \tag{5.14}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{mk_z}{k_0}\left(\frac{1}{h^2a^2}+\frac{1}{q^2a^2}\right)\left(\frac{\mu_1 J_m'(ha)}{haJ_m(ha)}+\frac{\mu_2 K_m'(qa)}{qaK_m(qa)}\right)^{-1} \tag{5.15}$$

5.2.2 TE- och TM-moder

I det axialsymmetriska fallet gäller $m = 0$. Vi ser att de udda moderna har $E_z = 0$ och $H_z \neq 0$, dvs. de är TE-moder. De jämna moderna har $E_z \neq 0$ och $H_z = 0$ och är alltså TM-moder. Ekvationssystemet (5.11) delas upp i de två oberoende systemen

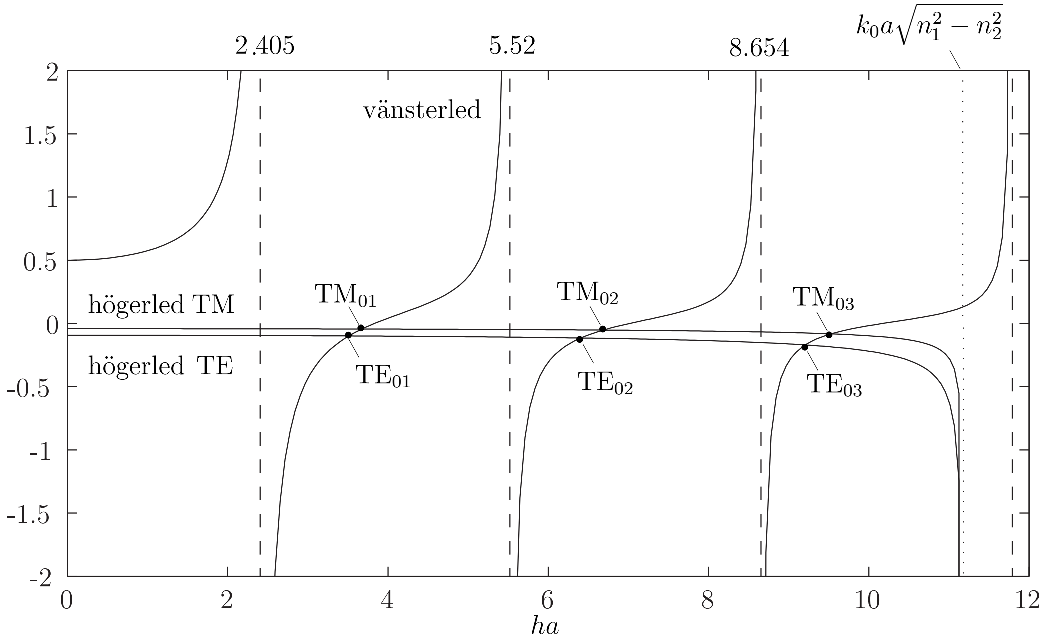
$$\begin{pmatrix} J_0(ha) & -K_0(qa) \\ \frac{\epsilon_1}{ha}J_0'(ha) & \frac{\epsilon_2}{qa}K_0'(qa)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ C_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \tag{5.16}$$

för TM-moderna och

$$\begin{pmatrix} J_0(ha) & -K_0(qa) \\ \frac{\mu_1}{ha}J_0'(ha) & \frac{\mu_2}{qa}K_0'(qa)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_0 \\ D_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

för TE-moderna. Om vi utnyttjar att $J_0' = -J_1$ och $K_0' = -K_1$ ger determinantvillkoret den karakteristiska ekvationen

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\frac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)} \tag{5.18}$$



Figur 5.3: Vänster- och högerleden för de karakteristiska ekvationerna för TE- och TM-moder, (5.19) och (5.18), då $n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$ och $k_0a = 10$. Skärningspunkterna ger det transversella vågtalet $h = k_{1t}$ för de propagerande moderna. Den prickade vertikala linjen anger den högsta frekvens för vilken högerledet är reellt. De streckade vertikala linjerna är belägna vid nollställena till Besselfunktionen J_0. Vid dessa nollställen är vänsterledet singulärt.

som bestämmer k_z för TM-moderna och

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)} \tag{5.19}$$

som bestämmer k_z för TE-moderna. Vänster- och högerleden finns plottade som funktion av ha i figur 5.3. Kärnan har i denna figur $\mu_1 = 1$ och $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.5$ samt en radie som motsvarar $k_0a = 10$. Manteln består av luft med $\epsilon_2 = \mu_2 = 1$. Värdena motsvarar en vågledare av kvartsglas i luft. Skärningspunkterna ger lösningarna, och vi ser att det i detta fall finns tre propagerande moder av vardera TE- och TM-moder.

Gränsfrekvenserna för TE- och TM-moderna fås genom att sätta $q = 0$ i de karakteristiska ekvationerna. För små qa gäller de asymptotiska formerna (se appendix A och ekvation (A.5) på sidan 132)

$$\begin{aligned} K_0(qa) &\sim -\ln(qa/2) - \gamma + O((qa)^2) \\ K_m(qa) &\sim 2^{m-1}(m-1)!(qa)^{-m} \end{aligned} \tag{5.20}$$

Högerleden går alltså mot $-\infty$ då qa går mot noll. Denna punkt motsvarar $ha = k_0a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ och är markerad med en prickad vertikal linje i figuren 5.3. För att vänsterledet skall gå mot oändligheten krävs att $J_0(ha)$ går mot noll. Gränsfrekvensen för TE- och TM-moderna bestäms då av

$$f_{0n} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{\xi_{0n}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$
$$\text{där } J_0(\xi_{0n}) = 0$$

De första nollställena till $J_0(x)$ finns givna i tabell A.1 på sidan 128. Det minsta nollstället är $\xi_{01} = 2.405$ vilket innebär att för frekvenser $f < 2.405c_0/2\pi a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ finns inga propagerande TE- och TM-moder.

5.2.3 EH-moder

För $m \geq 1$ kan endast moder där både E_z och H_z är skilda från noll existera. Dessa moder kallas hybridmoder och är alltså varken TE- eller TM-moder. Om vi utnyttjar att $J'_m(z) = \frac{m}{z}J_m(z) - J_{m+1}$ kan den karakteristiska ekvationen som bestämmer det longitudinella vågtalet för EH-moderna, se (5.13), skrivas

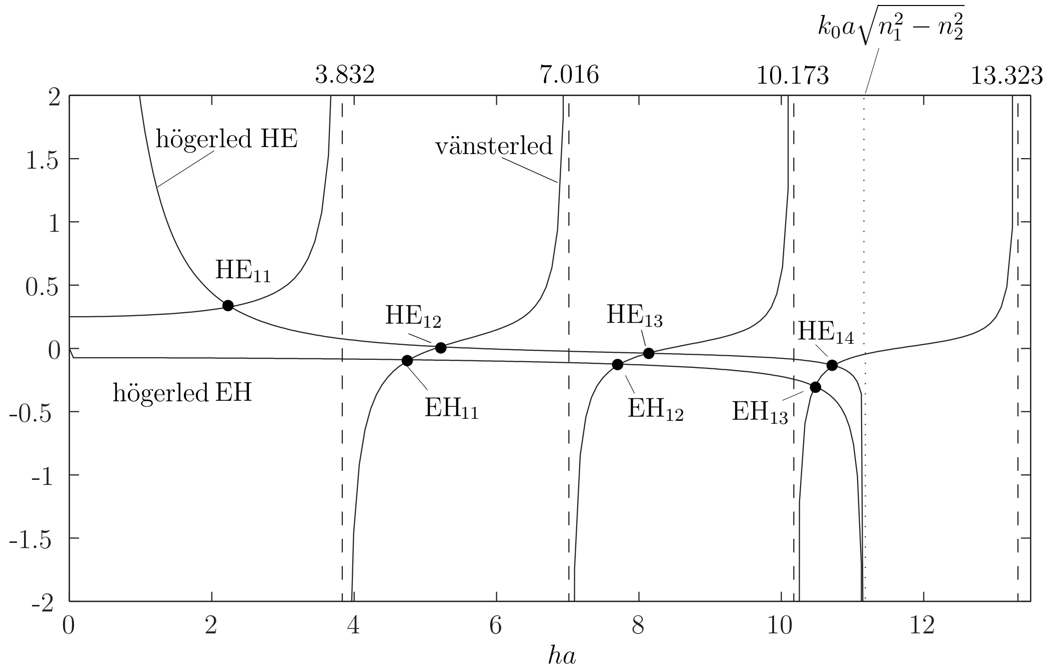
$$\frac{J_{m+1}(ha)}{haJ_m(ha)} = \frac{K'_m(qa)}{2qaK_m(qa)}\frac{\mu_1\epsilon_2 + \mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1} + \frac{m}{(ha)^2}$$
$$- \left[\left(\frac{K'_m(qa)}{2qaK_m(qa)}\frac{\mu_1\epsilon_2 - \mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{mk_z}{k_1}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

Vänster- och högerleden, i fallet $m = 1$, finns plottade som funktion av ha i figuren 5.4. De relevanta parametrarna är $m = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.5$, $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 = 1$ och $k_0a = 10$. Skärningspunkterna ger lösningarna och vi ser att det i detta fall finns tre propagerande EH-moder vid den aktuella frekvensen. De vertikala, streckade linjerna markerar de värden för vilka vänsterledet går mot oändligheten, medan den vertikala, prickade linjen markerar punkten $q \to 0$ där högerleden går mot $-\infty$. Då frekvensen sänks så att $k_0a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 3.832$ finns det inga skärningspunkter för EH-ekvationen och därmed inga propagerande EH-moder. Dispersionskurvorna för de lägsta EH-moderna finns i figur 5.5. I grafen är det normerade longitudinella vågtalet, k_z/k_0, plottat som funktion av den normerade frekvensen $V = k_0a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. Liksom i figurerna 5.3 och 5.4 är $\mu_1 = \mu_2 = 1$ $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.5$ och $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 = 1$.

Gränsfrekvenserna för EH-moderna är de frekvenser för vilka vänster- och högerleden skär varandra vid $q = 0$, dvs. $ha = k_0a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. Genom att använda den asymptotiska formen (5.20) fås att högerledet går mot oändligheten då $q \to 0$ och alltså måste $J_m(ha)$ vara noll då $q = 0$. Gränsfrekvenserna för EH-moderna ges alltså av

$$f_{mn}^{EH} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{\xi_{mn}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

där $J_m(\xi_{mn}) = 0$. I figur 5.5 startar modernas dispersionskurvor vid gränsfrekvensen V, där $J_m(V) = 0$ och $k_z = k_2$.



Figur 5.4: Vänster- och högerleden för karakteristiska ekvationen för EH- och HE-moderna med $m=1$, $\mu_1=\mu_2=1$ $\sqrt{\epsilon_1}=n_1=1.5$, $\sqrt{\epsilon_2}=n_2=1$ och $k_0a=10$. Skärningspunkterna ger det transversella vågtalet h för de propagerande moderna.

5.2.4 HE-moder

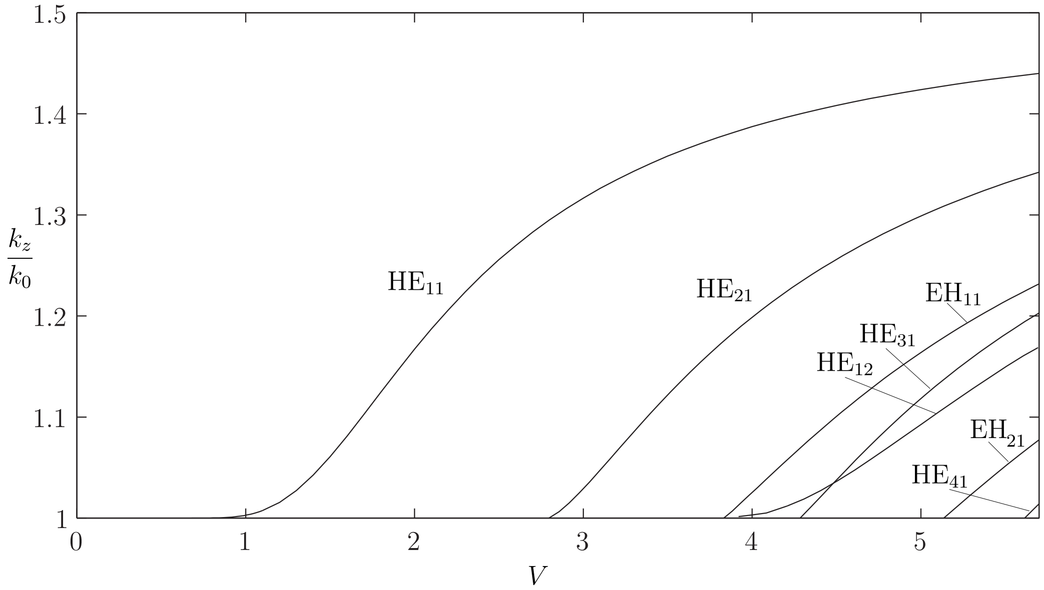
Den karakteristiska ekvationen som bestämmer det longitudinella vågtalet för HE-moderna kan skrivas (se (5.13))

$$\begin{aligned}\frac{J_{m+1}(ha)}{haJ_m(ha)} &= \frac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\frac{\mu_1\epsilon_2+\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}+\frac{m}{(ha)^2}\\ &+\left[\left(\frac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\frac{\mu_1\epsilon_2-\mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}\right)^2+\left(\frac{mk_z}{k_1}\right)^2\left(\frac{1}{q^2a^2}+\frac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{5.21}$$

Vänsterledet är detsamma som för EH-moderna men högerledet har ändrats. I figur 5.4 ser vi att det finns fyra propagerande HE-moder med $m=1$. Om frekvensen sänks kommer den streckade linjen att röra sig åt vänster. Oavsett hur mycket den sänks finns det alltid minst en skärningspunkt mellan kurvorna. Den lägsta HE-moden för $m=1$ kommer alltså att propagera för alla frekvenser. Det är denna mod som utnyttjas i singelmodfibern.

Gränsfrekvenserna för HE-moderna är lite besvärligare att bestämma än för EH-moderna. För $m=1$ kan man ta med de två första termerna i serieutvecklingen av $K_1(qa)$ och $K_2(qa)$. Man ser då att högerledet i (5.21) går mot oändligheten då $qa\to 0$ och därmed ges gränsfrekvenserna av

$$f_{1n}=\frac{c_0}{2\pi a}\frac{\xi_{1n}}{\sqrt{n_1^2-n_2^2}} \tag{5.22}$$



Figur 5.5: Det normerade longitudinella vågtalet k_z/k_0 som funktion av den normerade frekvensen $V = k_0 a\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}$ för de lägsta HE och EH-moderna då $n_1 = 1.5$ och $n_2 = 1$.

där ξ_{1n} är nollställe nummer n till J_1 (nollstället $\xi_{11} = 0$ räknas då som det första nollstället), dvs.

$$J_1(\xi_{1n}) = 0$$

Genom att ta med tre termer i den asymptotiska utvecklingen av $K_m(qa)$ då $qa \to 0$ kan man visa att gränsfrekvenserna för moderna HE_{mn} ges av

$$f_{mn} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{x_{mn}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \tag{5.23}$$

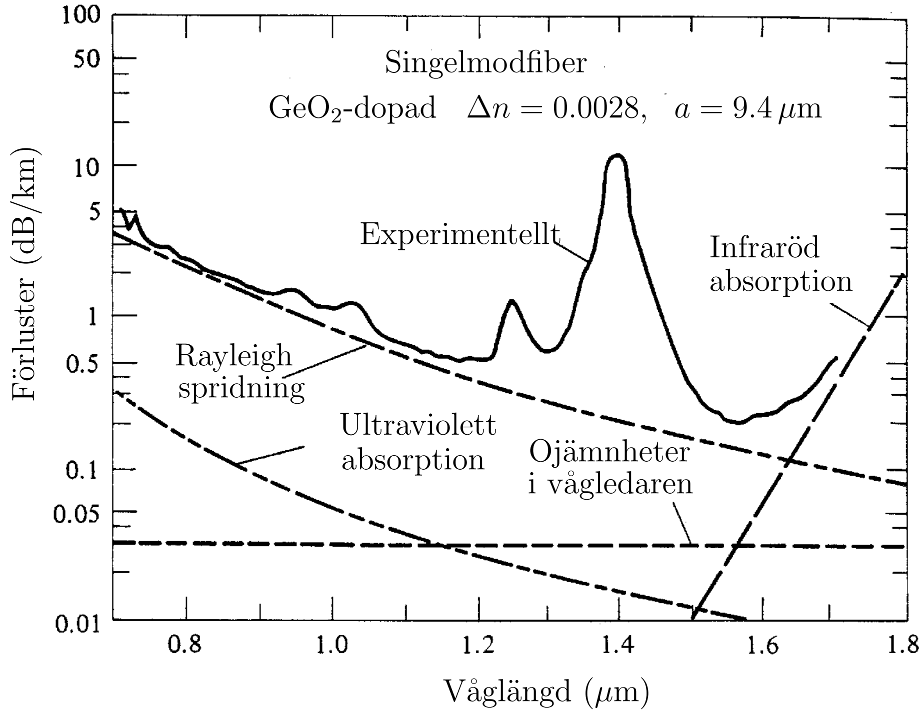
där

$$x_{mn}\frac{J_m(x_{mn})}{J_{m-1}(x_{mn})} = (m-1)\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_2^2}, \qquad m > 1$$

Dispersionskurvorna för de lägsta HE-moderna finns avbildade i figur 5.5. I grafen är det normerade longitudinella vågtalet, k_z/k_0, plottat som funktion av den normerade frekvensen $V = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$. De normerade gränsfrekvenserna för HE_{1n}-moderna startar där $J_1(V) = 0$, och gränsfrekvenserna för HE_{mn}-moderna med $m > 1$ startar där $VJ_m(V)/J_{m-1}(V) = (m-1)(n_1^2 + n_2^2)/n_2^2$.

5.3 Optiska fibern

En optisk fiber är en dielektrisk vågledare med mycket låg dämpning för optiska frekvenser. Den vanligaste typen av optisk fiber är cirkulär och har en mantel av kvartsglas och en kärna av dopat kvartsglas. Kärnan får på detta sätt ett brytningsindex som är lite större än mantelns, se figur 1.6 på sidan 23. Våglängden



Figur 5.6: Förlustspektrum för en singelmodfiber vars kärna är kvartsglas dopad med GeO_2.

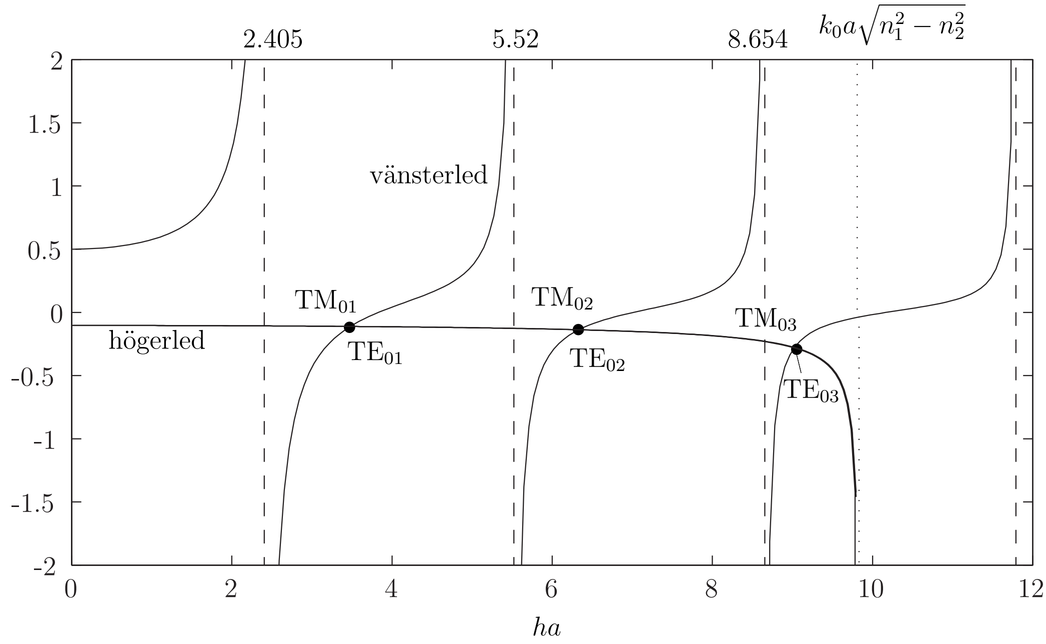
på det ljus som sänds genom fibern är vald så att dämpningen i fibern blir minimal. I figur 5.6 ges förlusterna i en svagt dopad kärna som funktion av våglängden. Några av de effekter som ger upphov till förlusterna är också inritade. Vi ser att förlusterna är som minst vid vakuumvåglängden $\lambda = 1.55\,\mu$m, vilket ligger i det infraröda området. Det är denna våglängd som oftast används i fiberkommunikation. För att undvika dispersion används singelmodfibrer, vilket innebär att endast HE_{11} moden kan propagera. Frekvensen skall då ligga under gränsfrekvensen för de näst lägsta moderna vilka är TE_{01} och TM_{01}. Gränsfrekvensen för TE_{01} och TM_{01} ges av $k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 2.405$, där a är kärnans radie. För en singelmodfiber skall alltså gälla att $k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405$.

Exempel 5.1
Om vi antar en fiber med $n_1 = 1.5028$ och $n_2 = 1.5$ där infrarött ljus med vakuumvåglängden $\lambda = 1.55\,\mu$m används ger villkoret för singelmodfibern att

$$a < 2.405/(k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}) = 2.405\lambda/(2\pi\sqrt{n_1^2 - n_2^2})$$

Detta motsvarar att kärnans radie uppfyller $a < 6.5\,\mu$m. ∎

I figur 5.7 finns vänster- och högerleden i de karakteristiska ekvationerna för TE- och TM-moderna, se (5.19) och (5.18), plottade som funktion av det transversella vågtalet i kärnan, h, multiplicerat med radien a. Fibern har $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.52$, $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 = 1.50$ och $k_0 a = 40$. Eftersom $n_1/n_2 \approx 1$ är de karakteristiska ekvationerna för TE- och TM-moderna nästan identiska, vilket framgår av figuren.

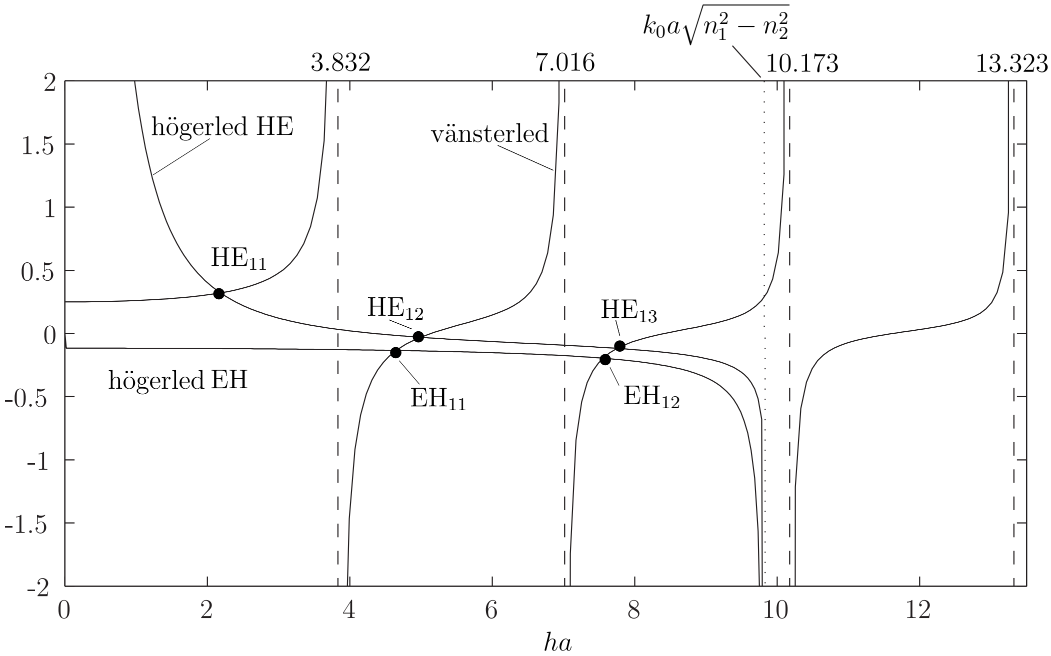


Figur 5.7: Vänster- och högerleden för karakteristiska ekvationen för TE- och TM-moder då $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.52$, $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 = 1.50$ och $k_0 a = 40$. Skärningspunkterna ger det transversella vågtalet $h = k_{1t}$ för de propagerande moderna. Den prickade vertikala linjen anger den högsta frekvens för vilken högerleden är reella. De streckade vertikala linjerna är belägna vid nollställena till Besselfunktionen J_0, vid dessa lägen är vänsterledet singulärt.

Skärningspunkterna ger lösningarna till de karakteristiska ekvationerna, och i detta fall finns tre propagerande moder av vardera TE och TM-moder. Då $q \to 0$ gäller att högerledet går mot $-\infty$. Denna punkt motsvarar $ha = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ och är markerad med en streckad vertikal linje i figurerna. Motsvarande kurvor för EH- och HE-moderna med $m = 1$ ges i figuren 5.8. Vid $k_0 a = 40$ propagerar alltså moderna HE_{11}, HE_{12}, HE_{13}, EH_{11} och EH_{12}. I figur 5.9 finns dispersionskurvorna för de lägsta EH- och HE-moderna. Kurvorna visar det normerade longitudinella vågtalet k_z/k_0 som funktion av den normerade frekvensen $V = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$.

5.3.1 Linjärpolariserade moder

I figur 5.9 ser man tydligt att dispersionskurvorna för EH_{11} och HE_{31} är i stort sett identiska liksom kurvorna för EH_{21} och HE_{41}. Detta är ingen tillfällighet utan inträffar för alla fibrer där $\mu_1 \approx \mu_2$ och $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$. Vi skall här se att moderna i en optisk fiber parar ihop sig och bildar linjärpolariserade vågor. För att se hur man kan konstruera dessa linjärpolariserade vågor från de moder som propagerar i fibern kan man först notera att de karakteristiska ekvationerna (5.13) för HE- och EH-moderna



Figur 5.8: Vänster- och högerleden av de karakteristiska ekvationerna för EH- och HE-moderna med $m = 1$. Den optiska fibern har $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.52$, $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 = 1.50$ och $k_0a = 40$. Skärningspunkterna ger det transversella vågtalet h för de propagerande moderna.

i fallet $\mu_1 \approx \mu_2$ och $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ approximativt kan skrivas

$$\frac{J_m'(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{K_m'(qa)}{qaK_m(qa)} \approx \pm\frac{mk_z}{k_1}\left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{h^2a^2}\right) \quad \begin{cases} \text{EH} \\ \text{HE} \end{cases}$$

För propagerande moder gäller $k_z = \sqrt{k_1^2 - h^2} = \sqrt{k_2^2 + q^2}$ där $h^2 > 0$ och $q^2 > 0$. Därmed gäller $k_2 < k_z < k_1$, vilket i sin tur innebär att i en fiber med $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ och $\mu_1 \approx \mu_2$ gäller för de propagerande moderna att $k_z \approx k_1 \approx k_2$ och alltså

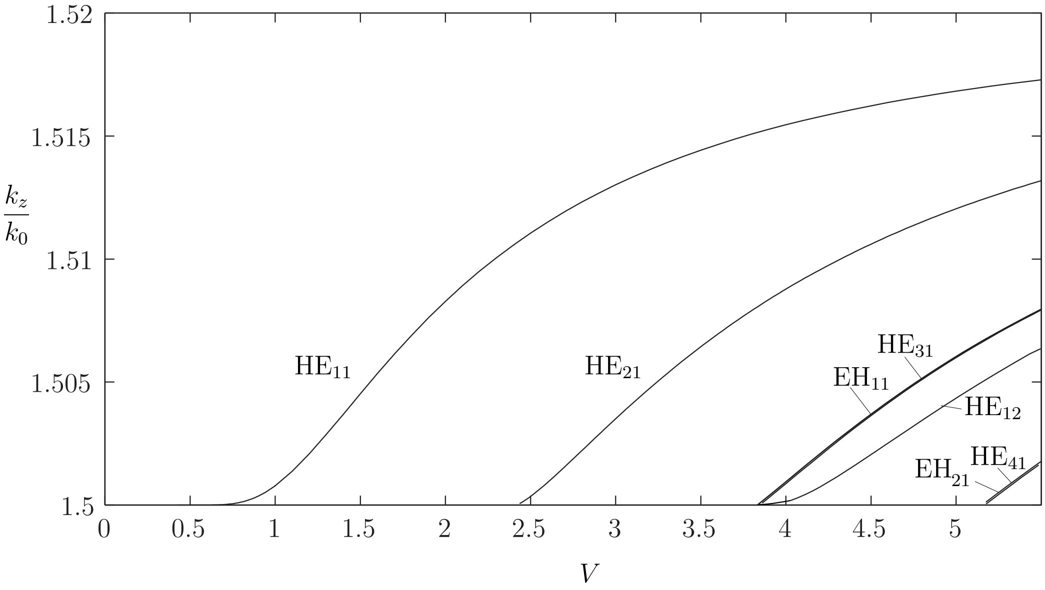
$$\frac{J_m'(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{K_m'(qa)}{qaK_m(qa)} \approx \pm m\left(\frac{1}{q^2a^2} + \frac{1}{h^2a^2}\right) \quad \begin{cases} \text{EH} \\ \text{HE} \end{cases}$$

Om vi jämför med ekvation (5.15) ser vi att då $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ och $\mu_1 \approx \mu_2$ gäller

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} \approx \pm n_1 \quad \begin{cases} \text{EH} \\ \text{HE} \end{cases}$$

Genom att använda följande formler från appendix A

$$J_m'(ha) = \frac{m}{ha}J_m(ha) - J_{m+1}(ha)$$
$$K_m'(qa) = \frac{m}{qa}K_m(ha) - K_{m+1}(ha)$$



Figur 5.9: Det normerade longitudinella vågtalet k_z/k_0 som funktion av den normerade frekvensen $V = k_0 a\sqrt{(n_1^2 - n_2^2)}$ för de lägsta HE och EH-moderna då $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sqrt{\epsilon_1} = n_1 = 1.52$ och $\sqrt{\epsilon_2} = n_2 = 1.50$. Vi ser att dispersionskurvorna för HE$_{31}$ och EH$_{11}$ är nästan identiska. Dessa bildar tillsammans den linjärpolariserade moden LP$_{21}$. På samma sätt bildar HE$_{41}$ och EH$_{21}$ den linjärpolariserade moden LP$_{31}$.

kan, då $n_1 \approx n_2$, karakteristiska ekvationen för EH-moderna skrivas

$$q\frac{K_m(qa)}{K_{m+1}(qa)} \approx -h\frac{J_m(ha)}{J_{m+1}(ha)}$$

Med hjälp av formlerna

$$\begin{aligned}
J_m'(ha) &= J_{m-1}(ha) - \frac{m}{ha}J_m(ha)\\
K_m'(qa) &= -K_{m-1}(ha) - \frac{m}{qa}K_m(ha)\\
J_{m-1}(ha) + J_{m+1}(ha) &= \frac{2m}{ha}J_m(ha)\\
K_{m+1}(qa) - K_{m-1}(qa) &= \frac{2m}{qa}K_m(qa)
\end{aligned}$$

kan den karakteristiska ekvationen för HE-moderna skrivas

$$q\frac{K_{m-2}(qa)}{K_{m-1}(qa)} \approx -h\frac{J_{m-2}(ha)}{J_{m-1}(ha)}$$

Vi ser att EH$_{m-1}$ moderna får samma karakteristiska ekvation som HE$_{m+1}$ moderna. Dessa moder är alltså degenererade då $\epsilon_1 \approx \epsilon_2$ och $\mu_1 \approx \mu_2$.

De transversella komponenterna av moderna relateras till E_z och H_z genom (2.7). I kärnan ges då de transversella komponenterna av de udda moderna (dvs. $E_z \sim \sin m\phi$) av

$$\begin{aligned}
\frac{E_\phi(\rho,\phi,z)}{\cos m\phi} &\approx \mp\frac{E_\rho(\rho,\phi,z)}{\sin m\phi} = iA\frac{k_1}{h}\left(\frac{m}{h\rho}J_m(h\rho) \mp J'_m(h\rho)\right)e^{ik_z z}\\
&\approx iA\frac{k_1}{h}e^{ik_z z}\begin{cases} J_{m+1}(h\rho), & \text{EH-moder}\\ J_{m-1}(h\rho), & \text{HE-moder}\end{cases}
\end{aligned}$$

Eftersom EH_{m-1} moderna har samma uppsättning egenvärden som HE_{m+1} moderna kan vi superponera två sådana moder. Om vi låter moderna ha samma amplitud A ges E_ϕ och E_ρ komponenterna av

$$\begin{aligned}
E_\phi(\rho,\phi,z) &\approx iA\frac{k_1}{h}e^{ik_z z}J_m(h\rho)\left(\cos(m-1)\phi + \cos(m+1)\phi\right)\\
&= 2iA\frac{k_1}{h}e^{ik_z z}J_m(h\rho)\cos m\phi\cos\phi
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
E_\rho(\rho,\phi,z) &\approx iA\frac{k_1}{h}e^{ik_z z}J_m(h\rho)\left(-\sin(m-1)\phi + \sin(m+1)\phi\right)\\
&= 2iA\frac{k_1}{h}e^{ik_z z}J_m(h\rho)\cos m\phi\sin\phi
\end{aligned}$$

Motsvarande E_x och E_y komponenter blir

$$\begin{aligned}
E_x(\rho,\phi,z) &= -E_\phi(\rho,\phi,z)\sin(\phi) + E_\rho(\rho,\phi,z)\cos(\phi) \approx 0\\
E_y(\rho,\phi,z) &= E_\phi(\rho,\phi,z)\cos(\phi) + E_\rho(\rho,\phi,z)\sin(\phi) \approx 2iA\frac{k_1}{h}e^{ik_z z}J_m(h\rho)\cos m\phi
\end{aligned}$$

Vågorna som bildas av de udda $\mathrm{HE}_{m+1,p}$ och $\mathrm{EH}_{m-1,p}$ blir alltså linjärpolariserade i y-led. Om vi hade valt jämna moder, dvs. där $E_z \sim \cos m\phi$, hade vågorna blivit linjärpolariserade i x-led istället. För $m = 1$ gäller att HE_{2p} moderna paras ihop med TE_{0p}-moderna (=de udda EH_{0p}-moderna) och TM_{0p} (=de jämna EH_{0p}-moderna) paras ihop med jämna HE_{2p}-moder. Då $m = 0$ gäller att HE_{1n}-moderna i sig själva är approximativt linjärpolariserade eftersom

$$\begin{aligned}
E_x(\rho,\phi,z) &= E_\rho(\rho,\phi,z)\cos\phi - E_\phi(\rho,\phi,z)\sin\phi = 0\\
E_y(\rho,\phi,z) &= E_\rho(\rho,\phi,z)\sin\phi + E_\phi(\rho,\phi,z)\cos\phi = iA\frac{k_1}{h}\left(\frac{1}{h\rho}J_1(h\rho) + J'_1(h\rho)\right)e^{ik_z z}
\end{aligned}$$

Man brukar kalla de linjärpolariserade moderna för LP-moder. Sammanfattningsvis gäller att LP-moderna bildas enligt följande

$$\begin{aligned}
&\mathrm{LP}_{0n} = \mathrm{HE}_{1n}\\
&\mathrm{LP}_{1n} = \mathrm{HE}_{2n} + \mathrm{TE}_{0n} \quad \text{(udda moder, dvs } E_z \sim \sin m\phi)\\
&\mathrm{LP}_{1n} = \mathrm{HE}_{2n} + \mathrm{TM}_{0n} \quad \text{(jämna moder, dvs } E_z \sim \cos m\phi)\\
&\mathrm{LP}_{mn} = \mathrm{HE}_{m+1\,n} + \mathrm{EH}_{m-1\,n}
\end{aligned}$$

Den karakteristiska ekvationen för LP$_{mn}$-moderna ges av

$$ha\frac{J_{m-1}(ha)}{J_m(ha)} = -qa\frac{K_{m-1}(qa)}{K_m(qa)} \tag{5.24}$$

eller ekvivalent

$$ha\frac{J_{m+1}(ha)}{J_m(ha)} = qa\frac{K_{m+1}(qa)}{K_m(qa)} \tag{5.25}$$

Gränsfrekvenserna för moderna ges av $q = 0$ och därmed

$$J_{m-1}(ha) = J_{m-1}\left(k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = 0$$

Det elektriska fältet för de udda moderna ges av

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}} A_{mn} J_m(h\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho < a \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}} C_{mn} K_m(q\rho)\cos m\phi e^{ik_z z} = \hat{\boldsymbol{y}} A_{mn}\dfrac{J_m(ha)}{K_m(qa)} K_m(q\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho > a \end{cases}$$

Motsvarande magnetfält fås enklast ur induktionslagen

$$\begin{cases} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{x}}(\eta_0\eta_1)^{-1} A_{mn} J_m(h\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho < a \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{x}}(\eta_0\eta_1)^{-1} A_{mn}\dfrac{J_m(ha)}{K_m(qa)} K_m(q\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho > a \end{cases} \tag{5.26}$$

där $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ är vågimpedansen i vakuum och $\eta_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ är relativa vågimpedansen i kärnan. Notera att $\eta_1 \approx \eta_2$. I uttrycket (5.26) för $\boldsymbol{H}$ har vi utnyttjat att z-komponenten av fältet är försumbart.

Effektflöde för LP-moder

Tidsmedelvärdet av effektflödet för en propagerande LP-mod ges av (se avsnitt 3.7)

$$<S_z> \hat{\boldsymbol{z}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left\{E_x H_y^* - E_y H_x^*\right\}\hat{\boldsymbol{z}} \tag{5.27}$$

Om vi sätter in uttrycken för fälten i en LP-mod fås

$$<S_z> = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta_0\eta_1}|A|^2 J_m^2(h\rho)\cos^2 m\phi, & \rho < a \\ \dfrac{1}{\eta_0\eta_1}|A|^2\left(\dfrac{J_m(ha)}{K_m(qa)}\right)^2 K_m^2(q\rho)\cos^2 m\phi, & \rho > a \end{cases} \tag{5.28}$$

Effekten som transporteras i kärnan respektive manteln ges av

$$P_{\text{kärna}} = \int_0^{2\pi}\int_0^a S_z\,\rho\,d\rho\,d\phi$$

$$P_{\text{mantel}} = \int_0^{2\pi}\int_a^{\infty} S_z\,\rho\,d\rho\,d\phi$$

Integralerna i ϕ-led ger 1 för $m=0$, och 1/2 för $m>0$, och integralerna i ρ-led kan räknas ut mha. följande formler (se appendix A):

$$\int_0^a J_m^2(h\rho)\rho\,d\rho = \frac{a^2}{2}\left(J_m^2(ha) - J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)\right)$$
$$\int_a^\infty K_m^2(q\rho)\rho\,d\rho = \frac{a^2}{2}\left(-K_m^2(qa) + K_{m-1}(qa)K_{m+1}(qa)\right)$$

Detta ger

$$P_{\text{kärna}} = \eta_1^{-1}\pi a^2|A|^2\left(J_m^2(ha) - J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)\right)(1+\delta_{m,0})/4$$
$$P_{\text{mantel}} = \eta_1^{-1}\pi a^2|A|^2\left(-J_m^2(ha) + K_{m-1}(qa)K_{m+1}(qa)J_m^2(ha)/K_m^2(qa)\right)(1+\delta_{m,0})/4$$

Genom att använda de karakteristiska ekvationerna (5.24) och (5.25) kan effekten som transporteras i manteln skrivas

$$P_{\text{mantel}} = -\eta_1^{-1}\pi a^2|A|^2\left(J_m^2(ha) + \frac{h^2}{q^2}J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)\right)(1+\delta_{m,0})/4 \tag{5.29}$$

Totala effekttransporten i fibern ges då av

$$P = -\frac{k_z}{2\omega\mu_0}\pi a^2|A|^2\left(1+\frac{h^2}{q^2}\right)J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)(1+\delta_{m,0})/4 \tag{5.30}$$

Genom att utnyttja (5.24) och (5.25) samt det faktum att $K_m(qa)$ alltid är positiv ser man att den totala effekttransporten alltid är positiv. Kvoten mellan den effekt som transporteras i manteln och den totala effekten ges av

$$\frac{P_{\text{mantel}}}{P} = \frac{1}{(k_0a)^2(n_1^2-n_2^2)}\left((ha)^2 + \frac{(qa)^2J_m^2(ha)}{J_{m-1}(ha)J_{m+1}(ha)}\right) \tag{5.31}$$

5.3.2 Effektivt brytningsindex och fashastighet

Det longitudinella vågtalet k_z kan för en propagerande mod skrivas på följande sätt:

$$k_z = n_ek_0 = n_e(n_1,n_2,\omega)\frac{\omega}{c_0} \tag{5.32}$$

där n_e är det *effektiva brytningsindexet*. *Fashastigheten* för en propagerande mod definieras av (jfr definitionen på sidan 27)

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c_0}{n_e} \tag{5.33}$$

För en propagerande mod gäller att $k_z = \sqrt{k_1^2-h^2} = \sqrt{k_2^2+q^2}$ där $h^2>0$ och $q^2>0$ och därmed gäller att $k_2<k_z<k_1$, $n_2<n_e<n_1$ och $c_1<v_f<c_2$.

5.3.3 Dispersion

Dispersionen är ett mått på hur frekvensberoende vågutbredningen är. För en vågledare kan dispersionen uppstå på följande tre sätt:

- Flermodsdispersion: Genom att olika moder har olika fashastigheter kommer en puls som består av flera moder att uppvisa dispersion.
- Vågledardispersion: För en enskild mod gäller att fashastigheten är en funktion av frekvensen. Därmed kommer en puls att breddas.
- Materialdispersion: Det material som finns i vågledaren kan ha en permittivitet, permeabilitet och även konduktivitet som är frekvensberoende. Detta är speciellt fallet för optiska fibrer där permittiviteten för den rena och dopade kvartsen är mycket frekvensberoende i det infraröda området. Det betyder att brytningsindexen n_1 och n_2 är frekvensberoende.

Eftersom vi i första hand är intresserade av singelmodfibrer behandlar vi inte flermodsdispersionen utan koncentrerar oss till vågledardispersionen och materialdispersionen. Summan av vågledardispersionen och materialdispersionen kallas för den *kromatiska dispersionen*. Man har valt att definiera storheten dispersion som

$$D = \frac{d\tau_g}{d\lambda} \tag{5.34}$$

där $\tau_g = \frac{dk_z}{d\omega}$ är grupplöptiden per längdenhet och λ är våglängden i vakuum. Vi ser att

$$\begin{aligned} \tau_g &= \frac{n_e}{c_0} - \frac{\lambda}{c_0}\frac{dn_e}{d\lambda} \\ D &= \frac{d\tau_g}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2 n_e}{d\lambda^2} \end{aligned}$$

För en vågledare som inte uppvisar någon kromatisk dispersion är grupplöptiden oberoende av våglängden och därmed är dispersionen noll. En puls som propagerar i en dispersionsfri vågledare kommer inte att breddas. Om D är stort varierar τ_g kraftigt med λ, och därmed kommer det att vara stora variationer i hastigheterna för de olika frekvenserna, vilket i sin tur ger stor pulsbreddning. Den kromatiska dispersionen kan skrivas

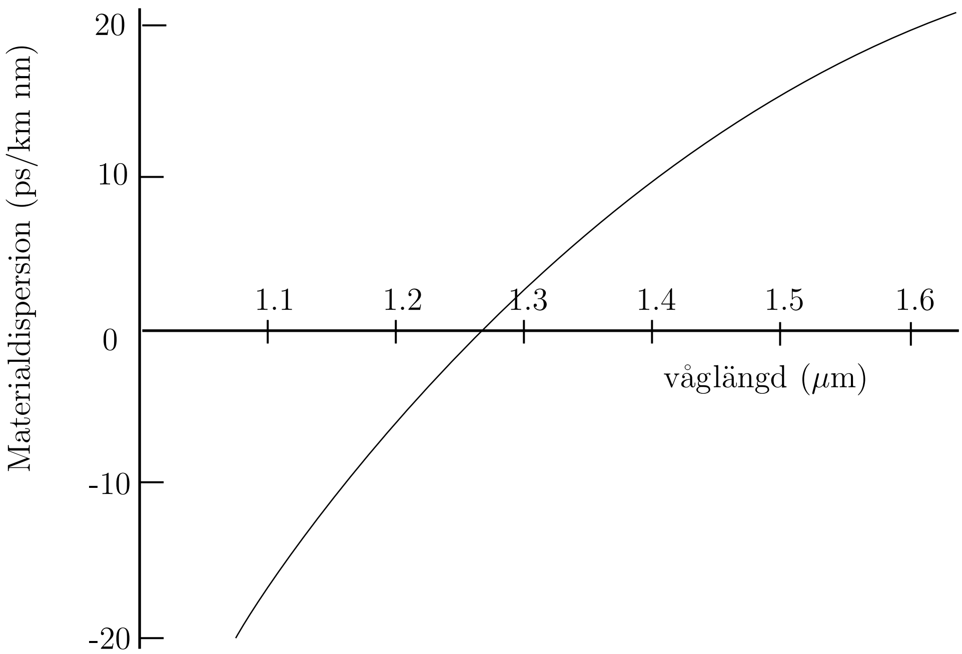
$$D = D_m + D_v \tag{5.35}$$

där D_m är bidraget från materialdispersionen och där D_v är bidraget från vågledardispersionen. Då $n_1 - n_2 << 1$ kan vi vid bestämningen av materialdispersionen göra approximationen $n_e \approx n_1$ vilket ger

$$D_m = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2 n_1}{d\lambda^2} \tag{5.36}$$

Då vi betraktar bidraget från vågledardispersionen håller vi n_1 och n_2 konstanta, dvs.

$$D_v = -\frac{\lambda}{c_0}\frac{d^2 n_e}{d\lambda^2}\Big|_{n_1, n_2 \text{ konst.}}$$



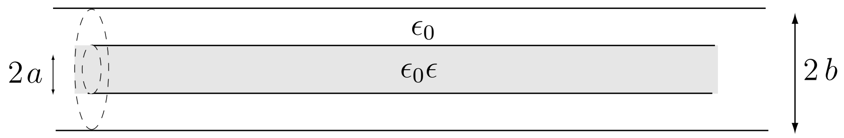
Figur 5.10: Materialdispersion för kvartsglas.

Exempel 5.2
I figur 5.10 finns materialdispersionen som funktion av våglängden. Vi har tidigare sett från figur 5.6 att den mest fördelaktiga våglängden för en fiber är $\lambda = 1.55\,\mu$m. Vid denna våglängd är materialdispersionen positiv. För att få en dispersionsfri fiber för våglängden $\lambda = 1.55\,\mu$m måste man kompensera den positiva materialdispersionen med en lika stor negativ vågledardispersion. Eftersom våglängden för ljuset i fibern är fixerat kan vi endast ändra vågledardispersionen genom att ändra kärnans radie a. Att ändra radien av en optisk fiber så att den totala dispersionen blir noll kallas för att dispersionsskifta fibern. ∎

5.3.4 Dämpning i fibrer

Hittills har vi antagit att materialet i fibern varit förlustfritt. Det finns dock små förluster även i de mest rena fibrerna. Dessa förluster kommer dels av spridning mot föroreningar i fibern och dels av förluster i kvartsglaset, se figur 5.6. Man kan rena glaset så att spridningen mot föroreningarna blir i det närmaste försumbara, men förlusterna i kvartsglaset går inte att komma undan. Absorptionen är mycket våglängdsberoende. Den minsta absorptionen fås vid en våglängd av $1.55\,\mu$m och därför är det denna frekvens som används i fibrerna. Dämpningen är såpass liten att den inte påverkar de uttryck och ekvationer som behandlats tidigare i detta avsnitt. För en fiber med $n_1 - n_2 << 1$ blir den enda förändringen att vi ersätter utbredningsfaktorn $e^{ik_z z}$ med $e^{i\,\mathrm{Re}\{k_z\}z}e^{-\alpha z}$. Dämpkonstanten α är approximativt densamma som fås för planvågsutbredning i ett dielektrikum med små förluster

$$\alpha = \mathrm{Im}\{k_z\} = k_0\,\mathrm{Im}\{n_e\} \simeq k_0\,\mathrm{Im}\{\sqrt{\epsilon_1}\} \simeq \frac{k_0\,\mathrm{Im}\{\epsilon_1\}}{2\sqrt{\mathrm{Re}\{\epsilon_1\}}} \tag{5.37}$$



Figur 5.11: Geometri för övning 5.6.

där $\epsilon_1 = \mathrm{Re}\{\epsilon_1\} + i\,\mathrm{Im}\{\epsilon_1\}$ är den komplexa permittiviteten.

Övningar till kapitel 5

5.1 Visa att randvillkoren

$$\begin{cases} \mu_1 \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_1 = \mu_2 \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{H}_2 \\ \epsilon_1 \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}_1 = \epsilon_2 \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{E}_2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{r} \text{ på } S$$

följer av randvillkoren i avsnitt 5.1.2.

*__5.2__ Bestäm samtliga TE-moder i en plan vågledare $0 < y < b$ som för $0 < y < a$ är fylld med ett dielektrikum med permittiviteten ϵ samt för $a < y < b$ är fylld med luft. Bestäm också den transcendenta ekvation som bestämmer utbredningskonstanten.

5.3 Bestäm kvoten $\dfrac{P_{\text{mantel}}}{P}$ för LP$_{mn}$-moderna vid modernas gränsfrekvenser.

5.4 Bestäm $v_m(\boldsymbol{\rho})$ och $w_m(\boldsymbol{\rho})$ i manteln för en cirkulär dielektrisk vågledare vid gränsfrekvensen och visa att dessa satisfierar Laplace ekvation $\nabla_T^2 \psi(\boldsymbol{\rho}) = 0$.

*__5.5__ Visa att det inte kan finnas några propagerande moder i en cirkulär vågledare då $n_2 > n_1$.

*__5.6__ En cirkulär vågledare, med radien b, är för $0 < \rho < a$ fylld med ett dielektrikum med relativ dielektricitetskonstant ϵ, se figur 5.11. Bestäm samtliga axialsymmetriska TE-moder.

Sammanfattning av kapitel 5

Fältuttryck för cirkulär dielektrisk vågledare

$$\begin{cases} v_m(\rho,\phi) = AJ_m(h\rho)\sin m\phi \\ w_m(\rho,\phi) = BJ_m(h\rho)\cos m\phi \end{cases} \qquad \rho < a$$

$$\begin{cases} v_m(\rho,\phi) = CK_m(q\rho)\sin m\phi \\ w_m(\rho,\phi) = DK_m(q\rho)\cos m\phi \end{cases} \qquad \rho > a$$

$$\frac{C}{A} = \frac{D}{B} = \frac{J_m(ha)}{K_m(qa)}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} = \frac{mk_z}{k_0}\left(\frac{1}{h^2a^2} + \frac{1}{q^2a^2}\right)\left(\frac{\mu_1 J_m'(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{\mu_2 K_m'(qa)}{qaK_m(qa)}\right)^{-1}$$

$$h = k_{1t}$$

$$q = -ik_{2t} = |k_{2t}|$$

TE- och TM-moder (m=0)

Gränsfrekvenser (båda fallen)

$$f_{0n} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{x_{0n}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

där $J_0(x_{0n}) = 0$

Karakteristisk ekvation för TE-moder

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 0,\ B \neq 0 \\ \dfrac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)} \end{array}}$$

Karakteristisk ekvation för TM-moder

$$\boxed{\begin{array}{l} B = 0,\ A \neq 0 \\ \dfrac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\dfrac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\dfrac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)} \end{array}}$$

EH-moder ($m > 0$)

Gränsfrekvenser:

$$\boxed{f_{mn}^{EH} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{x_{mn}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}, \qquad J_m(x_{mn}) = 0}$$

Karakteristisk ekvation:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{J_{m+1}(ha)}{haJ_m(ha)} = \dfrac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\dfrac{\mu_1\epsilon_2 + \mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1} + \dfrac{m}{(ha)^2} \\ -\left[\left(\dfrac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\dfrac{\mu_1\epsilon_2 - \mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}\right)^2 + \left(\dfrac{mk_z}{k_1}\right)^2\left(\dfrac{1}{q^2a^2} + \dfrac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2} \end{array}}$$

HE-moder ($m > 0$)

Gränsfrekvenser m=1

$$\boxed{f_{1n} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{x_{1n}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}, \quad \text{där} J_1(x_{1n}) = 0}$$

Gränsfrekvenser $m > 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{mn} = \dfrac{c_0}{2\pi a}\dfrac{x_{mn}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \quad \text{där} \\ x_{mn}\dfrac{J_m(x_{mn})}{J_{m-1}(x_{mn})} = (m-1)\dfrac{n_1^2 + n_2^2}{n_2^2} \end{array}}$$

Karakteristisk ekvation

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{J_{m+1}(ha)}{haJ_m(ha)} = \dfrac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\dfrac{\mu_1\epsilon_2 + \mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1} + \dfrac{m}{(ha)^2} \\ + \left[\left(\dfrac{K_m'(qa)}{2qaK_m(qa)}\dfrac{\mu_1\epsilon_2 - \mu_2\epsilon_1}{\mu_1\epsilon_1}\right)^2 + \left(\dfrac{mk_z}{k_1}\right)^2\left(\dfrac{1}{q^2a^2} + \dfrac{1}{h^2a^2}\right)^2\right]^{1/2} \end{array}}$$

LP-moder

Konstruktion

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{LP}_{0n} = \mathrm{HE}_{1n} \\ \mathrm{LP}_{1n} = \mathrm{HE}_{2n} + \mathrm{TE}_{0n} \quad (E_z \sim \sin m\phi) \\ \mathrm{LP}_{1n} = \mathrm{HE}_{2n} + \mathrm{TM}_{0n} \quad (E_z \sim \cos m\phi) \\ \mathrm{LP}_{mn} = \mathrm{HE}_{m+1\,n} + \mathrm{EH}_{m-1\,n} \quad (m > 0) \end{array}}$$

Gränsfrekvenser

$$\boxed{f_{mn} = \frac{c_0}{2\pi a}\frac{x_{mn}}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}, \quad \text{där} J_{m-1}(x_{mn}) = 0}$$

Karakteristisk ekvation

$$\boxed{ha\frac{J_{m-1}(ha)}{J_m(ha)} = -qa\frac{K_{m-1}(qa)}{K_m(qa)}}$$

Fältuttryck

$$\boxed{\begin{array}{ll} \begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}}A_{mp}J_m(h\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho < a \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}}A_{mp}\dfrac{J_m(ha)}{K_m(qa)}K_m(q\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho > a \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{x}}\frac{1}{\eta_0\eta_1}A_{mp}J_m(h\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho > a \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{x}}\dfrac{1}{\eta_0\eta_1}A_{mp}\dfrac{J_m(ha)}{K_m(qa)}K_m(q\rho)\cos m\phi e^{ik_z z}, & \rho > a \end{cases} \end{array}}$$

Effektivt brytningsindex

$$\boxed{n_e = k_z/k_0, \quad n_1 < n_e < n_2}$$

Dispersion

$$\boxed{\begin{array}{l} D = D_m + D_v \\ D_m = -\dfrac{\lambda}{c_0}\dfrac{d^2 n_1}{d\lambda^2} \\ D_v = -\dfrac{\lambda}{c_0}\dfrac{d^2 n_e}{d\lambda^2}\Big|_{n_1, n_2 konst.} \end{array}}$$

Appendix A

Besselfunktioner

I vågutbredningsproblem dyker ofta Bessels differentialekvation upp, särskilt när vi har ett problem med axiell symmetri. I detta appendix sammanfattas ett antal viktiga samband som gäller för Besselfunktioner. Vidare sammanfattas de modifierade Besselfunktionerna. Mer information och bevis av de olika resultaten ges t.ex. i ref. 3.

A.1 Bessel- och Hankelfunktioner

Bessels differentialekvation är

$$z^2\frac{d^2}{dz^2}Z_n(z)+z\frac{d}{dz}Z_n(z)+(z^2-n^2)Z_n(z)=0 \tag{A.1}$$

där n antas vara ett heltal.[1]

Två linjärt oberoende lösningar finns till denna differentialekvation. En är reguljär i $z=0$ och denna lösning kallas en Besselfunktion $J_n(z)$ av ordning n. Argumentet z är ett komplext tal. Ofta poängteras samhörigheten med axiell symmetri hos det underliggande problem genom att lösningarna kallas cylindriska Besselfunktioner av ordning n. Besselfunktionerna $J_n(z)$ är definierade så att de är reella för reellt argument z. De kan framställas i en överallt absolutkonvergent potensserie

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \tag{A.2}$$

Vi ser omedelbart att $J_n(z)$ är en jämn funktion för jämna n och en udda funktion för udda n, dvs.

$$J_n(-z)=(-1)^nJ_n(z)$$

En vanlig integralframställning av Bessel funktionerna är

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(z\sin t-nt\right)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iz\cos t}e^{in\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)}\,dt \tag{A.3}$$

[1]Mer generella definitioner med t.ex. n som ett komplext tal kan också göras, men då ser resultaten i flera fall annorlunda ut.

	Nollställets nummer j			
Ordning n	1	2	3	4
0	2.405	5.520	8.654	11.79
1	3.832	7.016	10.17	13.32
2	5.136	8.417	11.62	14.80
3	6.380	9.761	13.01	16.22
4	7.588	11.06	14.37	17.62

Tabell A.1: Tabell över de positiva nollställena ξ_{nj} till $J_n(z)$.

Från denna integralframställning ser vi att Besselfunktioner för positiva och negativa heltalsvärden på n är relaterade till varandra.

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

Från potensserieframställningen i (A.2) ser vi att för små argument gäller

$$J_n(z) = \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n + O(z^{n+2})$$

För stora argument gäller ($-\pi < \arg z < \pi$)

$$J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left\{P_n(z)\cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - Q_n(z)\sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ har följande asymptotiska utvecklingar ($\nu = 4n^2$)

$$\begin{cases} P_n(z) \sim 1 - \dfrac{(\nu-1)(\nu-9)}{2!(8z)^2} + \dfrac{(\nu-1)(\nu-9)(\nu-25)(\nu-49)}{4!(8z)^4} - \dots \\ Q_n(z) \sim \dfrac{\nu-1}{8z} - \dfrac{(\nu-1)(\nu-9)(\nu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \end{cases} \tag{A.4}$$

Nollställena till Besselfunktionen $J_n(z)$ är reella, och i tabell A.1 är de första positiva nollställena ξ_{nj} tabellerade. Derivatan på Besselfunktionen $J_n(z)$ har också reella nollställen och de första positiva nollställena η_{nj} finns givna i tabell A.2. Högre nollställen (större j-värden) ges approximativt av

$$\xi_{nj} = j\pi + \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \qquad \eta_{nj} = j\pi + \left(n - \frac{3}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

Den andra, av Besselfunktionen linjärt oberoende lösningen, som är reell för

	Nollställets nummer j			
Ordning n	1	2	3	4
0	3.832	7.016	10.17	13.32
1	1.841	5.331	8.536	11.71
2	3.054	6.706	9.970	13.17
3	4.201	8.015	11.34	14.59
4	5.317	9.282	12.68	15.96

Tabell A.2: Tabell över de positiva nollställena η_{nj} till $J_n'(z)$.

reella argument, är Neumannfunktionen[2] $N_n(z)$. Dess potensserieutveckling är

$$\begin{aligned} N_n(z) = {} & \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)J_n(z) \\ & -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l+n}\right) \\ & -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} \end{aligned}$$

där Eulers konstant $\gamma = 0.577\,215\,66\ldots$, och där alla summor definieras till noll om övre summationsgräns är mindre summationsindex. Vi ser att denna lösning är singulär i $z=0$. För små argument blir det dominerande bidraget

$$\begin{aligned} N_0(z) &= \frac{2}{\pi}\left(\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right)+O(z^2) \\ N_n(z) &= -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}+\ldots \end{aligned}$$

För stora argument kan Neumannfunktionen utvecklas som ($-\pi < \arg z < \pi$)

$$N_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\left(P_n(z)\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+Q_n(z)\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ är givna av (A.4).

I vågutbredningssammanhang uppkommer behovet av en linjärkombination av Bessel- och Neumannfuntioner, de s.k. Hankelfunktionerna, $H_n^{(1)}(z)$ och $H_n^{(2)}(z)$ av första respektive andra slaget.[3] Dessa definieras av

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(z) &= J_n(z)+iN_n(z) \\ H_n^{(2)}(z) &= J_n(z)-iN_n(z) \end{aligned}$$

[2]Dessa lösningar kallas också Besselfunktioner av andra slaget.
[3]Ett ofta använt alternativt namn på dessa lösningar är Besselfunktioner av tredje slaget.

En vanlig integralframställning av Hankelfunktionerna av första och andra slaget är

$$H_n^{(1)}(z) = \frac{2}{i\pi} e^{-in\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{iz\cosh s} \cosh ns\, ds, \qquad 0 < \arg z < \pi$$
$$H_n^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi} e^{in\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-iz\cosh s} \cosh ns\, ds, \qquad -\pi < \arg z < 0$$

För stora argument kan Hankelfunktionerna utvecklas som

$$H_n^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \left(P_n(z) + iQ_n(z)\right), \qquad -\pi < \arg z < 2\pi$$
$$H_n^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} \left(P_n(z) - iQ_n(z)\right), \qquad -2\pi < \arg z < \pi$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ är givna av (A.4).

Mellan lösningar till Bessels differentialekvation av olika ordning finns rekursionssamband. Några av de viktigaste är ($n = 0, 1, 2, \dots, m = 0, 1, 2, \dots$)[4]

$$\begin{aligned}
&Z_{n-1}(z) - Z_{n+1}(z) = 2Z_n'(z) \\
&Z_{n-1}(z) + Z_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Z_n(z) \\
&Z_{n+1}(z) = \frac{n}{z} Z_n(z) - Z_n'(z) \\
&Z_n'(z) = Z_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Z_n(z) \\
&\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m \left[z^n Z_n(z)\right] = z^{n-m} Z_{n-m}(z) \\
&\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m \left[z^{-n} Z_n(z)\right] = (-1)^m z^{-n-m} Z_{n+m}(z)
\end{aligned}$$

Här är $Z_n(z)$ antingen en Besselfunktion $J_n(z)$, en Neumannfunktion $N_n(z)$ eller någon av Hankelfunktionerna $H_n^{(1)}(z)$ eller $H_n^{(2)}(z)$. Vi ser att speciellt gäller

$$J_1(z) = -J_0'(z)$$

som ofta används i beräkningar.

Några användbara obestämda integraler med Besselfunktioner, som ofta förekommer i beräkningar, är ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
\int x^{n+1} Z_n(x)\, dx &= x^{n+1} Z_{n+1}(x) = -x^{n+1} \left(Z_n'(x) - \frac{n}{x} Z_n(x)\right) \\
\int x^{-n+1} Z_n(x)\, dx &= -x^{-n+1} Z_{n-1}(x) = -x^{-n+1} \left(Z_n'(x) + \frac{n}{x} Z_n(x)\right) \\
\int x \left(Z_n(x)\right)^2\, dx &= \frac{x^2}{2} \left[\left(Z_n(x)\right)^2 - Z_{n-1}(x) Z_{n+1}(x)\right] \\
&= \frac{x^2}{2} \left(Z_n'(x)\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 - n^2) \left(Z_n(x)\right)^2
\end{aligned}$$

[4] Dessa rekursionsformler gäller även för icke heltaliga värden på n, t.ex. $n = 1/2$. Däremot måste m vara ett ickenegativt heltal.

Som ovan är $Z_n(x)$ en linjärkombination av $J_n(x)$, $N_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$ och $H_n^{(2)}(x)$. Några ytterligare—mer komplicerade—men ofta användbara obestämda integraler ges här också ($n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots$)

$$
\begin{aligned}
\int \left[(\alpha^2 - \beta^2)x - \frac{m^2 - n^2}{x}\right] Z_m(\alpha x)Y_n(\beta x)\, dx &= \beta x Z_m(\alpha x)Y_{n-1}(\beta x) \\
&\quad - \alpha x Z_{m-1}(\alpha x)Y_n(\beta x) + (m-n)Z_m(\alpha x)Y_m(\beta x) \\
\int x Z_m(\alpha x)Y_m(\beta x)\, dx &= \frac{\beta x Z_m(\alpha x)Y_{m-1}(\beta x) - \alpha x Z_{m-1}(\alpha x)Y_m(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2} \\
\int \frac{1}{x} Z_m(\alpha x)Y_n(\alpha x)\, dx &= \alpha x \frac{Z_{m-1}(\alpha x)Y_n(\alpha x) - Z_m(\alpha x)Y_{n-1}(\alpha x)}{m^2 - n^2} - \frac{Z_m(\alpha x)Y_n(\alpha x)}{m+n}
\end{aligned}
$$

Här är $Z_n(\alpha x)$ eller $Y_n(\beta x)$ en linjärkombination av en Besselfunktion J_n, en Neumannfunktion N_n eller någon av Hankelfunktionerna $H_n^{(1)}$ och $H_n^{(2)}$.

För Besselfunktionen $J_n(z)$, Neumannfunktionen $N_n(z)$ och Hankelfunktionerna $H_n^{(1)}(z)$ eller $H_n^{(2)}(z)$ gäller att

$$
\begin{cases} J_n(z^*) = (J_n(z))^* \\ N_n(z^*) = (N_n(z))^* \end{cases} \qquad \begin{cases} H_n^{(1)}(z^*) = \left(H_n^{(2)}(z)\right)^* \\ H_n^{(2)}(z^*) = \left(H_n^{(1)}(z)\right)^* \end{cases}
$$

A.2 Modifierade Besselfunktioner

Bessels modifierade differentialekvation är

$$
z^2 \frac{d^2}{dz^2} Z_n(z) + z \frac{d}{dz} Z_n(z) - (z^2 + n^2) Z_n(z) = 0
$$

där n antas vara ett positivt heltal. En jämförelse med Bessels differentialekvation i avsnitt A.1 ger att lösningarna till Bessels modifierade ekvation är Besselfunktioner med argument iz. Det är lämpligt att införa följande beteckningar på de två oberoende lösningarna till Bessels modifierade differentialekvation:

$$
\begin{aligned}
I_n(z) &= i^{-n} J_n(iz) \\
K_n(z) &= \frac{i^{n+1}\pi}{2} H_n^{(1)}(iz)
\end{aligned}
$$

Faktorn framför respektive Bessel- och Hankelfunktion i höger led gör att både $I_n(z)$ och $K_n(z)$ är reella för reella argument z. Funktionen $I_n(z)$ är reguljär i $z = 0$, medan $K_n(z)$ är singulär då $z \to 0$.

Besselfunktionernas egenskaper ger omedelbart att $I_n(z)$ är en jämn funktion för jämna n och en udda funktion för udda n, dvs.

$$
I_n(-z) = (-1)^n I_n(z)
$$

samt att

$$
I_{-n}(z) = (-1)^n I_n(z)
$$

Detta resultat kan också erhållas från potensserieframställningar av $I_n(z)$ kring punkten $z=0$.

$$I_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

Motsvarande potensserieframställning av $K_n(z)$ kring $z=0$ är

$$\begin{aligned}K_n(z)&=(-1)^{n+1}\left(\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)I_n(z)\\&+(-1)^n\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l+n}\right)\\&+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}\end{aligned}$$

där Eulers konstant $\gamma=0.577\,215\,66\ldots$, och där alla summor definieras till noll om övre summationsgräns är mindre summationsindex. Från dessa potensserieutvecklingar ser vi att för små argument blir de dominerande bidragen

$$I_n(z)=\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n+O(z^{n+2})$$

och

$$\begin{cases}K_0(z)=-\left(\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right)+O(z^2)\\K_n(z)=\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}+\ldots,\quad n\neq 0\end{cases}\tag{A.5}$$

För stora argument gäller

$$I_n(z)=\frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}P_n(z),\quad -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}$$

och

$$K_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}Q_n(z),\quad -\frac{3\pi}{2}<\arg z<\frac{3\pi}{2}$$

där funktionerna $P_n(z)$ och $Q_n(z)$ har följande asymptotiska utvecklingar ($\nu=4n^2$):

$$\begin{cases}P_n(z)\sim 1-\frac{\nu-1}{8z}+\frac{(\nu-1)(\nu-9)}{2!(8z)^2}-\frac{(\nu-1)(\nu-9)(\nu-25)}{3!(8z)^3}+\ldots\\Q_n(z)\sim 1+\frac{\nu-1}{8z}+\frac{(\nu-1)(\nu-9)}{2!(8z)^2}+\frac{(\nu-1)(\nu-9)(\nu-25)}{3!(8z)^3}+\ldots\end{cases}$$

Mellan lösningar till Bessels modifierade differentialekvation av olika ordning finns rekursionssamband. För $I_n(z)$, $n=0,1,2,\ldots$, är de viktigaste sambanden

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$[5]

$$
\begin{aligned}
&I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) = 2I'_n(z) \\
&I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} I_n(z) \\
&I_{n+1}(z) = I'_n(z) - \frac{n}{z} I_n(z) \\
&I'_n(z) = I_{n-1}(z) - \frac{n}{z} I_n(z) \\
&\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^n I_n(z)] = z^{n-m} I_{n-m}(z) \\
&\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m \left[z^{-n} I_n(z)\right] = z^{-n-m} I_{n+m}(z)
\end{aligned}
$$

och för $K_n(z)$ är motsvarande $(n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots)$[5]

$$
\begin{aligned}
&K_{n-1}(z) + K_{n+1}(z) = -2K'_n(z) \\
&K_{n+1}(z) - K_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} K_n(z) \\
&K_{n+1}(z) = \frac{n}{z} K_n(z) - K'_n(z) \\
&K'_n(z) = -K_{n-1}(z) - \frac{n}{z} K_n(z) \\
&\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^n K_n(z)] = (-1)^m z^{n-m} K_{n-m}(z) \\
&\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m \left[z^{-n} K_n(z)\right] = (-1)^m z^{-n-m} K_{n+m}(z)
\end{aligned}
$$

---

[5] Dessa rekursionsformler gäller även för icke heltaliga värden på n, t.ex. $n = 1/2$. Däremot måste m vara ett ickenegativt heltal.

Appendix B

∇ i kroklinjiga koordinatsystem

I detta appendix är samlat några uttryck med ∇-operatorn i två vanliga kroklinjiga koordinatsystem, nämligen de cylindriska och sfäriska koordinatsystemen. För fullständighetens skull börjar vi med det kartesiska koordinatsystemet.

B.1 Kartesiska koordinater

De kartesiska koordinaterna (x, y, z) utgör det enklaste koordinatsystemet. Gradienten och Laplace-operatorn av ett skalärt fält $\psi(x, y, z)$ i detta koordinatsystem är

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\
\nabla^2\psi &= \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

Divergensen, rotationen och Laplace-operatorn av ett vektorvärt fält $\boldsymbol{A}(x, y, z) = \hat{\boldsymbol{x}}A_x(x, y, z) + \hat{\boldsymbol{y}}A_y(x, y, z) + \hat{\boldsymbol{z}}A_z(x, y, z)$ är

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \\
\nabla^2\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{x}}\nabla^2 A_x + \hat{\boldsymbol{y}}\nabla^2 A_y + \hat{\boldsymbol{z}}\nabla^2 A_z
\end{aligned}$$

B.2 Cylindriska koordinater

Vi övergår nu till kroklinjiga koordinatsystem, och börjar med de cylindriska koordinaterna (ρ, ϕ, z) definierade av

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Gradienten och Laplace-operatorn av ett skalärt fält $\psi(\rho, \phi, z)$ i detta koordinatsystem är

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Divergensen, rotationen och Laplace-operatorn av ett vektorvärt fält $\boldsymbol{A}(\rho, \phi, z) = \hat{\boldsymbol{\rho}}A_\rho(\rho, \phi, z) + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi(\rho, \phi, z) + \hat{\boldsymbol{z}}A_z(\rho, \phi, z)$ blir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right) \\ \nabla^2\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\nabla^2 A_z \end{aligned}$$

B.3 Sfäriska koordinater

Det sfäriska koordinatsystemet (r, θ, ϕ) (polvinkel θ och azimutvinkel ϕ) definierat av

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Gradienten och Laplace-operatorn av ett skalärt fält $\psi(r, \theta, \phi)$ i detta koordinatsystem är

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\ \nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \end{aligned}$$

och divergensen, rotationen och Laplace-operatorn av ett vektorvärt fält $\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi) = \hat{\boldsymbol{r}}A_r(r,\theta,\phi) + \hat{\boldsymbol{\theta}}A_\theta(r,\theta,\phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}}A_\phi(r,\theta,\phi)$ är

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\\
\nabla\times\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{r}}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\\
&\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\\
\nabla^2\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{r}}\left(\nabla^2A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\\
&\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\nabla^2A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\\
&\quad + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\nabla^2A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}$$

Appendix C

Enheter och konstanter

De elektromagnetiska grundekvationernas utseende varierar beroende på vilket enhetssystem som används. Det numera standardiserade SI-systemet används så gott som alltid i litteraturen, och denna bok utgör inget undantag. De konstanter som är relevanta för vår framställning finns angivna i detta appendix.

Ljushastigheten i vakuum c_0 har värdet (exakt)

$$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

μ_0 och ϵ_0 är vakuums permeabilitets- respektive dielektricitetskonstant. Deras värden är (exakt)

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{c_0^2\mu_0} \text{ F/m} \end{aligned}$$

Approximativa värden på dessa konstanter är

$$\begin{aligned} \mu_0 &\approx 12.566\,370\,614 \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ \epsilon_0 &\approx 8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \end{aligned}$$

Vågimpedansen hos vakuum betecknas med

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c_0\mu_0 = 299\,792\,458 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ \Omega \approx 376.730\,314\ \Omega$$

Elektronens laddning $-e$ och massa m har värdena

$$\begin{aligned} e &\approx 1.602\,177\,33 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ m &\approx 9.109\,389\,8 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ e/m &\approx 1.758\,819\,63 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} \end{aligned}$$

Appendix D

Beteckningar

Bra beteckningar leder till att texten blir mer lättläst och framställningen mer systematisk. De flesta beteckningar förklaras på det ställe i texten där de introduceras, medan andra som är mer allmänt förekommande finns samlade i detta appendix.

- Vektorfält betecknas med fet kursiverad stil, t.ex. $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$, och enhetsvektorer markeras med "hatt"($\hat{}$) över storheten, t.ex. $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

- Symbolen ∎ anger slut på exempel.

- Realdelen och imaginärdelen av ett komplext tal $z = x + iy$ betecknas med $\operatorname{Re} z$ respektive $\operatorname{Im} z$, dvs.

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} z &= x \\ \operatorname{Im} z &= y\end{aligned}$$

  En stjärna (*) markerar komplexkonjugering, dvs. $z^* = x - iy$.

- Heavisides stegfunktion betecknas med $H(t)$ och definieras av

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

- Kroneckers deltafunktion betecknas med δ_{ij} och definieras av

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- Det cylindriska koordinatsystemet (ρ, ϕ, z) definieras

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Här tillhör $\rho \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ och $z \in (-\infty, \infty)$.

- Det sfäriska koordinatsystemet (r, θ, ϕ) definieras

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arccos \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Här tillhör $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ och $\phi \in [0, 2\pi)$.

Litteratur

[1] G. P. Agrawal. *Fiber-optic communication systems.* John Wiley & Sons, New York, 1992.

[2] G. P. Agrawal. *Nonlinear fiber optics.* Academic Press, San Diego, 1995.

[3] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press, Orlando, third edition, 1985.

[4] D.K. Cheng. *Field and wave electromagnetics.* Addison-Wesley, Reading, 1983.

[5] R.E. Collin. *Field Theory of Guided Waves.* IEEE Press, New York, second edition, 1991.

[6] E. Hallén. *Elektricitetslära.* Almqvist & Wiksells, Uppsala, 1968.

[7] A. Ishimaru. *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

[8] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics.* John Wiley & Sons, New York, third edition, 1999.

[9] D.S. Jones. *Methods in Electromagnetic Wave Propagation.* IEEE Press, Piscataway, second edition, 1994.

[10] J.A. Kong. *Electromagnetic Wave Theory.* John Wiley & Sons, New York, 1986.

[11] J.D. Kraus. *Electromagnetics.* McGraw-Hill, New York, fourth edition, 1992.

[12] G. Kristensson. *Elektromagnetisk vågutbredning.* Studentlitteratur, Lund, 1999.

[13] S.Y. Liao. *Engineering Applications of Electromagnetic Theory.* West Publishing Company, St. Paul, 1988.

[14] B.D. Popović. *Introductory Engineering Electromagnetics.* Addison-Wesley, Reading, 1971.

[15] D.M. Pozar. *Microwave Engineering.* Addison-Wesley, Reading, 1990.

[16] SIS-Standardiseringskommissionen i Sverige. *SI måttenheter*, September 1988.

[17] J.A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.

[18] J. Van Bladel. *Electromagnetic Fields*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1985.

[19] A. Yariv. *Optical Electronics*. Saunders College Publishing, Fort Worth, 1991.

Facit

1.1 En ellips med halvaxlar a och b längs $\hat{\boldsymbol{e}}_1$- respektive $\hat{\boldsymbol{e}}_2$-axeln. Fältet är högerpolariserat och $\boldsymbol{E}(t=0) = \hat{\boldsymbol{e}}_1 a$.

1.2

$$\sigma = \epsilon_0 \omega_p^2 \nu \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\nu)^2}$$

1.3 Poyntings vektor kan endast tolkas som effektflädestäthet dåden integreras över en sluten yta Ω. I fallet med statiska fält fås att $\iint_\Omega \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, dS = 0$ för varje sluten yta S som omsluter en källfri volym.

2.1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_T =& \nabla_T \times (\nabla_T \times \boldsymbol{F}_T) + \nabla_T \frac{\partial}{\partial z} F_z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \boldsymbol{F}_T \\
=& \nabla_T (\nabla_T \cdot \boldsymbol{F}_T) - \nabla_T^2 \boldsymbol{F}_T + \nabla_T \frac{\partial}{\partial z} F_z - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \boldsymbol{F}_T \\
A_z =& \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_T \cdot \boldsymbol{F}_T) - \nabla_T^2 F_z
\end{aligned}$$

3.3 **TM-moder**:

$$\begin{cases} v_{mn}(\rho,\phi) = C_{mn} \underbrace{\{J_m(\zeta_{mn}\rho/a)N_m(\zeta_{mn}) - J_m(\zeta_{mn})N_m(\zeta_{mn}\rho/a)\}}_{Z_{mn}(\zeta_{mn}\rho/a)} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \\ k_{tmn} = \zeta_{mn}/a \end{cases}$$

där $\{\zeta_{mn}\}_{n=1}^\infty$ är rötterna till, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$Z_{mn}(\zeta_{mn}b/a) = J_m(\zeta_{mn}b/a)N_m(\zeta_{mn}) - J_m(\zeta_{mn})N_m(\zeta_{mn}b/a) = 0$$

och normeringskonstanten C_{mn} bestäms av att ($\epsilon_m = 2 - \delta_{m,0}$)

$$C_{mn}^{-2} = \frac{2\pi}{\epsilon_m} \int_a^b Z_{mn}^2(\zeta_{mn}\rho/a)\rho\, d\rho = \frac{\pi}{\epsilon_m} \left\{ b^2 \left(Z'_{mn}(\zeta_{mn}b/a)\right)^2 - a^2 \left(Z'_{mn}(\zeta_{mn})\right)^2 \right\}$$

TE-moder:

$$\begin{cases} w_{mn}(\rho,\phi) = D_{mn} \underbrace{\{J_m(\gamma_{mn}\rho/a)N'_m(\gamma_{mn}) - J'_m(\gamma_{mn})N_m(\gamma_{mn}\rho/a)\}}_{Y_{mn}(\gamma_{mn}\rho/a)} \begin{pmatrix} \cos m\phi \\ \sin m\phi \end{pmatrix} \\ k_{tmn} = \gamma_{mn}/a \end{cases}$$

där $\{\gamma_{mn}\}_{n=1}^\infty$ är rötterna till, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$Y'_{mn}(\gamma_{mn}b/a) = J'_m(\gamma_{mn}b/a)N'_m(\gamma_{mn}) - J'_m(\gamma_{mn})N'_m(\gamma_{mn}b/a) = 0$$

och normeringskonstanten D_{mn} bestäms av att

$$\begin{aligned} D_{mn}^{-2} =& \frac{2\pi}{\epsilon_m} \int_a^b Y_{mn}^2(\gamma_{mn}\rho/a)\rho\, d\rho \\ =& \frac{\pi a^2}{\epsilon_m \gamma_{mn}^2} \left\{ \left(\gamma_{mn}^2 b^2/a^2 - m^2\right) \left(Y_{mn}(\gamma_{mn} b/a)\right)^2 - \left(\gamma_{mn}^2 - m^2\right) \left(Y_{mn}(\gamma_{mn})\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

TEM-mod:

$$\nabla_T \psi(\rho, \phi) = \hat{\boldsymbol{\rho}} \frac{1}{\rho} \frac{1}{2\pi \ln \frac{a}{b}}$$

3.4 TM-moder:

$$\begin{cases} v_{mn}(\rho, \phi) = C_{mn} J_{m/2}(\zeta_{mn}\rho/a) \sin \dfrac{m}{2}\phi, & m = 1, 2, 3, \dots \\ k_{tmn} = \zeta_{mn}/a \end{cases}$$

där $\{\zeta_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ är rötterna till, $m = 1, 2, 3, \dots$

$$J_{m/2}(\zeta_{mn}) = 0$$

och normeringskonstanten C_{mn} bestäms av att

$$C_{mn}^{-2} = \frac{\pi a^2}{\zeta_{mn}^2} \int_0^{\zeta_{mn}} \left(J_{m/2}(x)\right)^2 x\, dx$$

TE-moder:

$$\begin{cases} w_{mn}(\rho, \phi) = D_{mn} J_{m/2}(\gamma_{mn}\rho/a) \cos \dfrac{m}{2}\phi, & m = 0, 1, 2, \dots \\ k_{tmn} = \gamma_{mn}/a \end{cases}$$

där $\{\gamma_{mn}\}_{n=1}^{\infty}$ är rötterna till, $m = 0, 1, 2, \dots$

$$J'_{m/2}(\gamma_{mn}) = 0$$

och normeringskonstanten D_{mn} bestäms av att

$$D_{mn}^{-2} = \frac{\pi a^2}{\gamma_{mn}^2} \int_0^{\gamma_{mn}} \left(J_{m/2}(x)\right)^2 x\, dx$$

Den lägsta gränsfrekvensen ges av minsta roten till

$$J'_{1/2}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x - 2x \cos x = 0$$

vilken är $x \approx 1.166$. Detta ger en sänkning av den lägsta gränsfrekvensen på ca 37%.

3.5 a) $P_r/P_i = 6.1 \cdot 10^{-3}$

b) $P_r = 0$ för frekvensen $f = \dfrac{c_0\sqrt{b^2 + a^2}}{2ab} \sqrt{\dfrac{\epsilon + 1}{\epsilon}} = 7.65$ GHz

Kommentar: Den infallande TM-moden kan delas upp i två planvågor. Vid frekvensen 7.65 GHz faller dessa in mot skiljeytan med Brewstervinkeln.

3.6 a) TM_{01}, TE_{11} och TE_{21}

b) $\alpha = \dfrac{\omega\mu_0\sigma}{2(\omega^2\mu_0\epsilon_0\epsilon - k_{tnj}^2)^{1/2}} = \dfrac{\sigma\eta}{2(1-(f_c/f)^2)^{1/2}}$
där $\eta = \eta_0/\sqrt{\epsilon} = 120\pi/\sqrt{\epsilon}\,\Omega$ är vågimpedansen i materialet, f är frekvensen och f_c är gränsfrekvensen. Eftersom $\epsilon = 3$, $\sigma = 10^{-11}$ och $f_c = ck_{tnj}/(2\pi) = 1.7$ GHz så fås

$$\alpha = \frac{1.1\,10^{-9}}{(1-(1.7\,10^9/f)^2)^{1/2}}\,\text{Np/m}$$

Dämpningen mätt i dB/km ges av $20\log(E(0\text{km})/E(1\text{km})) = \alpha\, 8.7\, 10^3$ dB/km med α mätt i Np/m.

3.7 Cirkel $0.383c/a < f_c < 0.574c/a$
Rektangel $0.45c/a < f_c < 0.625c/a$
Bästa uppskattning $0.45c/a < f_c < 0.574c/a$

3.8 a) $x_0 = 4$ cm
b) $P_r/P_i = 0$
c) $P_r/P_i = 0$

3.9 $\boldsymbol{H} = 0.5\omega\epsilon_0 E_0\rho\hat{\boldsymbol{\phi}}$

3.11 a)

$$\boldsymbol{E}(\rho,t) = E_0 J_0(\frac{\omega}{c}\rho)\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{H}(\rho,t) = -\frac{1}{c\mu_0}E_0 J_0'(\frac{\omega}{c}\rho)\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

där $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\epsilon\mu_0)}$ och $J_0(x)$ är en Besselfunktion av nollte ordning.

b) $f_j = \dfrac{cx_j}{2\pi a}$ där $J_0(x_j) = 0$

3.12 TE-moder:

$$H_z = A_{nj}J_{2n}(\beta_{2nj}\rho)\cos(2n\phi)\exp(ik_{znj}z)$$

där $k_{znj}^2 = (\omega/c_0)^2 - (k_{t2nj})^2$ och $J_{2n}'(k_{t2nj}R) = 0$

TM-moder:

$$E_z = B_{n,j}J_{2n}(k_{t2n,j}\rho)\sin(2n\phi)\exp(ik_{znj}z)$$

där $k_{znj}^2 = (\omega/c_0)^2 - (k_{t2nj})^2$ och $J_{2n}(k_{t2nj}R) = 0$.

3.16 a)

$$Q = \frac{\omega_{101}\mu_0 abd(a^2+d^2)}{2R_s(2b(a^3+d^3)+ad(a^2+d^2))}$$

där $\omega_{101} = c\sqrt{(\pi/a)^2+(\pi/d)^2}$.

b) Resonansfrekvensen är 8,38 GHz och Q=9900.

c) Resonansfrekvensen är 0,838 GHz och Q=31300.

3.17 a) Halva effekten i 2 och halva i 3. Ingen effekt i 4. Samma riktning på fälten i port 2 och 3.

b) Halva effekten i 2 och halva i 3. Ingen effekt i 1. Fälten i port 2 och 3 är motriktade.

4.2

$$a(0, t - L/c_0) = H(t) - H(t - t_0) + \int\limits_{t-\min(t,t_0)}^{t} P(-L, t')\, dt'$$

$$\text{där } P(-L,t) = \begin{cases} c_0 k_t L \dfrac{I_1(k_t\sqrt{2c_0Lt - c_0^2t^2})}{\sqrt{2c_0Lt - c_0^2t^2}}, & \text{då } t < 2L/c_0 \\ \\ c_0 k_t L \dfrac{J_1(k_t\sqrt{-2c_0Lt + c_0^2t^2})}{\sqrt{-2c_0Lt + c_0^2t^2}}, & \text{då } t > 2L/c_0 \end{cases}$$

5.2

$$H_z = \begin{cases} H_n \cos(k_{tn}y) e^{ik_{zn}z}, & \text{då } 0 < y < a \\ H_n \dfrac{\cos(k_{tn}a)\cos(k_{tn}'(b-y))}{\cos(k_{tn}'(b-a))} e^{ik_{zn}z}, & \text{då } a < y < b \end{cases}$$

där k_{tn}, k_{tn}' och k_{zn} ges av

$$\begin{aligned} k_{tn}^2 &= (\omega/c_0)^2\epsilon - k_{zn}^2 \\ {k_{tn}'}^2 &= (\omega/c_0)^2 - k_{zn}^2 \\ k_{tn}\tan(k_{tn}'(b-a)) &= -k_{tn}'\tan(k_{tn}a) \end{aligned}$$

5.3 Då $q = 0$ gäller för LP_{mn}-moden att $\dfrac{P_{\text{mantel}}}{P} = \dfrac{1}{m}$ då $m > 0$ och $\dfrac{P_{\text{mantel}}}{P} = 1$ då $m = 0$.

5.4

$$\begin{aligned} v_m &= AJ_m\left(k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)\left(\frac{a}{\rho}\right)^m \sin m\phi \\ w_m &= -n_2AJ_m\left(k_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)\left(\frac{a}{\rho}\right)^m \cos m\phi \end{aligned}$$

5.6

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} =& A_n(\hat{\boldsymbol{z}}J_0(k_{tn}\rho) + \hat{\boldsymbol{\rho}} i\frac{k_{zn}}{k_{tn}}J_0'(k_{tn}\rho))\exp(ik_{zn}z), \quad 0 < \rho < a \\ \boldsymbol{H} =& B_n(\hat{\boldsymbol{z}}(J_0(k_{tn}'\rho) - \frac{J_0'(k_{tn}'b)}{Y_0'(k_{tn}'b)}Y_0(k_{tn}'\rho)) \\ &+ i\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{k_{zn}}{k_{tn}'}(J_0'(k_{tn}'\rho) - \frac{J_0'(k_{tn}'b)}{Y_0'(k_{tn}'b)}Y_0'(k_{tn}'\rho)))\exp(ik_{zn}z), \quad a < \rho < b \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} B_n &= A_n\frac{J_0(k_{tn}a)Y_0(k_{tn}'b)}{J_0(k_{tn}'a)Y_0'(k_{tn}'b) - J_0'(k_{tn}'b)Y_0(k_{tn}'a)} \\ k_{tn}^2 &= \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - k_{zn}^2 \\ {k_{tn}'}^2 &= \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2\epsilon - k_{zn}^2 \end{aligned}$$

och k_{zn} ges av den transcendenta ekvationen

$$\begin{aligned}&k_{tn}J_0(k_{tn}a)(J_0'(k_{tn}'a)Y_0'(k_{tn}'b) - J_0'(k_{tn}'b)Y_0'(k_{tn}'a))\\&= k_{tn}'J_0'(\gamma_j a)(J_0(k_{tn}'a)Y_0'(k_{tn}'b) - J_0'(k_{tn}'b)Y_0(k_{tn}'a))\end{aligned}$$

Register

Samband mellan basvektorer

Cylindriska koordinater (ρ, ϕ, z)

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

Sfäriska koordinater (r, θ, ϕ)

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$(r, \theta, \phi) \longrightarrow (x, y, z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta\sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\phi \end{cases}$$

$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta\cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin\phi \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos\phi \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \end{cases}$$

$(\rho, \phi, z) \longrightarrow (x, y, z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\phi = (\hat{\boldsymbol{x}} x + \hat{\boldsymbol{y}} y)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\phi = (-\hat{\boldsymbol{x}} y + \hat{\boldsymbol{y}} x)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$(x, y, z) \longrightarrow (\rho, \phi, z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin\phi \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos\phi \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$(r, \theta, \phi) \longrightarrow (\rho, \phi, z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \sin\theta + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases}$$

$(\rho, \phi, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \end{cases}$$