Institutionen för
elektro- och informationsteknik
Lunds Universitet – Lunds Tekniska Högskola

Optimal Signalbehandling – Uppgifter och lösningar

Niklas Petersson
Martin Stridh
Leif Sörnmo
Bengt Mandersson

31 augusti 2012

Department of Electrical and Information Technology, Lund University, Sweden

Kapitel 2 – Repetition

Uppgift 2.5

En sekvens $x(n)$ ska modelleras som en summa av en konstant, c, och en komplex exponentialfunktion med frekvensen ω_0,

$$x(n) = c + ae^{jn\omega_0} \quad ; \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

där c och a är okända. Vi kan uttrycka problemet som att hitta värden på c och a som lösningen till det överbestämda linjära ekvationssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{j\omega_0} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

a) Bestäm minsta-kvadratlösnignen för c och a.

b) För N jämn och $\omega_0 = 2\pi k/N$ som ett heltal k, bestäm minsta-kvadratlösningen för c och a.

Lösning 2.5

Det linjära systemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{j\omega_0} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

kan skrivas mera kompakt som

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Notera att $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c & a \end{bmatrix}^T$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x(0) & \cdots & x(N-1) \end{bmatrix}^T$!

a) Överbestämt system. Lösning ges då enligt ekv. (2.39).

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} c \\ a \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H\mathbf{b} \\
&= \begin{bmatrix} N & \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\omega_0} \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega_0} & N \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{A}^H\mathbf{b} \\
&= \frac{1}{N^2 - \left(\frac{e^{j\omega_0 N}-1}{e^{j\omega_0}-1}\right)\left(\frac{e^{-j\omega_0 N}-1}{e^{-j\omega_0}-1}\right)} \begin{bmatrix} N & -\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\omega_0} \\ -\sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega_0} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega_0} x(n) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{N^2 - \frac{1-\cos N\omega_0}{1-\cos\omega_0}} \begin{bmatrix} N\sum_{n=0}^{N-1} x(n) - \frac{1-e^{jN\omega_0}}{1-e^{j\omega_0}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_0} \\ N\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_0} - \frac{1-e^{-jN\omega_0}}{1-e^{-j\omega_0}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) N jämn och $\omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$.

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} c \\ a \end{array}\right] &= \frac{1}{N^2 - \underbrace{\frac{1-\cos N\frac{2\pi k}{N}}{1-\cos\frac{2\pi k}{N}}}_{=0}} \left[\begin{array}{c} N\sum_{n=0}^{N-1} x(n) - \underbrace{\frac{1-e^{jN\frac{2\pi k}{N}}}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}}}}_{=0} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{jn\omega_0} \\ N\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_0} - \underbrace{\frac{1-e^{-jN\frac{2\pi k}{N}}}{1-e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}}_{=0} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) \\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jn\omega_0} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Uppgift 2.14

Bestäm egenvärdena och egenvektorerna till matrisen

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{array}\right]$$

Lösning 2.14

Det linjära systemet Karaktäristiska polynomet ges av

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

som har rötterna (egenvärdena) $\lambda_1 = 2$ och $\lambda_2 = 3$. Egenvektorn för $\lambda_1 = 2$ erhålls från ekvationssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$$

Båda raderna ger var för sig $v_1 = -v_2$ dvs

$$\mathbf{v}_1 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right]$$

På samma sätt blir egenvektorn för $\lambda_2 = 3$

$$\mathbf{v}_2 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right]$$

Uppgift 2.16

Antag att en $n \times n$-matris $\mathbf{A}$ har egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ och egenvektorer $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

a) Vilka är egenvärdena och egenvektorerna till $\mathbf{A}^2$?

b) Vilka är egenvärdena och egenvektorerna till $\mathbf{A}^{-1}$?

Lösning 2.16

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

a)

$$\mathbf{A}^2\mathbf{v} = \mathbf{A}\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$$

Egenvektorerna för $\mathbf{A}^2$ är identiska med de för $\mathbf{A}$, medan egenvärdena är λ_i^2.

b)

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}(\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{A}^{-1}\lambda^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$$

Egenvektorerna för $\mathbf{A}^{-1}$ är identiska med för $\mathbf{A}$, medan egenvärdena är $1/\lambda_i$.

Kapitel 3

Uppgift 3.1

Låt x vara en stokastisk variabel med medelvärde m_x och varians σ_x^2. Låt x_i för $i = 1, 2, \ldots, N$ vara N oberoende mätningar av den stokastiska variabeln x.

a) Om sampelmedelvärdet $\hat{m}_x$ definieras som

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i,$$

avgör om sampelvariansen

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{m}_x)^2$$

är väntevärdesriktig ('unbiased'), dvs om $E\{\hat{\sigma}_x^2\} = \sigma_x^2$?

Lösning 3.1

a)

$$\begin{aligned}
E\left[\hat{\sigma}_x^2\right] &= E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}x_j\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[\left((x_i - m_x) - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j - m_x)\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E\left[(x_i - m_x)^2 - \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i - m_x)(x_j - m_x) + \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(x_j - m_x)(x_k - m_x)\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_x^2 - \frac{2}{N}\sigma_x^2 + \frac{1}{N}\sigma_x^2\right) = \frac{N-1}{N}\sigma_x^2 \neq \sigma_x^2
\end{aligned}$$

Variansskattningen är ej väntevärdesriktig.

Uppgift 3.3

En tidsdiskret stokastisk process $x(n)$ genereras enligt

$$x(n) = \sum_{k=1}^{p} a(k)x(n-k) + w(n)$$

där $w(n)$ är vitt brus med variansen σ_w^2. En ny process, $z(n)$, bildas genom att brus adderas till $x(n)$,

$$z(n) = x(n) + v(n)$$

där $v(n)$ är vit med variansen σ_v^2 och okorrelerad med $w(n)$.

a) Vad blir effektspektrumet för $x(n)$?

b) Vad blir effektspektrumet för $z(n)$?

Lösning 3.3

a) Effektspektrum beskrivs i avsnitt 3.3.8. Vitt brus $w(n)$ genom ett allpolsfilter $\Longleftrightarrow$ AR(p) process (se avsnitt 3.6.2). Ekvation (3.107) och (3.119) ger

$$P_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 \frac{|b(0)|^2}{|A_p(e^{j\omega})|^2}$$

där

$$A_p(e^{j\omega}) = 1 - \sum_{k=1}^{p} a(k)e^{-jk\omega}$$

och

$$b(0) = 1$$

Notera att $a(k)$ är definierad med motsatt tecken jämfört med $a_p(k)$ i ekv. (3.107).

b) Eftersom $w(n)$ är okorrelerad med $v(n)$, och $x(n)$ är en linjär kombination av $w(n)$, så

$$r_z(k) = r_x(k) + r_v(k)$$

Att beräkna effektspektrat, definierad av (3.71),

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k)e^{-j\omega k}$$

är en linjär operation och därför,

$$P_z(e^{j\omega}) = P_x(e^{j\omega}) + P_v(e^{j\omega})$$

vilket ger

$$P_z(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_w^2}{|A_p(e^{j\omega})|^2} + \sigma_v^2 = \frac{\sigma_w^2 + \sigma_v^2|A_p(e^{j\omega})|^2}{|A_p(e^{j\omega})|^2}$$

Uppgift 3.5

Bestäm effektspektrum för följande svagt stationära processer med givna autokorrelationsfunktioner.

a) $r_x(k) = 2\delta(k) + j\delta(k-1) - j\delta(k+1)$.

b) $r_x(k) = \delta(k) + 2(0.5)^{|k|}$.

c) $r_x k = 2\delta(k) + \cos(\pi k/4)$.

Lösning 3.5

a) Ekvation (3.69) ger

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k)e^{-j\omega k} = 2 + je^{-j\omega} - je^{j\omega} = 2 + 2\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} = 2 + 2\sin\omega$$

b) Använd den sista relationen i Tabell 2.4 med $z = e^{j\omega}$.

$$P_x(e^{j\omega}) = 1 + 2\frac{1-\frac{1}{4}}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{j\omega}\right)} = \frac{\frac{11}{4} - \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}}{\frac{5}{4} - \frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}} = \frac{11-4\cos\omega}{5-4\cos\omega}$$

c)

$$r_x k = 2\delta(k) + cos(\pi k/4) = 2\delta(k) + \frac{1}{2}\left(e^{j\pi k/4} + e^{-j\pi k/4}\right)$$

Använd sambanden

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad , \quad e^{j\omega_0 n}x(n) \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

eller modulationsegenskapen på sidan 13 i Hayes.

$$P_x(e^{j\omega}) = 2 + \pi\delta(\omega - \frac{\pi}{4}) + \pi\delta(\omega + \frac{\pi}{4})$$

Uppgift 3.6

Bestäm autokorrelationsfunktionen för följande spektraltätheter:

a) $P_x(e^{j\omega}) = 3 + 2\cos\omega$

b) $P_x(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{5+3\cos\omega}$

Lösning 3.6

a)

$$P_x(e^{j\omega}) = 3 + e^{j\omega} + e^{-j\omega}$$

dvs, $r_x(0) = 3$, $r_x(1) = r_x(-1) = 1$ och för övrigt lika med noll.

b) Tabell 2.4 ger

$$\alpha^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{5+3\cos\omega} = \frac{k_1}{k_2}\cdot\frac{1-\alpha^2}{(1+\alpha^2)-2\alpha\cos\omega}$$

Identifiera parametrarna k_1, k_2 och α:

$$k_2(1+\alpha^2) = 5$$
$$-2\alpha k_2 = 3$$

Dessa samband har lösningarna $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$ eller $\alpha_2 = -3$. För stabilitet måste $|\alpha| < 1$, så $\alpha = \alpha_1 = -\frac{1}{3}$ är den rätta lösningen, tillsammans med $k_1 = \frac{9}{8}$ och $k_2 = \frac{9}{2}$. Autokorrelationsfunktionen blir således

$$r_x(k) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|}$$

Uppgift 3.8

Betrakta den stokastiska processen

$$x(n) = A\cos(n\omega_0 + \Phi) + w(n)$$

där $w(n)$ är vitt, gaussiskt brus med medelvärde noll och varians σ_w^2. Bestäm autokorrelationsfunktionen och effektspektrumet för vart och ett av följande fall:

a) A är en gaussisk variabel med medelvärde noll och varians σ_A^2; ω_0 och Φ är konstanter.

b) Φ är rektangelfördelad över intervallet $[-\pi, \pi]$; A och ω_0 är konstanter.

Lösning 3.8

a)

$$\begin{aligned} r_x(k,l) &= E[x(k)x(l)] \\ &= E[A\cos(k\omega_0+\Phi)\cdot A\cos(l\omega_0+\Phi)] + \sigma^2\delta(k-l) \\ &= E[A^2]\cdot\cos(k\omega_0+\Phi)\cdot\cos(l\omega_0+\Phi) + \sigma^2\delta(k-l) \\ &= \sigma_A^2\cdot\cos(k\omega_0+\Phi)\cdot\cos(l\omega_0+\Phi) + \sigma^2\delta(k-l) \end{aligned}$$

Detta uttryck kan inte skrivas som $r_x(i)$ med $i = k - l$ och därför är $x(n)$ inte WSS.

b) Φ är rektangelfördelad över $[-\pi, \pi]$, dvs $\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}$.

$$\begin{aligned} r_x(k,l) &= E[x(k)x(l)] \\ &= E[A\cos(k\omega_0+\Phi)\cdot A\cos(l\omega_0+\Phi)] + \sigma^2\delta(k-l) \\ &= A^2 E[\cos(k\omega_0+\Phi)\cdot\cos(l\omega_0+\Phi)] + \sigma^2\delta(k-l) \\ &= \frac{A^2}{2}E[\cos((k+l)\omega_0+2\Phi) + \cos((k-l)\omega_0)] + \sigma^2\delta(k-l) \\ &= \frac{A^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}[\cos((k+l)\omega_0+2\Phi) + \cos((k-l)\omega_0)]\,d\Phi + \sigma^2\delta(k-l) \\ &= \frac{A^2}{2}\cos((k-l)\omega_0) + \sigma^2\delta(k-l) = r_x(i) \end{aligned}$$

för $i = k - l$, därför är $x(n)$ WSS.

$$r_x(i) = \sigma^2\delta(i) + \frac{A^2}{2}\cos i\omega_0$$

$$P_x(e^{j\omega}) = \sigma^2 + \frac{A^2\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0) + \frac{A^2\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0)$$

Uppgift 3.10

Insignalen till ett linjärt, tidsinvariant filter med impulssvaret

$$h(n) = \delta(n) + \tfrac{1}{2}\delta(n-1) + \tfrac{1}{4}\delta(n-2)$$

är en svagt stationär process med medelvärde noll och autokorrelationsfunktion

$$r_x(k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}$$

a) Bestäm variansen för utsignalen $y(n)$?

b) Bestäm autokorrelationsfunktionen, $r_y(k)$, för utsignalen för alla värde på k.

Lösning 3.10

a,b) Se avsnitt 3.4 för filtrering av stokastiska processer. Enligt ekv. (3.88) erhåller vi

$$\begin{aligned}
r_y(k) &= r_x(k) * h(k) * h^*(-k) \\
&= r_x(k) * \left(\frac{1}{4}\delta(k-2) + \frac{5}{8}\delta(k-1) + \frac{21}{16}\delta(k) + \frac{5}{8}\delta(k+1) + \frac{1}{4}\delta(k+2)\right) \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}^{|k-2|} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}^{|k-1|} + \frac{21}{16}\cdot\frac{1}{2}^{|k|} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2}^{|k+1|} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}^{|k+2|}
\end{aligned}$$

$$\sigma_y^2 = r_y(0) = \frac{33}{16}$$

Uppgift 3.15

Avgör vilken/vilka av följande funktioner som är en giltig autokorrelationsfunktion för en svagt stationär process; ange motiven till varför funktionen är giltig eller ogiltig. Beskriv ett sätt att generera en process med den givna autokorrelationsfunktionen.

a) $r_x(k) = \delta(k-1) + \delta(k+1)$

b) $r_x(k) = 3\delta(k) + 2\delta(k-1) + 2\delta(k+1)$

c) $r_x(k) = \exp(jk\pi/4)$

d) $r_x(k) = \begin{cases} 1 & ; \quad |k| < N \\ 0 & ; \quad \text{f. ö.} \end{cases}$

e) $r_x(k) = \begin{cases} \dfrac{N-|k|}{N} & ; \quad |k| < N \\ 0 & ; \quad \text{f. ö.} \end{cases}$

Lösning 3.15

a) $r_x(0)$ måste vara större än $r_x(1)$. **Ej giltig**.

b)

$$P_x(e^{j\omega}) = 3 + 2e^{-j\omega} + 2e^{j\omega} = 3 + 4\cos\omega$$

Spektrat måste vara positivt. **Ej giltig**.

c) Alla tre egenskaperna på sidan 83 är uppfyllda. ven gäller

$$r_x(k) = e^{jk\pi/4} \longrightarrow P_x(e^{j\omega}) = 2\pi\delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right)$$

som är positiv för alla ω. Autokorrelationen svarar mot en harmonisk process, som kan genereras enligt

$$x(n) = e^{j\left(\frac{n\pi}{4} + \phi\right)}$$

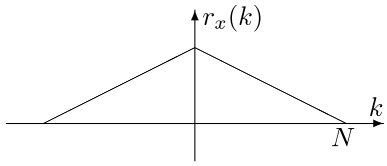
där ϕ är rektangelfördelad mellan $-\pi$ och π, dvs en signal med bestämd frekvens men med slumpmässig fas. **Giltig**.

d)

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} 1 \cdot e^{-j\omega k} = e^{-j\omega(-N+1)} \frac{1 - e^{-j\omega(2N-1)}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin\left(\left(N - \frac{1}{2}\right)\omega\right)}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Denna spektraltäthet är inte alltid positiv. **Ej giltig**.

e) Alla tre egenskaperna på sidan 83 är uppfyllda. Autokorrelationsfunktionen ser ut så här:



Enligt ekv. 3.88 i boken:

$$r_y(k) = r_x(k) * h(k) * h^*(k)$$

Man kan se att autokorrelationsfunktionen uppkommer genom faltning av två rektangelformade impulssvar,

$$h_r(n) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq n < N \\ 0 & ; \quad \text{f. ö.} \end{cases}$$

Effektspektrumet blir positivt, eftersom det blir kvadraten av effektspektrumet för det rektangelformade impulssvaret (jfr. deluppgift d). Processen kan genereras genom att filtrera vitt brus med $h_r(n)$. **Giltig**.

Uppgift 3.17

Givet en svagt stationär process $x(n)$, vill vi designa en linjär prediktor som ska prediktera värdet på $x(n+1)$ utifrån en linjärkombination av $x(n)$ och $x(n-1)$, dvs

$$\hat{x}(n+1) = ax(n) + bx(n-1)$$

där a och b är prediktorparametrarna. Antag att processen har medelvärde noll,

$$E\{x(n)\} = 0$$

och att medelkvadratfelet skall minimeras

$$\xi = E\left\{\left[x(n+1) - \hat{x}(n+1)\right]^2\right\}$$

a) Med $r_x(k)$ som autokorrelationen för $x(n)$, bestäm den optimala prediktorn för $x(n)$ genom att hitta de värden på a och b som minimerar medelkvadratfelet.

b) Vad är det minimala medelkvadratfelet för prediktorn? Uttryck svaret i $r_x(k)$.

c) Hur blir prediktorn om $x(n+1)$ är okorrelerad med $x(n)$?

d) Hur blir prediktorn om $x(n+1)$ är okorrelerad med både $x(n)$ och $x(n-1)$?

Lösning 3.17

a)

$$\hat{x}(n+1) = ax(n) + bx(n-1)$$

$$m_x = E[x(n)] = 0$$

$$\begin{aligned}
\xi &= E[(x(n+1) - \hat{x}(n+1))^2] \\
&= E[x^2(n+1)] - 2E[x(n+1)ax(n) + x(n+1)bx(n-1)] \\
&\quad +a^2E[x^2(n)] + 2abE[x(n)x(n-1)] + b^2E[x^2(n-1)]
\end{aligned}$$

$$\xi = r_x(0) - 2ar_x(1) - 2br_x(2) + a^2 r_x(0) + 2abr_x(1) + b^2 r_x(0)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial a} = -2r_x(1) + 2ar_x(0) + 2br_x(1) = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial b} = -2r_x(2) + 2ar_x(1) + 2br_x(0) = 0$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{r_x^2(0) - r_x^2(1)} \begin{bmatrix} r_x(0) & -r_x(1) \\ -r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

b) Ortogonalitetsprincipen ger

$$\xi_{min} = E[(x(n+1) - \hat{x}(n+1))x(n+1)] = r_x(0) - ar_x(1) - br_x(2)$$

c) Om $x(n+1)$ är okorrelerad med $x(n)$, dvs $r_x(1) = 0$, så blir ekvationen

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & 0 \\ 0 & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{r_x(2)}{r_x(0)} \end{bmatrix}$$

d) Om $x(n+1)$ är okorrelerad med $x(n)$ och $x(n-1)$, blir $a = b = 0$ och prediktorn blir $\hat{x}(n+1) = E\{x(n+1)\} = 0$.

Uppgift 3.25

I vissa sammanhang kan datainsamlingen misslyckas så att sampel antingen saknas eller har orimliga värden (s.k. "outliers"). Antag att vi har N sampel av en svagt stationär process $x(n)$ och att ett sampel, $x(n_0)$, saknas. Låt $\mathbf{x}$ vara en vektor som innehåller de användbara sampelvärdena,

$$\mathbf{x} = \left[x(0), x(1), \ldots, x(n_0 - 1), x(n_0 + 1), \ldots, x(N)\right]^T$$

a) Låt $\mathbf{R}_x$ vara autokorrelationsmatrisen för vektorn $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{R}_x = E\left\{\mathbf{x}\mathbf{x}^H\right\}$$

Vilket/vilka av följande påståenden är sanna:

1. $\mathbf{R}_x$ är Toeplitz.
2. $\mathbf{R}_x$ är hermitisk.
3. $\mathbf{R}_x$ är positivt semidefinit.

b) Givet autokorrelationsmatrisen för $\mathbf{x}$, är det möjligt att finna autokorrelationsmatrisen för vektorn

$$\mathbf{x} = \left[x(0), x(1), \ldots, x(N)\right]^T$$

som inte saknar $x(n_0)$? Om det går, hur gör man? Om det inte går, förklara varför.

Lösning 3.25

a) Till exempel,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(2) & r_x(3) \\ r_x(2) & r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(3) & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}$$

1) Ej Toeplitz. 2) $\mathbf{R}_x^H = \mathbf{R}_x$ Hermitisk. 3) $\mathbf{v}^H\mathbf{R}_x\mathbf{v} = \mathbf{v}^H E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H]\mathbf{v} = E[\mathbf{v}^H\mathbf{x}\mathbf{x}^H\mathbf{v}] = E[|\mathbf{v}^H\mathbf{x}|^2] \geq 0$ Positiv.

b) Ja, en Toeplitzmatris av ordning 4 kan konstrueras från $\mathbf{R}_x$ ovan.

Uppgift 3.26

Effektspektrumet för en svagt stationär process $x(n)$ är

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{25 - 24\cos\omega}{26 - 10\cos\omega}$$

Bestäm vitningsfiltret $H(z)$ som producerar vitt brus med variansen 1 när insignalen är $x(n)$.

Lösning 3.26

$$P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z)Q^*(1/z^*) = \sigma_0^2 H(z)H^*(z^{-1})$$

eftersom $x(n)$ är reell.

$$P_x(e^{j\omega}) = 1\frac{25 - 24\cos\omega}{26 - 10\cos\omega} = 1\frac{25 - 12z - 12z^{-1}}{26 - 5z - 5z^{-1}} = 1\frac{(4 - 3z)(4 - 3z^{-1})}{(5 - z)(5 - z^{-1})} = \frac{16}{25}\frac{(1 - 0.75z^{-1})(1 - 0.75z)}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.2z)}$$

$H(z)$ väljes sedan som den del som är minimum fas, dvs

$$H(z) = \frac{4}{5}\frac{(1 - 0.75z^{-1})}{(1 - 0.2z^{-1})}$$

Motsvarande vitningsfilter blir

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{5}{4}\frac{(1 - 0.2z^{-1})}{(1 - 0.75z^{-1})}$$

Kapitel 4 – Signalmodellering

Uppgift 4.2

En tredje ordningens Padé-approximation med enbart poler till en signal $x(n)$ är

$$H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3}}$$

Vilken information om $x(n)$ kan man få från denna modell?

Lösning[4.2]:

$$H(z) = \frac{1}{1 + 2z^{-1} + z^{-2} + 3z^{-3}}$$

$p = 3$, $q = 0$, dvs $p + q + 1 = 4$ sampel av $x(n)$ är kända. Enligt Tabell 4.1,

$$\begin{bmatrix} x(0) & 0 & 0 & 0 \\ x(1) & x(0) & 0 & 0 \\ x(2) & x(1) & x(0) & 0 \\ x(3) & x(2) & x(1) & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ a_p(2) \\ a_p(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lös $x(0)$ från rad 1, sedan $x(1)$ från rad 2, etc.

$$\mathbf{x} = [1, -2, 3, -7, ...]$$

Uppgift 4.6

En reellvärd signal $x(n)$ antas vara känd för $n = 0, 1, \ldots, N$. Med hjälp av *bakåtkovariansmetoden* kan koefficienterna $a_1, \cdots, a_p$ till den polmodell som minimerar *bakåtprediktionsfelet*,

$$\mathcal{E}_p^- = \sum_{n=p}^{N} [e_p^-(n)]^2$$

bestämmas, där

$$e_p^-(n) = x(n-p) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) x(n+k-p)$$

a) Visa att koefficienterna $a_p(k)$ som minimerar $\mathcal{E}_p^-$ satisfierar normalekvationer på formen

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a}_p = -\mathbf{r}_x$$

där

$$\mathbf{a}_p = [a_p(1), a_p(2), \ldots, a_p(p)]^T$$

och bestäm uttryck för elementen i $\mathbf{R}_x$ och $\mathbf{r}_x$.

b) Är lösningen till framåtkovariansmetoden identisk med lösningen till bakåtkovariansmetoden? Motivera.

c) Betrakta en ny definition av felkriteriet taget som summan av framåt- och bakåtprediktionsfelen,

$$\mathcal{E}_p^B = \sum_{n=p}^{N} \left\{ [e_p^+(n)]^2 + [e_p^-(n)]^2 \right\},$$

där $e_p^-(n)$ är bakåtprediktionsfelet definierat ovan, och $e_p^+(n)$ är framåtprediktionsfelet som används i kovariansmetoden,

$$e_p^+(n) = x(n) + \sum_{k=1}^{P} a_p(k)x(n-k)$$

Härled normalekvationerna för koefficienterna som minimerar $\mathcal{E}_p^B$. (Denna metod är känd under namnet *modifierade kovariansmetoden.*)

d) Betrakta signalen

$$x(n) = \beta^n \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N$$

Hitta första ordningens polmodell ($p = 1$) som minimerar $\mathcal{E}_p^B$ och bestäm värdet av $\mathcal{E}_p^B$. För vilka värden på β är modellen stabil? Vad händer med modellen och modellfelet när $N \to \infty$?

Lösning[4.6]:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_p^-}{\partial a_p(l)} &= \sum_{n=p}^{N} 2e_p^-(n) \frac{\partial e_p^-}{\partial a_p(l)} \\
&= \sum_{n=p}^{N} 2e^-(n)x(n+l-p) \\
&= 2\sum_{n=p}^{N} [x(n-p) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)x(n+k-p)]x(n+l-p) = 0
\end{aligned}$$

Med följande definition av $r_x(k,l)$

$$r_x(k,l) = \sum_{n=p}^{N} x(n+k-p)x(n+l-p) = \sum_{n=0}^{N-p} x(n+k)x(n+l)$$

får vi normalekvationen

$$\sum_{k=1}^{p} a_p(k) r_x(k,l) = -r_x(0,l)$$

för $l = 1, ..., p$. Denna kan skrivas på formen $\mathbf{R}_x \mathbf{a}_p = -\mathbf{r}_x$.

b) Nej, eftersom definitionen av $r_x(k,l)$ är olika.

c) På samma sätt som i a) fås

$$\frac{\partial \mathcal{E}_p^-}{\partial a_p(l)} = \sum_{n=p}^{N} 2\left[e_p^+(n)x(n-l) + e_p^-(n)x(n+l-p)\right] = 0$$

Med

$$r_x(k,l) = \sum_{n=p}^{N} x(n-l)x(n-k)$$

fås normalekvationen

$$\sum_{k=1}^{p} a_p(k)\left[r_x(l,k) + r_x(p-l,p-k)\right] = -[r_x(0,l) + r_x(p-l,p)]$$

för $l = 1, ..., p$.

d) Med $p = 1$ får vi från normalekvationen ovan

$$a(1) = -\frac{r_x(1,0) + r_x(0,1)}{r_x(1,1) + r_x(0,0)} = -\frac{2r_x(1,0)}{r_x(1,1) + r_x(0,0)}$$

Eftersom $x(n) = \beta^n$ för $n = 0, ..., N$ så är

$$r_x(0,0) = \sum_{n=1}^{N} x^2(n) = \beta^2 \frac{1-\beta^{2N}}{1-\beta^2}$$

$$r_x(1,1) = \sum_{n=1}^{N} x^2(n-1) = \frac{1-\beta^{2N}}{1-\beta^2}$$

$$r_x(1,0) = \sum_{n=1}^{N} x(n)x(n-1) = \beta\frac{1-\beta^{2N}}{1-\beta^2}$$

Därför är,

$$a(1) = -\frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

Nämnaren är för alla värden på β större än täljaren och därför är modellen stabil. Modelleringsfelet kan skrivas som

$$\mathcal{E}_p^B = r_x(0,0) + r_x(p,p) + \sum_{k=1}^{p} a_p(k)[r_x(0,k) + r_x(p,p-k)]$$

$$\mathcal{E}_1^B = r_x(0,0) + r_x(1,1) + a_1(1)(r_x(0,1) + r_x(1,0)) = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}(1-\beta^{2N})$$

Detta uttryck går inte mot noll då N går mot oändligheten.

Uppgift 4.10

Vi vill modellera en signal $x(n)$ med en modell på formen

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + z^{-N}\left[\sum_{k=1}^{p} a_p(k)z^{-k}\right]}$$

För $p = 2$ blir modellen

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + a(1)z^{-N-1} + a(2)z^{-N-2}}$$

Härled normalekvationerna som definierar de koefficienter som minimerar Pronyfelet

$$\mathcal{E}_p = \sum_{n=0}^{\infty} |e(n)|^2$$

där

$$e(n) = x(n) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(n-l-N)$$

och ge ett uttryck för det minimala felet.

Lösning[4.10]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial a_p(k)} &= \sum_{n=0}^{\infty} 2e(n)\frac{\partial e(n)}{\partial a_p(k)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2e(n)x(n-k-N) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left[x(n) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(n-l-N)\right]x(n-k-N) = 0
\end{aligned}$$

Eftersom $r_x(k) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)x(n-k)$ kan detta uttryck skrivas som

$$r_x(k+N) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)r_x(k-l) = 0$$

dvs för alla k,

$$\sum_{l=1}^{p} a_p(l)r_x(k-l) = -r_x(k+N)$$

Dessa ekvationer kan också skrivas i matrisform med en rad för varje k.

Det minimala felet kan skrivas som

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_p &= \sum_{n=0}^{\infty} e^2(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e(n)\left[x(n) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(n-l-N)\right]
\end{aligned}$$

Det minimala felet är då ortogonalt mot $x(n-k-N)$ för alla $k = 1, \ldots, p$, således,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{p,min} &= \sum_{n=0}^{\infty} e(n)x(n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[x(n) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(n-l-N)\right]x(n) \\
&= r_x(0) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)r_x(l+N)
\end{aligned}$$

Uppgift 4.11

Vi vill modellera en signal $x(n)$ enligt figuren

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \hat{x}(n)$$

där $h(n)$ är ett filter med enbart poler vars systemfunktion är på formen

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 + \sum_{k=1}^{p} a_p(k) z^{-2k}}.$$

Modifiera Prony-normalekvationerna så man kan bestämma koefficienterna $a_p(k)$ i $H(z)$ från insignalen $x(n)$.

Lösning[4.11]:

$$\mathcal{E}_p = \sum_{n=0}^{\infty} e^2(n)$$

där

$$e(n) = x(n) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) x(n - 2l)$$

Derivering ger,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial a_p(k)} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} e(n) x(n - 2k) \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left[x(n) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) x(n - 2l) \right] x(n - 2k) \\
&= 2 \left(r_x(2k) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l) r_x(2k - 2l) \right) = 0
\end{aligned}$$

dvs för $k = 1 \ldots p$,

$$\sum_{l=1}^{p} a_p(l) r_x(2k - 2l) = -r_x(2k).$$

För ett exempel med $p = 2$ kan denna ekvation uttryckas i matrisform

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(2) \\ r_x(2) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x(2) \\ -r_x(4) \end{bmatrix}$$

Uppgift 4.18

Ta fram ett slutet uttryck för de minsta-kvadratanpassade FIR inversfiltret av längd N för följande system.

a) $G(z) = \dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \quad ; \quad |\alpha| < 1$

b) $G(z) = 1 - z^{-1}$

c) $G(z) = \dfrac{\alpha - z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}} \quad ; \quad |\alpha| < 1$

Lösning[4.18]:

a) Inversen till IIR är FIR!

$$H(z) = 1 - \alpha z^{-1}$$

$$h_(n) = \delta(n) - \alpha\delta(n-1)$$

b) Invers till FIR är IIR. Beräkna istället LS FIR invers. $G(z) = 1 - z^{-1}$ ger

$$r_g(k) = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ -1 & |k| = 1 \\ 0 & \text{f. ö.} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}_g h_N = g(0)\mathbf{u}_1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ddots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_N(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_N(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Raderna innanför den första och sista raden beskriver differensekvationen

$$-h(k-2) + 2h(k-1) - h(k) = 0$$

med karaktäristiska polynomet

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0.$$

Lösningen till differensekvationen för varje rad är $h_N = (c_1 + c_2 n)\alpha^n$ med $\alpha = 1$ (dubbelrot till karaktäristiska polynomet). Parametrarna c_1 och c_2 bestäms sedan från första och sista raden. Första raden ger

$$2h_N(0) - h_N(1) = 2c_1 - (c_1 + c_2) = 1$$

Sista raden ger

$$-h_N(N-2) + 2h_N(N-1) = -(c_1 + (N-2)c_2) + 2(c_1 + (N-1)c_2) = 0$$

vilket resulterar i $c_1 = \dfrac{N}{N+1}$ och $c_2 = -\dfrac{1}{N+1}$. Således,

$$h_N(n) = \frac{N-n}{N+1}$$

c) LS FIR invers. Notera (all-pass filter)

$$|G(e^{j\omega})|^2 = 1$$

$$r_g(k) = g(k) * g(-k) = \delta(k)$$

vilket ger $h_N(n) = \delta(n)$

Uppgift 4.19

Ett viktigt användningsområde för LS-inversfiltrering är sk "avfaltning". Denna operation innebär att man försöker återskapar den ursprungliga signalen $d(n)$ som blivit faltad med ett filter $g(n)$,

$$x(n) = d(n) * g(n)$$

genom att designa ett filter $h_N(n)$ som producerar ett estimat av $d(n)$ från $x(n)$, dvs

$$\hat{d}(n) = x(n) * h_N(n)$$

En av svårigheterna är att bruset i den observerade signalen kan förstärkas av inversfiltret. Om vi till exempel observerar

$$y(n) = d(n) * g(n) + v(n)$$

så blir den filtrerade observationen

$$y(n) * h_N(n) = \hat{d}(n) + v(n) * h_N(n) = \hat{d}(n) + u(n)$$

där

$$u(n) = v(n) * h_N(n)$$

är det filtrerade bruset. Ett sätt att reducera detta brus är att designa ett LS inversfilter som minimerar

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} |e(n)|^2 + \lambda E\left\{|u(n)|^2\right\}$$

där

$$e(n) = \delta(n - n_0) - h_N(n) * g(n)$$

och $\lambda > 0$ är en designparameter som väljs på lämpligt vis. Notera att för stora värden på λ kommer minimering av $\mathcal{E}$ att reducera det filtrerade bruset kraftigt på bekostnad av upplösning, dvs ett större fel $e(n)$, medan ett mindre λ leder till bättre upplösning men ett högre brus.

a) Antag att $v(n)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians σ_v^2. Visa att

$$E\left\{|u(n)|^2\right\} = \sigma_v^2 \mathbf{h}_N^H \mathbf{h}_N$$

där $\mathbf{h}_N$ är en vektor med koefficienterna i filtret $h_N(n)$.

b) Härled normalekvationerna som resulterar från minimering av felet

$$\mathcal{E} = \mathbf{e}^H \mathbf{e} + \lambda \sigma_v^2 \mathbf{h}_N^H \mathbf{h}_N$$

där $\mathbf{e} = [e(0), e(1), \ldots]^T$, och visa att de kan skrivas på formen

$$(\mathbf{R_g} + \alpha \mathbf{I})\mathbf{h}_N = \mathbf{g}_{n_0}^*$$

där $\alpha > 0$ är en vitningsparameter som beror på λ och $\mathbf{g}_{n_0}^*$ är

$$\mathbf{g}_{n_0}^* = \begin{bmatrix} g^*(n_0) \\ g^*(n_0 - 1) \\ \vdots \\ g^*(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösning[4.19]:

a)

$$\begin{aligned} E\left[|u(n)|^2\right] &= E\left[\sum_{k=0}^{N-1} h(k)v(n-k) \sum_{l=0}^{N-1} h^*(l)v^*(n-l)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \sum_{l=0}^{N-1} h^*(l) E\left[v(n-k)v^*(n-l)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \sum_{l=0}^{N-1} h^*(l)\sigma_v^2 \delta(l-k) = \sigma_v^2 \mathbf{h}_N^H \mathbf{h}_N \end{aligned}$$

där vi utnyttjat att

$$E[v(n-k)v^*(n-l)] = r_v((n-k)-(n-l)) = r_v(l-k) = \sigma_v^2\delta(l-k)$$

b) Felet som ska minimeras ges av

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} e^*(n)e(n) + \lambda\sigma_v^2 \sum_{l=0}^{N-1} h_N^*(l)h_N(l)$$

$$e(n) = \delta(n-n_0) - \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l)g(n-l)$$

Derivera $\mathcal{E}$ antingen med avseende på $h_N^*(k)$ (som i denna lösning) eller $h_N(k)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_N^*(k)} &= \sum_{n=0}^{\infty} e(n)\frac{\partial e^*(n)}{\partial h_N^*(k)} + \lambda\sigma_v^2 \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l)\frac{\partial h_N^*(l)}{\partial h_N^*(k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} -e(n)g^*(n-k) + \lambda\sigma_v^2 h_N(k) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta(n-n_0) - \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l)g(n-l)\right] g^*(n-k) + \lambda\sigma_v^2 h_N(k) \\ &= -g^*(n_0-k) + \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l) \sum_{n=0}^{\infty} g(n-l)g^*(n-k) + \lambda\sigma_v^2 h_N(k) \end{aligned}$$

Med

$$r_g(k-l) = r_g\big((n-k)-(n-l)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n-l)g^*(n-k)$$

kan uttrycket skrivas

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h_N^*(k)} = -\, g^*(n_0-k) + \sum_{l=0}^{N-1} h_N(l) r_g(k-l) + \lambda\sigma_v^2 h_N(k)$$

Detta sättes till noll och kan då skrivas

$$\sum_{l=0}^{N-1} h_N(l) r_g(k-l) + \alpha h_N(k) = g^*(n_0-k)$$

$$(\mathbf{R}_g + \alpha\mathbf{I})\mathbf{h}_N = \mathbf{g}_{n_0}^*$$

där

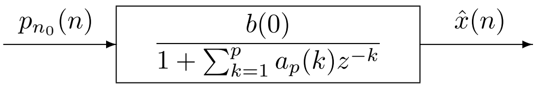
$$\alpha = \lambda\sigma_v^2 > 0$$

Uppgift 4.21

Ljudande tal kan modelleras som utsignalen från ett polfilter med ett pulståg $p_{n_0}(n)$ som insignal,

$$p_{n_0}(n) = \sum_{k=1}^{K} \delta(n - kn_0)$$

Tiden mellan pulserna, n_0, kallas för "pitchperioden". Vi antar att det ljudande talet, $x(n)$, har en känd pitchperiod, n_0. Vi tittar på en delsekvens, $x(n)$, av längd $N = 2n_0$ och modellerar denna signal enligt figuren:



där insignalen, $p_{n_0}(n)$, består av två pulser,

$$p_{n_0}(n) = \delta(n) + \delta(n - n_0).$$

Bestäm normalekvationerna som ger koefficienterna $a_p(k)$ som minimerar felet

$$\mathcal{E}_p = \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n)$$

där

$$e(n) = a_p(n) * x(n) - b(n) * p_{n_0}(n)$$

och $b(n) = b(0)\delta(n)$.

Lösning[4.21]:

Minimera

$$\mathcal{E}_p = \sum_{n=0}^{2n_0-1} e^2(n)$$

där

$$\begin{aligned} e(n) &= a_p(n) * x(n) - b(n) * p_{n_0}(n) \\ b(n) &= b(0)\delta(n) \\ p_{n_0}(n) &= \delta(n) + \delta(n - n_0) \end{aligned}$$

Därför,

$$e(n) = \sum_{l=0}^{p} a_p(l)x(n-l) - b(0)\delta(n) * (\delta(n) + \delta(n-n_0)) = \sum_{l=0}^{p} a_p(l)x(n-l) - b(0)(\delta(n) + \delta(n-n_0))$$

Derivera först med avseende på $a_p(k)$. Notera att $a_p(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial a_p(k)} &= \sum_{n=0}^{2n_0-1} 2e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial a_p(k)} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{2n_0-1} \left[\sum_{l=0}^{p} a_p(l)x(n-l) - b(0)(\delta(n) + \delta(n-n_0)) \right] x(n-k) \\ &= 2 \sum_{l=0}^{p} a_p(l) \sum_{n=0}^{2n_0-1} x(n-l)x(n-k) - 2b(0)\big(x(-k) + x(n_0 - k)\big) = 0 \end{aligned}$$

Introducera följande autokorrelationsfunktion

$$r_x(k,l) = \sum_{n=0}^{2n_0-1} x(n-l)x(n-k)$$

vilket ger

$$\sum_{l=1}^{p} a_p(l) r_x(k,l) - b(0)x(-k) - b(0)x(n_0-k) = -r_x(k,0)$$

där vi utnyttjat att $a_p(0) = 1$. Eftersom $x(n)$=0 för $n < 0$ och $k = 1 \dots p$ så blir termen i mitten på den västra sidan lika med noll. Med

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x(n_0-1) \\ \vdots \\ x(n_0-p) \end{bmatrix}$$

och

$$\mathbf{r}_x = \begin{bmatrix} r_x(1,0) \\ \vdots \\ r_x(p,0) \end{bmatrix}$$

får vi

$$\mathbf{R}_x \mathbf{a}_p - b(0)\mathbf{x} = -\mathbf{r}_x$$

Derivera nu med avseende på $b(0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial b(0)} &= -2 \sum_{n=0}^{2n_0-1} \left[\sum_{l=0}^{p} a_p(l)x(n-l) - b(0)(\delta(n) + \delta(n-n_0)) \right] [\delta(n) + \delta(n-n_0)] \\ &= -2 \left[x(0) + \underbrace{\sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(-l)}_{=0} - b(0) + x(n_0) + \sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(n_0-l) - b(0) \right] = 0 \end{aligned}$$

vilket ger

$$\sum_{l=1}^{p} a_p(l)x(n_0-l) - 2b(0) = -x(0) - x(n_0)$$

eller ekvivalent

$$\mathbf{x}^T \mathbf{a}_p - 2b(0) = -(x(0) + x(n_0))$$

Den slutliga matrisekvationen är därför

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_x & \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^T & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_p \\ -b(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_x \\ x(0) + x(n_0) \end{bmatrix}$$

Uppgift 4.24

Använd spektralfaktorisering för att hitta en MA-modell av ordning 2 för en process med autokorrelationen

$$\mathbf{r}_x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösning[4.24]:

$$\mathbf{r}_x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_x(z) = 3 + 1.5(z + z^{-1}) + 1(z^2 + z^{-2}) = z^2(1 + 1.5z^{-1} + 3z^{-2} + 1.5z^{-3} + z^{-4})$$

$$\begin{aligned} P_x(z) &= \sigma_x^2 B(z)B(z^{-1}) \\ &= \sigma_x^2(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(1 + b_1 z^1 + b_2 z^2) \\ &= \sigma_x^2 z^2(b_2 + (b_1 + b_1 b_2)z^{-1} + (1 + b_1^2 + b_2^2)z^{-2} + (b_1 + b_1 b_2)z^{-3} + b_2 z^{-4}) \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienterna ger ekvationerna

$$\begin{aligned} b_2\sigma_x^2 &= 1 \\ \sigma_x^2(b_1 + b_1 b_2) &= 1.5 \\ \sigma_x^2(1 + b_1^2 + b_2^2) &= 3 \end{aligned}$$

som när de löses ger en MA-modell för $x(n)$ som

$$B(z) = 1 + z^{-1} + 2z^{-2}$$

med $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$.

Kapitel 5 – Levinson-Durbins rekursion

Uppgift 5.1

Givet autokorrelationssekvensen

$$r_x(0) = 1, \quad r_x(1) = 0.8, \quad r_x(2) = 0.5, \quad r_x(3) = 0.1$$

räkna ut reklektionskoefficienterna, Γ_j, AR-parametrarna, $a_j(k)$, och modellfelen, ϵ_j, för $j = 1, 2, 3$.

Lösning 5.1: Levinson-Durbins rekursion i Tabell 5.1 blir

$$\begin{array}{ll}
\text{Initiera:} & a_0 = 1 \\
& \epsilon_0 = 1 \\
j = 0: & \gamma_0 = 0.8 \\
& \Gamma_1 = -0.8 \\
& a_1(1) = \Gamma_1 = -0.8 \\
& \epsilon_1 = 0.36 \\
j = 1: & \gamma_1 = -0.14 \\
& \Gamma_2 = 0.3889 \\
& \qquad a_2(1) = -1.111 \\
& a_2(2) = \Gamma_2 = 0.3889 \\
& \epsilon_2 = 0.3056 \\
j = 2: & \gamma_2 = -0.1444 \\
& \Gamma_3 = 0.4727 \\
& \qquad a_3(1) = -0.9273 \\
& \qquad a_3(2) = -0.1364 \\
& a_3(3) = \Gamma_3 = 0.4727 \\
& \epsilon_3 = 0.2373
\end{array}$$

Svaren blir alltså $\Gamma_1 = -0.8$, $\Gamma_2 = 0.3889$, $\Gamma_3 = 0.4727$,

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.11 \\ 0.3889 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.9273 \\ -0.1364 \\ 0.4727 \end{bmatrix}$$

och $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = 0.36$, $\epsilon_2 = 0.3056$ och $\epsilon_3 = 0.2373$.

Uppgift 5.6

Betrakta signalen

$$x(n) = \delta(n) + b\delta(n-1).$$

Antag att vi observerar $x(n)$ för $n = 0, 1, \ldots, N$.

a) Bestäm andra ordningens polmodell för $x(n)$ med hjälp av autokorrelationsmetoden.

b) Anta att vi vill bestämma en polmodell av ordning p för $x(n)$. Låt Γ_j beteckna den j:e reflektionskoefficienten i en latticeimplementation av polmodellen. Bestäm en rekursion för reklektionskoefficienterna som uttrycker Γ_j i termer av Γ_{j-1} och Γ_{j-2}.

Lösning 5.6:

a)

$$r_x(k) = (1 + b^2)\delta(k) + b\delta(k-1) + b\delta(k+1)$$

Använd Tabell 4.5 med $p = 2$. I matrisform,

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+b^2 & b \\ b & 1+b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = \frac{1}{1+b^2+b^4} \begin{bmatrix} -b(1+b^2) \\ b^2 \end{bmatrix}$$

b) Reflektionskoefficienerna ges av

$$\Gamma_{j+1} = -\frac{\gamma_j}{\epsilon_j}$$

där

$$\epsilon_{j+1} = \epsilon_j(1 - \Gamma_{j+1}^2)$$

och

$$\gamma_j = r_x(j+1) + \sum_{i=1}^{j} a_j(i) r_x(j-i+1)$$

Men eftersom $r_x(k) = 0$ för $|k| > 1$,

$$\gamma_j = a_j(j) r_x(1) = b\Gamma_j$$

Förhållandet mellan två följande reflektionskoefficienter blir

$$\frac{\Gamma_{j+1}}{\Gamma_j} = \frac{-\dfrac{\gamma_j}{\epsilon_j}}{-\dfrac{\gamma_{j-1}}{\epsilon_{j-1}}} = \frac{\gamma_j}{\gamma_{j-1}} \frac{\epsilon_{j-1}}{\epsilon_j} = \frac{\Gamma_j b}{\Gamma_{j-1} b} \frac{1}{1-\Gamma_j^2} = \frac{\Gamma_j}{\Gamma_{j-1}} \frac{1}{1-\Gamma_j^2}$$

En rekursiv lösning ges därmed av

$$\Gamma_{j+1} = \frac{\Gamma_j^2}{\Gamma_{j-1}(1-\Gamma_j^2)}$$

Uppgift 5.10

I diskussionen om Levinson-Durbins rekursion i boken visades att följande parameteruppsättningar är likvärdiga:

- $r_x(0), r_x(1), \ldots, r_x(p)$
- $a_p(1), a_p(2), \ldots, a_p(p), b(0)$
- $\Gamma_2, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p, \epsilon_p$

Beskriv vilka av dessa parametrar som ändras, och om möjligt hur, för var och en av de följande transformationerna.

a) Signalen $x(n)$ skalas med en konstant C.

$$x'(n) = Cx(n)$$

b) Signalen $x(n)$ moduleras med $(-1)^n$.

$$x'(n) = (-1)^n x(n)$$

Lösning 5.10:

a) $x'(n) = Cx(n)$ betyder $b'(0) = Cb(0)$ och $r_{x'}(k) = C^2 r_x(k)$. Filterparametrarna $\mathbf{a}$ påverkas inte eftersom autokorrelationsfunktionen påverkar båda sidorna lika i ekvationen

$$\mathbf{R}_{x'}\mathbf{a}_p = -\mathbf{r}_{x'} \Longrightarrow C^2\mathbf{R}_x\mathbf{a}_p = -C^2\mathbf{r}_x$$

vilket också gör att Γ_j inte påverkas. $b(0) = \sqrt{\epsilon_p}$, så ϵ blir C^2 ggr större.

b) $x'(n) = (-1)^n x(n)$ ger $r_{x'}(k) = (-1)^k r_x(k)$. Parametervektorn $\mathbf{a}$ måste också ha omväxlande tecken för att lösa normalekvationerna. Eftersom $\Gamma_j = a_j(j)$, kommer även tecknet på Γ_j att skifta. Felet ϵ_p påverkas inte eftersom den beror kvadratiskt på reflektionskoefficienterna. Slutligen, $b(0) = \sqrt{\epsilon_p}$ varför den inte påverkas.

Uppgift 5.12

Givet är $r_x(0) = 1$ och de tre första reflektionskoefficienterna $\Gamma_1 = 0.5$, $\Gamma_2 = 0.5$ och $\Gamma_3 = 0.25$,

a) Bestäm motsvarande autokorrelationssekvens $r_x(1)$, $r_x(2)$, $r_x(3)$.

b) Bestäm autokorrelationssekvensen $r_x(1)$, $r_x(2)$, $r_x(3)$ om Γ_3 är en fri variabel, dvs. lös ut autokorrelationsvärdena som funktion av Γ_3.

c) Samma som i b) men med både Γ_2 och Γ_3 som fria parametrar.

Lösning: 5.12:

a) Använd step-up rekursion (Tabell 5.2) för att ta fram $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1(1+\Gamma_2) \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{7}{8} \\ \frac{11}{16} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Använd nu ekvation 1a och 2c i inversa Levinson-Durbin rekursionen (Tabell 5.4) för att ta fram autokorrelationssekvensen (givetvis får alla ekvationer i Tabell 5.1 också användas).

$$\epsilon_0 = r_x(0) = 1$$

$$r_x(1) = -\Gamma_1 r_x(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\epsilon_1 = r_x(0)(1-\Gamma_1^2) = \frac{3}{4}$$

Med

$$\gamma_1 = -\Gamma_2 \epsilon_1$$

och

$$\gamma_1 = r_x(2) + \Gamma_1 r_x(1)$$

får vi

$$r_x(2) = \gamma_1 - \Gamma_1 r_x(1) = -\frac{1}{8}$$

och

$$\epsilon_2 = \epsilon_1(1-\Gamma_2^2) = \frac{9}{16}$$

Slutligen,

$$\gamma_2 = -\Gamma_3 \epsilon_2 = -\frac{9}{64}$$

och

$$\gamma_2 = r_x(3) + a_2(1) r_x(2) + a_2(2) r_x(1)$$

ger

$$r_x(3) = \gamma_2 - a_2(1) r_x(2) - a_2(2) r_x(1) = \frac{13}{64}$$

b) Från (a) har vi

$$r_x(3) = -\Gamma_3 \epsilon_2 - a_2(1) r_x(2) - a_2(2) r_x(1) = -\frac{9}{16}\Gamma_3 + \frac{11}{32}$$

c) Med Γ_2 som variabel

$$\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1+\Gamma_2) \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

och $\epsilon_2 = \frac{3}{4}(1-\Gamma_2^2)$ får vi

$$r_x(3) = -\Gamma_3 \frac{3}{4}(1-\Gamma_2^2) - \frac{1}{2}(1+\Gamma_2) r_x(2) - \Gamma_2 r_x(1)$$

Notera att

$$r_x(2) = -\epsilon_1 \Gamma_2 - a_1(1) r_x(1) = -\frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{1}{4}$$

Således, med $r_x(1) = -\frac{1}{2}$, får vi

$$r_x(3) = -\frac{3}{4}\Gamma_3(1-\Gamma_2^2) - \frac{1}{2}(1+\Gamma_2)(-\frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}\Gamma_2$$

Uppgift 5.17

Låt $\mathbf{R}_3$ vara den symmetriska Toeplitzmatris som bildas av autokorrelationssekvensen $r_x(0)$, $r_x(1)$, $r_x(2)$ och $r_x(3)$. Bestäm determinanten för $\mathbf{R}_3$ om de reflektionskoefficienter som erhålles efter Levinson-Durbins rekursion av $\mathbf{R}_3$ är

$$\Gamma_1 = \tfrac{1}{2} \qquad \Gamma_2 = \tfrac{1}{3} \qquad \Gamma_3 = \tfrac{1}{4}$$

och om $r_x(0) = 1$!

Lösning 5.17:
Använd ekvation (5.91) i Hayes:

$$\det \mathbf{R}_p = \prod_{k=0}^{p} \epsilon_k$$

$$\epsilon_0 = r_x(0) = 1$$

$$\epsilon_1 = \epsilon_0(1 - \Gamma_1^2) = \frac{3}{4}$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_1(1 - \Gamma_2^2) = \frac{2}{3}$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_2(1 - \Gamma_3^2) = \frac{5}{8}$$

$$\det(\mathbf{R}_3) = \frac{5}{16}$$

Uppgift 5.20

Låt $x(n)$ vara en stokastisk process med autokorrelationsfunktionen

$$r_x(k) = (0.2)^{|k|}.$$

a) Finn reflektionskoefficienterna Γ_1 och Γ_2 för en andra ordningens prediktor och rita motsvarande latticefilter.

b) Antag att okorrelerat vitt brus med varians $\sigma_w^2 = 0.1$ adderas till $x(n)$,

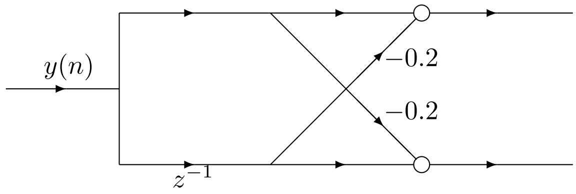
$$y(n) = x(n) + w(n).$$

Hur ändras reflektionskoefficienterna?

c) Vad kan man generellt säga om effekten på reflektionskoefficienterna när vitt brus adderas till en process?

Lösning 5.20:

a) Denna autokorrelationssekvens motsvarar en AR(1)-process, en andra ordningens prediktor är därför $A_2(z) = 1 - 0.2z^{-1} + 0z^{-2}$, dvs. samma som en första ordningens prediktor. Reflektionskoefficienterna är $\Gamma_1 = -0.2$ och $\Gamma_2 = 0$ ("one-stage lattice filter").



b)

$$r_y(k) = r_x(k) + 0.1\delta(k)$$

Levinson-Durbin. Talet kan också lösas på följande sätt. En en-stegs prediktionsfelsfilter

$$\begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1) \\ r_y(1) & r_y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_x(1) \\ -r_x(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0.2 \\ 0.2 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.04 \end{bmatrix}$$

ger

$$\begin{bmatrix} a(1) \\ a(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1812 \\ -0.0034 \end{bmatrix}$$

och tillhörande prediktionsfelsfilter är

$$A_2(z) = 1 - 0.1812z^{-1} - 0.0034z^{-2}$$

"Step-down" rekursionen ger

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= a_2(2) = -0.0034 \\ \Gamma_1 &= \frac{1}{1-\Gamma_2^2}\big(a_2(1) - a_2(2)a_2(1)\big) = \frac{a_2(1)}{1+\Gamma_2} = -0.1818 \end{aligned}$$

c) Allmänt sett bidrar additivt vitt brus till att polerna närmar sig origo.

Uppgift 5.22

Reflektionskoefficienterna för en tvåpolsmodell av en signal $x(n)$ är $\Gamma_1 = 0.25$ och $\Gamma_2 = 0.25$ och "modellfelet" är $\epsilon_2 = 9$.

a) Vad blir modellfelet, ϵ_3, för en tredje ordningens modell om $r_x(3) = 1$?

b) Om signalvärdena, $x(n)$, multipliceras med 1/2, dvs $y(n) = 0.5x(n)$, vad blir reflektionskoefficienterna och modellfelet för en tvåpolsmodell av $y(n)$?

Lösning 5.22:

a) Vi vill bestämma

$$\epsilon_3 = r_x(0) \prod_{i=1}^{3} (1 - \Gamma_i^2)$$

Vi vet

$$\epsilon_2 = r_x(0)(1 - \Gamma_1^2)(1 - \Gamma_2^2) = 9$$

vilket ger

$$r_x(0) = \frac{16^2}{5^2}$$

Vi behöver nu bestämma $\Gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\epsilon_2}$. Enligt Levinson-Durbin

$$\gamma_2 = r_x(3) + a_2(1) r_x(2) + a_2(2) r_x(1)$$

där vi först behöver ta fram $r_x(1), r_x(2)$ och $\mathbf{a}_2$.

$$\mathbf{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1(1+\Gamma_2) \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Nu kan vi beräkna $r_x(1)$:

$$\gamma_0 = r_x(1) \quad \text{och} \quad \Gamma_1 = -\frac{\gamma_0}{\epsilon_0} = \frac{r_x(1)}{r_x(0)}$$

ger

$$r_x(1) = -\Gamma_1 r_x(0) = -\frac{64}{25}$$

ven $r_x(2)$ kan nu beräknas:

$$\gamma_1 = r_x(2) + a_1(1) r_x(1) \quad , \quad \epsilon_1 = \left(1 - \tfrac{1}{16}\right) r_x(0) \quad \text{och} \quad \Gamma_2 = -\frac{\gamma_1}{\epsilon_1}$$

ger

$$r_x(2) = -a_2(1) r_x(1) - a_2(2) r_x(0) = -\frac{44}{25}$$

Slutligen,

$$\gamma_2 = r_x(3) + a_2(1) r_x(2) + a_2(2) r_x(1) = -\frac{19}{100}$$

$$\Gamma_3 = -\frac{\gamma_2}{\epsilon_2} = \frac{19}{900}$$

och

$$\epsilon_3 = 9\left(1 - \frac{19^2}{900^2}\right) = 8.996$$

b) Om $y(n) = 0.5x(n)$ så är $r_y(k) = 0.25 r_x(k)$. Detta påverkar båda sidor av normalekvationen lika, dvs skalning påverkar inte polmodellen (eller reflektionskoefficienterna). Men modelleringsfelet minskar till en fjärdedel, $\epsilon_2 = 9/4$, pga $r_y(0)$ istället för $r_x(0)$ i

$$\epsilon_2 = r_y(0) \prod_{i=1}^{2} (1 - \Gamma_i^2)$$

Kapitel 6

Uppgift 6.1

Designa ett tvåpols latticefilter som har poler i $re^{j\theta}$ och $re^{-j\theta}$ och rita en flödesgraf av filtret med beteckningar.

Lösning 6.1:
Ett andra ordningens filter med de givna rötterna har systemfunktionen

$$A_2(z) = (1 - z^{-1}re^{j\theta})(1 - z^{-1}re^{-j\theta}) = 1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}$$

För ett första ordningens filter ges systemfunktionen av

$$A_1(z) = 1 + \Gamma_1 z^{-1}$$

För ett andra ordningens filter gäller

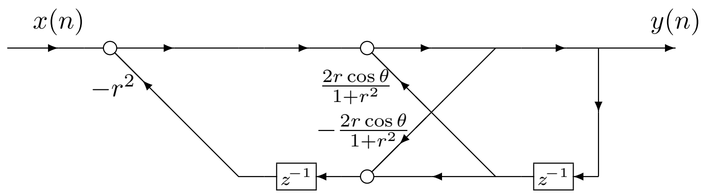
$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1(1+\Gamma_2) \\ \Gamma_2 \end{bmatrix}$$

Identifiering ger

$$\Gamma_1 = -\frac{2r\cos\theta}{1+r^2}$$

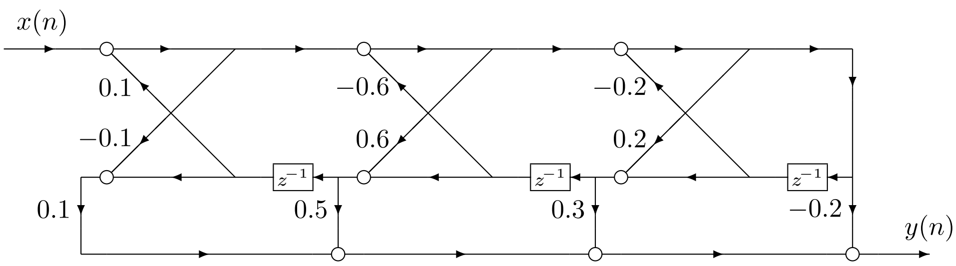
$$\Gamma_2 = r^2$$

Latticefilter:



Uppgift 6.3

Finn systemfunktionen $H(z)$ för latticefiltret i figuren nedan.



Lösning 6.3:

Identifiera koefficienterna i figuren:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 0.2 \\ \Gamma_2 &= 0.6 \\ \Gamma_3 &= -0.1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} c_3(0) &= -0.2 \\ c_3(1) &= 0.3 \\ c_3(2) &= 0.5 \\ c_3(3) &= 0.1 \end{aligned}$$

Använd sedan rekursionsekvationen (5.14) i Hayes för att lösa ut $a_3(k)$:

$$\mathbf{a}_{j+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_j(1) \\ a_j(2) \\ \vdots \\ a_j(j) \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_{j+1} \begin{bmatrix} 0 \\ a_j^*(j) \\ a_j^*(j-1) \\ \vdots \\ a_j^*(1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \Gamma_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.32 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.32 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0.32 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.26 \\ 0.568 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

$$A_3(z) = 1 + 0.26z^{-1} + 0.568z^{-2} - 0.1z^{-3}$$

Ekvation (6.50 ger

$$b_q(k) = \sum_{j=k}^{q} c_q(j) a_j^*(j-k)$$

$$b_3(0) = \sum_{j=0}^{3} c_3(j) a_j^*(j) = 0.15$$

$$b_3(1) = \sum_{j=1}^{3} c_3(j) a_j^*(j-1) = 0.5168$$

$$b_3(2) = \sum_{j=2}^{3} c_3(j) a_j^*(j-2) = 0.5260$$

$$b_3(3) = \sum_{j=3}^{3} c_3(j) a_j^*(j-3) = 0.1$$

Des sökta systemfunktionen är därmed

$$H(z) = \frac{0.15 + 0.5168z^{-1} + 0.526z^{-2} + 0.1z^{-3}}{1 + 0.26z^{-1} + 0.568z^{-2} - 0.1z^{-3}}$$

Uppgift 6.4

Rita en latticefilterstruktur för var och en av följande systemfunktioner

a) $H(z) = \dfrac{2 - z^{-1}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.49z^{-2}}$

b) $H(z) = \dfrac{1 + 1.3125z^{-1} + 0.75z^{-2}}{1 + 0.875z^{-1} + 0.75z^{-2}}$

Lösning 6.4:

a) Identifiera koefficienterna i överföringsfunktionen:

$$a_2(0) = 1 \qquad b_1(0) = \quad 2$$
$$a_2(1) = 0.7 \qquad b_1(1) = -1$$
$$a_2(1) = 0.49$$

$p = 2$ och $q = 1$.

$$\Gamma_2 = a_2(2) = 0.49$$

Använd (5.14) för att ta fram reflektionskoefficienterna.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_2(1) \\ a_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1(1) \\ 0 \end{bmatrix} + a_2(2) \begin{bmatrix} 0 \\ a_1(1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1 = a_1(1) = \frac{a_2(1)}{1 + a_2(2)} = 0.4698$$

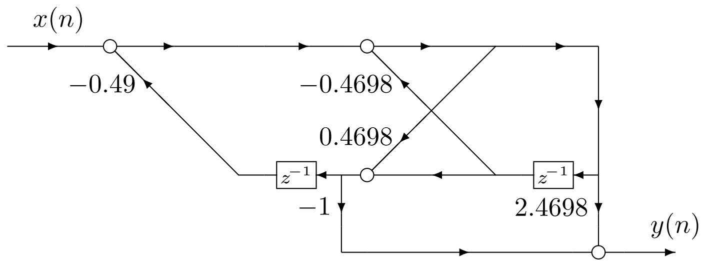
Använd (6.52) i Hayes för att få fram $c_q(k)$:

$$c_q(k) = b_q(k) - \sum_{j=k+1}^{q} c_q(j) a_j^*(j-k)$$

$$c_1(1) = b_1(1) = -1$$

$$c_1(0) = b_1(0) - c_1(1)a_1^*(1) = 2.4698$$

Latticefilter:



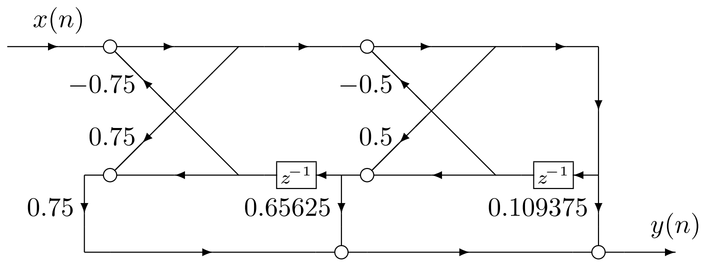
b) Med koefficienterna

$$a_2(0) = 1 \qquad b_2(0) = 1$$
$$a_2(1) = 0.875 \qquad b_2(1) = 1.3125$$
$$a_2(1) = 0.75 \qquad b_2(2) = 0.75$$

samt $p = 2$ och $q = 2$, lös uppgiften på samma sätt som i a).

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 &= 0.75 \\
\Gamma_1 &= \frac{a_2(1)}{1 + a_2(2)} = 0.5 \\
c_2(2) &= b_2(2) = 0.75 \\
c_2(1) &= b_2(1) - c_2(2)a_2(1) = 0.65625 \\
c_2(0) &= b_2(0) - c_2(1)a_1(1) - c_2(2)a_2(2) = 0.109375
\end{aligned}$$

Latticefilter:



Uppgift 6.8

Enligt figur 6.2b i Hayes kan ett latticefilter användas till att generera framåtprediktionsfelet, $e_p^+(n)$, samt bakåtprediktionsfelet, $e_p^-(n)$.

a) Vad är sambandet mellan magnituderna på de diskreta fouriertransformerna av $e_p^+(n)$ och $e_p^-(n)$?

b) Är det möjligt att designa ett realiserbart filter (dvs. både kausalt och stabilt) som kommer att ge utsignalen $e_p^-(n)$ från insignalen $e_p^+(n)$?

c) Är det möjligt att designa ett realiserbart filter som kommer att ge utsignalen $e_p^+(n)$ från insignalen $e_p^-(n)$?

Lösning 6.8:

d) z-transformen av felen kan uttryckas som

$$\begin{aligned}
E_p^+(z) &= A_p(z)X(z) \\
E_p^-(z) &= A_p^R(z)X(z)
\end{aligned}$$

Om vi kan skriva $A_p(z)$ som

$$A_p(z) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \alpha_i z^{-1})$$

så kan $A_p^R(z)$ uttryckas som

$$A_p^R(z) = z^{-p}A_p^*(1/z^*) = z^{-p}\left(\prod_{i=1}^{p}(1 - \alpha_i z^*)\right)^* = \prod_{i=1}^{p}(z^{-1} - \alpha_i^*)$$

Nu kan $E_p^-(z)$ uttryckas som $E_p^+(z)$ filtrerad genom ett allpassfilter:

$$E_p^-(z) = E_p^+(z)\frac{A_p^R(z)}{A_p(z)} = E_p^+(z)\prod_{i=1}^{p}\frac{(z^{-1} - \alpha_i^*)}{(1 - \alpha_i z^{-1})} = E_p^+(z)H_{\text{allpass}}(z)$$

Detta ger att magnituderna på de bägge diskreta fouriertransformerna är lika:

$$\left|E_p^-(e^{j\omega})\right|^2 = \left|E_p^+(e^{j\omega})\right|^2$$

e) Om rötterna till $A_p(z)$ ligger inom enhetscirkeln, kan $E_p^-(z)$ genereras enligt bilden:

$$\xrightarrow{E_p^+(z)} \boxed{H_{\text{allpass}}(z)} \xrightarrow{E_p^-(z)}$$

Detta filter är stabilt eftersom polerna är rötterna i $A_p(z)$, vilka ligger innanfr enhetscirkeln.

f) För att generera $E_p^+(z)$ från $E_p^-(z)$ skulle man kunna tänka sig följande filtrering:

$$\xrightarrow{E_p^-(z)} \boxed{\frac{1}{H_{\text{allpass}}(z)}} \xrightarrow{E_p^+(z)}$$

Om $A_p(z)$ har sina rötter innanför enhetscirkeln, kommer $A_p^R(z)$ att ha sina utanför. Dessa utgör polerna till inversen på allpassfiltret. Därför kommer det inte att bli ett stabilt filter.

Uppgift 6.10

Betrakta följande modifikation av Burgfelet:

$$\mathcal{E}_j^w = \sum_{n=j}^{N} w_j(n) \left\{ \left|e_j^+(n)\right|^2 + \left|e_j^-(n)\right|^2 \right\}$$

där $w_j(n)$ är ett fönster som appliceras på framåt- och bakåtprediktionsfelen.

a) Härled ett uttryck som definierar värdet på den reflektionskoefficient Γ_j^w som minimerar det modifierade Burgfelet $\mathcal{E}_j^w$.

b) Finns det några krav fr att garantera att reflektionskoeffecienterna har en amplitud begränsad till ett? Vilka i så fall?

Lösning 6.10:

c) För att hitta det Γ_j som minimerar felet, sätt derivatan av $\mathcal{E}_j^w$ till noll:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{E}_j^w}{\partial \Gamma_j^*} &= \sum_{n=j}^{N} w_j(n) \left\{ \frac{\partial}{\partial \Gamma_j^*} \left\{ [e_j^+(n)]^* e_j^+(n) + [e_j^-(n)]^* e_j^-(n) \right\} \right\} \\
&= \sum_{n=j}^{N} w_j(n) \left\{ [e_{j-1}^-(n-1)]^* e_j^+(n) + [e_j^-(n)]^* e_{j-1}^+(n) \right\} \\
&= \sum_{n=j}^{N} w_j(n) \Big\{ [e_{j-1}^-(n-1)]^* \left[e_{j-1}^+(n) + \Gamma_j e_{j-1}^-(n-1)\right] + \left[e_{j-1}^-(n-1) + \Gamma_j^* e_{j-1}^+(n)\right]^* e_{j-1}^+(n) \Big\} = 0
\end{aligned}$$

där vi utnyttjat att

$$\begin{aligned}
e_j^+(n) &= e_{j-1}^+(n) + \Gamma_j e_{j-1}^-(n-1) \\
e_j^-(n) &= e_{j-1}^-(n-1) + \Gamma_j^* e_{j-1}(n)
\end{aligned}$$

Lös nu ut Γ_j:

$$\Gamma_j = -\frac{2\sum_{n=j}^{N} w_j(n)[e^-_{j-1}(n-1)]^* e^+_{j-1}(n)}{\sum_{n=j}^{N} w_j(n)\left\{\left|e^-_{j-1}(n-1)\right|^2 + \left|e^+_{j-1}(n)\right|^2\right\}}$$

d) För att $|\Gamma_j| \leq 1$ ska det gälla att

$$\left|2\sum_{n=j}^{N} w_j(n)[e^-_{j-1}(n-1)]^* e^+_{j-1}(n)\right| \leq \left|\sum_{n=j}^{N} w_j(n)\left\{\left|e^-_{j-1}(n-1)\right|^2 + \left|e^+_{j-1}(n)\right|^2\right\}\right|$$

Vi kan utnyttja olikheten att givet två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ så gäller

$$2|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle| \leq \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$$

Om $\mathbf{a} = e^+_{j-1}(n)$ och $\mathbf{b} = e^+_{j-1}(n-1)$, så

$$2\left|e^+_{j-1}(n)[e^+_{j-1}(n-1)]^*\right| \leq \left|e^+_{j-1}(n)\right|^2 + \left|e^+_{j-1}(n-1)\right|^2$$

Om $w_j(n) \geq 0$, så kan vi multiplicera bägge sidor med $w_j(n)$. Summera sedan från $n = j$ till $n = N$.

$$2\sum_{n=j}^{N} w_j(n)\left|e^+_{j-1}(n)[e^+_{j-1}(n-1)]^*\right| \leq \sum_{n=j}^{N} w_j(n)\left\{\left|e^+_{j-1}(n)\right|^2 + \left|e^+_{j-1}(n-1)\right|^2\right\}$$

Utnyttja nu att $|xy| \leq |x|\,|y|$.

$$\begin{aligned} 2\left|\sum_{n=j}^{N} w_j(n)e^+_{j-1}(n)[e^+_{j-1}(n-1)]^*\right| &\leq 2\sum_{n=j}^{N} w_j(n)\left|e^+_{j-1}(n)[e^+_{j-1}(n-1)]^*\right| \\ &\leq \sum_{n=j}^{N} w_j(n)\left\{\left|e^+_{j-1}(n)\right|^2 + \left|e^+_{j-1}(n-1)\right|^2\right\} \end{aligned}$$

vilket ger att $|\Gamma_j| \leq 1$. Det sökta kravet blir därmed att fönstret ska vara icke-negativt,

$$w_j(n) \geq 0$$

Kapitel 7

Uppgift 7.1

En stokastisk process $x(n)$ genereras enligt

$$x(n) = \alpha x(n-1) + v(n) + \beta v(n-1)$$

där $v(n)$ är vitt brus med medelvärde m_v och varians σ_v^2.

a) Designa en första ordningens linjär prediktor

$$\hat{x}(n+1) = w(0)x(n) + w(1)x(n-1)$$

som minimerar medelkvadratfelet av prediktionen av $x(n+1)$, och finn det minimala medelkvadratfelet.

b) Betrakta nu en prediktor på formen

$$\hat{x}(n+1) = c + w(0)x(n) + w(1)x(n-1)$$

Finn värdena på c, $w(0)$ och $w(1)$ som minimerar medelkvadratfelet, och jämför medelkvadratfelet för denna prediktor med prediktorn från a)-uppgiften.

Lösning 7.1:

a) Ortogonalitetsprincipen ger att

$$e(n+1) \perp x(n) \quad \text{och} \quad e(n+1) \perp x(n-1)$$

$$\begin{aligned} E[e(n+1)x(n)] =& E[(x(n+1) - w(0)x(n) - w(1)x(n-1))x(n)] = \\ & r_x(1) - w(0)r_x(0) - w(1)r_x(1) = 0 \\ E[e(n+1)x(n-1)] =& E[(x(n+1) - w(0)x(n) - w(1)x(n-1))x(n-1)] = \\ & r_x(2) - w(0)r_x(1) - w(1)r_x(0) = 0 \end{aligned}$$

som i matrisform skrivs (Wiener-Hopf-ekvationerna)

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \end{bmatrix}$$

Det kvadratiska medelfelet är

$$\xi_{\min} = E[e(n+1)x(n+1)] = r_x(0) - w(0)r_x(1) - w(1)r_x(2)$$

Det återstår nu att räkna ut $r_x(k)$. $x(n)$ skapas genom att $v(n)$ filtreras av en systemfunktion

$$H(z) = \frac{1 + \beta z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

Spektraltätheten på $x(n)$ blir därmed

$$P_x(z) = \sigma_v^2 \frac{\left(1 + \beta z^{-1}\right)(1 + \beta z)}{\left(1 - \alpha z^{-1}\right)(1 - \alpha z)}$$

vilket är $\mathcal{Z}$-transformen av *autokovariansen* $c_x(k)$. Enligt tabell 2.4 i Hayes gäller

$$\alpha^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

och autokovariansen kommer då att bli

$$c_x(k) = \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}\left(\left(1+\beta^2\right)\alpha^{|k|} + \beta\alpha^{|k-1|} + \beta\alpha^{|k+1|}\right)$$

Eftersom medelvärdet på $v(n) \neq 0$, så blir medelvärdet på $x(n) \neq 0$ och

$$r_x(k) = c_x(k) + m_x^2$$

där

$$m_x = m_v\, H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0} = m_v \frac{1+\beta e^0}{1-\alpha e^0} = m_v \frac{1+\beta}{1-\alpha}$$

Autokorrelationen blir därmed

$$r_x(k) = \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}[(1+\beta^2)\alpha^{|k|} + \beta\alpha^{|k-1|} + \beta\alpha^{|k+1|}] + m_v^2\frac{(1+\beta)^2}{(1-\alpha)^2}$$

b) Ortogonalitetsprincipen

$$\begin{aligned} E[e(n+1)1] &= E[(x(n+1) - c - w(0)x(n) - w(1)x(n-1))1] \Rightarrow \\ c &= m_x[1 - w(0) - w(1)] \end{aligned}$$

Med detta val av c kan ξ skrivas som

$$\begin{aligned} \xi &= E\left\{|e^2(n+1)|\right\} = E[x^2(n+1)] \\ &= E\left[(x(n+1) - c - w(0)x(n) - w(1)x(n-1))^2\right] \\ &= E\left[(x(n+1) - m_x[1-w(0)-w(1)] - w(0)x(n) - w(1)x(n-1))^2\right] \\ &= E\left[((x(n+1)-m_x) - w(0)(x(n)-m_x) - w(1)(x(n-1)-m_x))^2\right] \\ &= E\left[(y(n+1) - w(0)y(n) - w(1)y(n-1))^2\right] \end{aligned}$$

där $y(n) = x(n) - m_x$ är den process med samma autokovarians som $x(n)$ men med medelvärde noll. Vi har därmed överfört problemet till ett "standardproblem". För $y(n)$ gäller

$$r_y(k) = r_x(k) - m_x^2$$

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_y(0) & r_y(1) \\ r_y(1) & r_y(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_y(1) \\ r_y(2) \end{bmatrix}$$

$$r_y(k) = \frac{\sigma_v^2}{1-\alpha^2}[(1+\beta^2)\alpha^{|k|} + \beta\alpha^{|k-1|} + \beta\alpha^{|k+1|}]$$

Det minsta kvadratiska medelfelet ges på samma sätt som innan som

$$\xi_{\min} = r_y(0) - w(0)r_y(1) - w(1)r_y(2)$$

Detta kommer att bli mindre än i a)-uppgiften. För exempelvis $\alpha = 0.3$ och $\beta = 0.4$ blir $\xi_{\min}$ 1.3 i a)-uppgiften jämfört med 1.0 för b)-uppgiften.

Uppgift 7.2

Betrakta en trestegsprediktor implementerad som ett första ordningens filter,

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1}$$

dvs. om $x(n)$ är insignal till prediktorn $W(z)$ så är utsignalen minstakvadratstimatet till $x(n+3)$,

$$\hat{x}(n+3) = w(0)x(n) + w(1)x(n-1)$$

a) Hur ser Wiener-Hopf-ekvationerna ut för Wiener-trestegsprediktorn?

b) Lös Wiener-Hopf-ekvationerna och hitta den optimala trestegsprediktorn om $r_x(k)$ för $k = 0$ till $k = 4$ är

$$\mathbf{r}_x = [1.0,\ 0,\ 0.1,\ -0.2,\ -0.9]^T$$

c) Är prediktionsfelsfiltret

$$F(z) = 1 - w(0)z^{-3} - w(1)z^{-4}$$

minimumfas, dvs. är nollställena till $F(z)$ innanför enhetscirkeln? Jämför detta med prediktionsfelsfilter för en enstegsprediktor.

Lösning 7.2:

d)

$$d(n) = x(n+3)$$
$$r_d(k) = r_x(k+3)$$

$$r_{dx}(k) = E(d(n)x^*(n-k)) = E(x(n+3)x^*(n-k)) = r_x(k+3)$$

Detta ger Wiener-Hopf-ekvationerna

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(3) \\ r_x(4) \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{r}_x = [1, 0, 0.1, -0.2, -0.9]$$

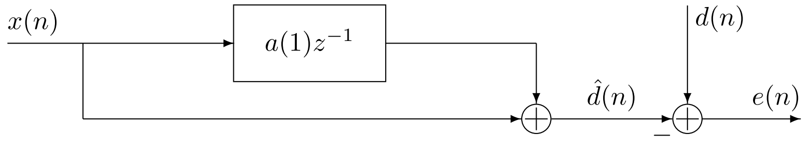
ger den optimala trestegsprediktorn

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 \\ -0.9 \end{bmatrix}$$

f) Prediktionsfelsfiltret (three-step) ges av $F_4(z) = 1+0.2z^{-3}+0.9z^{-4}$. Step-down rekursion ger sedan $\Gamma = [-1.07,\ -9.23,\ 1.05,\ 0.90]$ vilket visar att filtret inte är minimum-fas vilket ett en-stegs PEF är.

Uppgift 7.4

Betrakta systemet i figuren nedan för estimering av en process $d(n)$ från $x(n)$.



Det gäller att $\sigma_d^2 = 4$ och

$$\mathbf{r}_x = [1.0,\ 0.5,\ 0.25]^T \quad ; \quad \mathbf{r}_{dx} = [-1.0,\ 1.0]^T$$

Vilket värde på $a(1)$ minimerar minstakvadratfelet $\xi = E\left\{|e(n)|^2\right\}$, och vad blir minstakvadratfelet?

Lösning 7.4:

Ortogonalitetsprincipen ger att $e(n) \perp x(n-1)$:

$$E[e(n)x(n-1)] = E[(d(n) - x(n) - a(1)x(n-1))x(n-1)] = r_{dx}(1) - r_x(1) - a(1)r_x(0) = 0$$

$$a(1) = \frac{r_{dx}(1) - r_x(1)}{r_x(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\min} &= E(e(n)e(n)) \\
&= E(e(n)[d(n) - x(n) - a(1)x(n-1)]) \\
&= E(e(n)(d(n) - x(n))) \\
&= r_d(0) - r_{dx}(0) - a(1)r_{dx}(1) - r_{dx}(0) + r_x(0) + a(1)r_x(1) \\
&= 6.75
\end{aligned}$$

Uppgift 7.5

I detta problem studeras linjär prediktion i en brusig omgivning. Antag att en signal $d(n)$ är störd av brus,

$$x(n) = d(n) + w(n)$$

där $r_w(k) = 0.5\delta(k)$ och $r_{dw}(k) = 0$. Signalen $d(n)$ är en AR(1)-process som uppfyller ekvationen

$$d(n) = 0.5d(n-1) + v(n)$$

där $v(n)$ är vitt brus med varians $\sigma_v^2 = 1$. Antag att $w(n)$ och $v(n)$ är okorrelerade.

a) Designa en första ordningens linjär FIR-prediktor $W(z) = w(0) + w(1)z^{-1}$ för $d(n)$ och finn medelkvadratprediktionsfelet $\xi = E\{[d(n+1) - \hat{d}(n+1)]^2\}$.

b) Designa en kausal Wiener-prediktor och jämför medelkvadratfelet med det från a-uppgiften.

Lösning 7.5:

$$x(n) = d(n) + w(n)$$

där $r_w(k) = 0.5\delta(n)$, $r_{dw}(k) = 0$. $d(n)$ är en AR(1)-process

$$d(n) = 0.5d(n-1) + v(n)$$

med $\sigma_v^2 = 1$.

a) Designa en FIR prediktor.

$$\mathbf{R}_x \mathbf{w} = \mathbf{r}_{dx}$$

$$r_x(k) = r_d(k) + r_w(k)$$

$$r_{dx}(k) = E[d(n+1)x(n-k)] = r_d(k+1)$$

$$P_d(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)}$$

$r_d(k)$ är sedan enligt Tabell 2.4 lika med $\frac{4}{3}(\frac{1}{2})^{|k|}$. Således,

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d(1) \\ r_d(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11/6 & 2/3 \\ 2/3 & 11/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{2}{35} \end{bmatrix}$$

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{k=0}^{1} w(k) r_{dx}(k) = \frac{4}{3} - \frac{12}{35}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{35}\cdot\frac{1}{3} = \frac{38}{35} = 1.0857$$

b)

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_{dx}(z)}{Q(z^{-1})}\right]_+$$

$$P_x(z) = P_d(z) + P_w(z) = \frac{2 + 1.25 - 0.5(z+z^{-1})}{2(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} = \sigma_x^2 \frac{(1+cz^{-1})(1+cz)}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z)} = \sigma_x^2 Q(z) Q(z^{-1})$$

Identifiering ger $c = -0.1577$ och $\sigma_x^2 = 1.5853$.

$$Q(z) = \frac{(1-0.1577z^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$P_{dx}(z) = z P_d(z)$$

$$\begin{aligned} H(z) =& \frac{1-0.5z^{-1}}{1.58(1-0.1577z^{-1})} \left[\frac{z}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1577z)}\right]_+ = \\ & \frac{1-0.5z^{-1}}{1.58(1-0.1577z^{-1})} \left[\frac{A}{1-0.5z^{-1}} + \frac{Bz}{1-0.1577z}\right]_+ = \\ & \frac{1-0.5z^{-1}}{1.58(1-0.1577z^{-1})} \left[\frac{A}{1-0.5z^{-1}}\right] \end{aligned}$$

Identifiering ger $A = 0.5428$ och $B = 2A$. Således

$$H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1.58(1-0.1577z^{-1})} \left[\frac{0.5428}{1-0.5z^{-1}}\right] = \frac{0.3423}{1-0.1577z^{-1}}$$

$$h(n) = 0.3423(0.1577)^n u(n)$$

$$
\begin{aligned}
\xi_{\min} &= r_d(0) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k) r_{dx}(k) \\
&= r_d(0) - 0.3423 \sum_{k=0}^{\infty} 0.1577^k \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k+1|} \\
&= \frac{4}{3} - 0.3423 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 0.07884^k \\
&= \frac{4}{3} - 0.2282 \frac{1}{1 - 0.07884} = 1.0856
\end{aligned}
$$

Som synes är det minimala kvadratfelet ungefär lika som för FIR-prediktorn. Detta på grund av att $h(n)$ för filtret i b-uppgiften är ungefär noll för $n > 1$. Jämför IIR ($h(0) = 0.3423$, $h(1) = 0.0540$, $h(2) = 0.0085$, $h(3) = 0.0013$ etc) med FIR ($h(0) = 0.3429$ och $h(1) = 0.0571$)

Uppgift 7.7

I denna uppgift studeras designen av ett kausalt IIR Wiener-filter för p-stegsprediktion,

$$
\hat{x}(n+p) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) x(n-k)
$$

a) Finn systemfunktionen för det kausala Wienerfiltret som minimerar medelkvadratfelet

$$
\xi = E\left\{ |\hat{x}(n+p) - x(n+p)|^2 \right\}
$$

om $x(n)$ är en reellvärd stokastisk process med spektraltäthet

$$
P_x(z) = \sigma_x^2 Q(z) Q(z^{-1}).
$$

b) Finn den kausala linjära p-stegsprediktorn och medelkvadratfelet om $x(n)$ är en AR(1)-process med effektspektrum

$$
P_x(z) = \frac{1 - a^2}{(1 - az^{-1})(1 - az)}
$$

c) Finn systemfunktionen för tvåstegsprediktorn, $p = 2$, och medelkvadratfelet om $x(n)$ är en MA(2)-process som genereras av differensekvationen

$$
x(n) = 4v(n) - 2v(n-1) + v(n-2)
$$

där $v(n)$ är vitt brus med medelvärde noll och varians ett.

d) Samma som uppgift c) men för en trestegsprediktor.

Lösning 7.7:

a)

$$
P_x(z) = \sigma_0^2 Q(z) Q(z^{-1})
$$

$$
H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_{dx}(z)}{Q^*(\frac{1}{z^*})} \right]_+
$$

$$d(n) = x(n+p)$$

$$r_{dx}(k) = r_x(k+p) \iff P_{dx}(z) = z^p P_x(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{z^p \sigma_0^2 Q(z) Q(z^{-1})}{Q(z^{-1})} \right]_+ = \frac{[z^p Q(z)]_+}{Q(z)}$$

b)

$$P_x(z) = \frac{1-a^2}{(1-az^{-1})(1-az)}$$

$$Q(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})}$$

$$\begin{aligned}
H(z) &= (1-az^{-1}) \left[\frac{z^p}{1-az^{-1}} \right]_+ \\
&= (1-az^{-1}) \left[z^p(1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \cdots) \right]_+ \\
&= (1-az^{-1}) \left[z^p + az^{p-1} + \cdots + a^p + a^{p+1} z^{-1} + \cdots) \right]_+ \\
&= (1-az^{-1}) \left(a^p + a^{p+1} z^{-1} + \cdots \right) \\
&= (1-az^{-1}) \frac{a^p}{1-az^{-1}} \\
&= a^p
\end{aligned}$$

$$\hat{x}(n+p) = a^p x(n)$$

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{l=0}^{\infty} h(l) r_{dx}(l)$$

$$r_d(k) = r_x(k) = a^{|k|}$$

$$r_{dx}(k) = a^{|k+p|}$$

$$h(n) = a^p \delta(n)$$

$$\xi_{\min} = a^0 - a^p r_x(p) = 1 - a^{2p}$$

c)

$$P_x(z) = (4 - 2z^{-1} + z^{-2})(4 - 2z + z^2) = 16(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2)$$

$$H(z) = \frac{\left[z^2 Q(z)\right]_+}{Q(z)} = \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2})}$$

$$P_{dx}^*(e^{j\omega}) = (e^{jp\omega})^* P_x^*(e^{j\omega}) = e^{-jp\omega}(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-2j\omega})(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{4}e^{2j\omega})$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\min} &= r_d(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) P_{dx}^*(e^{j\omega}) d\omega \qquad \text{(ekv. 7.38)} \\
&= r_d(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\frac{1}{4}}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{1}{4}e^{-2j\omega})} (e^{j2\omega})^* P_x^*(e^{j\omega}) d\omega \\
&= r_d(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4e^{-j2\omega}(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega} + \frac{1}{4}e^{j2\omega}) d\omega \\
&= r_d(0) - \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}\, d\omega = 21 - \frac{2}{\pi}\frac{2\pi}{4} = 20
\end{aligned}$$

d)

$$\left[z^3 Q(z)\right]_+ = 0$$

$$\hat{x}(n+3) = 0$$

Uppgift 7.9

Vi vill skatta en observation $d(n)$ från brusiga observationer,

$$x(n) = d(n) + v(n)$$

där $v(n)$ är vitt brus med varians $\sigma_v^2 = 1$ och $d(n)$ är en svagt stationär process vars fyra första värden på autokorrelationen ges av

$$\mathbf{r}_d = [1.5,\ 0,\ 1.0,\ 0]^T.$$

Antag att $d(n)$ och $v(n)$ är okorrelerade. Vårt mål är att designa ett FIR-filter för att reducera bruset i $d(n)$. Hårdvarukrav begränsar antalet koefficienter skilda från noll i filtret $W(z)$ till max tre stycken.

a) Vad blir det optimala kausala filtret på formen

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1} + w(2)z^{-2}$$

för skattning av $d(n)$, och vad blir medelkvadratfelet $E\left\{|d(n) - \hat{d}(n)|^2\right\}$?

Lösning 7.9:

$$"d(n) = d(n)"$$

$$\mathbf{R}_x \mathbf{w} = \mathbf{r}_{dx}$$

$$r_x(k) = r_d(k) + r_v(k)$$

$$r_{dx} = r_d(k)$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & r_x(2) \\ r_x(1) & r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(2) & r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_d(0) \\ r_d(1) \\ r_d(2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 1 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 1 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5238 \\ 0 \\ 0.1905 \end{bmatrix}$$

$$\xi_{\min} = 0.5238$$

Uppgift 7.10

Antag att en signal $x(n)$ är inspelad och att det är s.k. *outliers* bland datavärdena, dvs. att det för en del n är ett stort fel i det uppmätta värdet på $x(n)$. Istället för att ta bort dessa datavärden, ska vi nu göra en minstakvadratinterpolation enligt följande: Givet ett "dåligt" datavärde vid tiden $n = n_0$, betrakta en estimator för $x(n_0)$ på formen

$$\hat{x}(n_0) = ax(n_0 - 1) + bx(n_0 + 1)$$

a) Antag att $x(n)$ är en svagt stationär process med autokorrelation $r_x(k)$. Finn värdena a och b som minimerar medelkvadratfelet

$$\xi = E\left\{|x(n_0) - \hat{x}(n_0)|^2\right\}$$

b) Vad blir medelkvadratfelet för interpolatorn i a) om $r_x(k) = 0.5^{|k|}$?

c) Kan det vara bättre att använda en estimator på formen

$$\hat{x}(n_0) = ax(n_0 - 1) + bx(n_0 - 2)$$

och i så fall när?

d) Hur blir Wiener-Hopf-ekvationerna som definierar det optimala interpolationsfiltret för $x(n)$ som givet de $2p$ datavärdena

$$x(n_0 - 1),\ x(n_0 - 2),\ \ldots,\ x(n_0 - p) \quad \text{och} \quad x(n_0 + 1),\ x(n_0 + 2),\ \ldots,\ x(n_0 + p)$$

producerar den bästa skattningen av $x(n_0)$?

e) Finn ett uttryck för medelkvadratfelet för estimatorn i uppgift d).

Lösning 7.10:

a) Ortogonalitetsprincipen

$$\begin{cases} E[(x(n_0) - \hat{x}(n_0))x(n_0 - 1)] = 0 \\ E[(x(n_0) - \hat{x}(n_0))x(n_0 + 1)] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_x(1) - ar_x(0) - br_x(2) = 0 \\ r_x(1) - ar_x(2) - br_x(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(2) \\ r_x(2) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(2) \\ r_x(2) & r_x(0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(1) \end{bmatrix} = \frac{r_x(1)}{r_x(0) + r_x(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\xi_{\min} = E[e(n_0)x(n_0)] = r_x(0) - ar_x(1) - br_x(1) = 0.6$$

c) Vilket estimat som ska väljas beror på hur autokorrelationssekvensen för $x(n)$ ser ut. Om $|r_x(2)| > |r_x(1)|$ så kommer estimatorn

$$\hat{x}(n_0) = ax(n_0 - 1) + bx(n_0 - 2)$$

ge ett mindre medelkvadratfel.

d)

$$\hat{x}(n_0) = \sum_{\substack{l=-p \\ l \neq 0}}^{p} a(l)x(n_0 - l)$$

Ortogonalitetsprincipen ger för $k = \pm 1, ..., \pm p$

$$E[(x(n_0) - \hat{x}(n_0))x(n_0 - k)] = 0$$

vilket resulterar i

$$r_x(k) - \sum_{\substack{l=-p \\ l \neq 0}}^{p} a(l)r_x(k - l) = 0$$

för $k = \pm 1, ..., \pm p$.

e)

$$\begin{aligned} \xi_{\min} &= E[e(n)x(n_0)] \\ &= E\Big\{ \big[x(n_0) - \sum_{\substack{l=-p \\ l \neq 0}}^{p} a(l)x(n_0 - l)\big] x(n_0) \Big\} \\ &= r_x(0) - \sum_{\substack{l=-p \\ l \neq 0}}^{p} a(l)r_x(l) \end{aligned}$$

Uppgift 7.12

En signal $x(n)$ observeras i en brusig och ekofylld miljö,

$$y(n) = x(n) + 0.8x(n - 1) + v(n)$$

där $v(n)$ är vitt brus med varians $\sigma_v^2 = 1$, okorrelerat med $x(n)$. Vi vet att $x(n)$ är en svagt stationär AR(1)-process med autokorrelationen

$$\mathbf{r}_x = [4,\ 2,\ 1,\ 0.5,\ \ldots]^T$$

a) Finn det ickekausala IIR-Wienerfiltret, $H(z)$, som producerar minstakvadratestimatet av $x(n)$.

b) Designa ett kausalt IIR-Wienerfilter, $H(z)$, som producerar minstakvadratestimatet av $x(n)$.

Lösning 7.12:

$x(n)$ skapas av

$$H(z) = \frac{b(0)}{1 - a(1)z^{-1}}$$

$$P_x(z) = 1 \cdot \frac{b^2(0)}{(1-a(1)z^{-1})(1-a(1)z)}$$

$r_x(k)$ är känd. Ekv. (4.150) i Hayes kopplar $a(1)$ och $b(0)$ till autokorrelationen.

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) \\ r_x(1) & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |b(0)|^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Detta ger

$$P_x(z) = \frac{3}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$

a)

$$H(z) = \frac{P_{xy}(z)}{P_y(z)}$$

$$y(n) = x(n) + 0.8x(n-1) + v(n) = x(n) * b(n) + v(n)$$

med $B(z) = 1 + 0.8z^{-1}$.

$$P_y(z) = (1+0.8z^{-1})(1+0.8z)P_x(z) + P_v(z)$$

$$r_{xy}(k) = E\{x(n+k)[x(n) + 0.8x(n-1) + v(n)]\} = r_x(k) + 0.8r_x(k+1)$$

$$P_{xy}(z) = (1+0.8z)Px(z)$$

$$H(z) = \frac{P_{xy}(z)}{P_y(z)} = \frac{3(1+0.8z)}{6.17 + 1.9(z+z^{-1})}$$

b)

$$P_y(z) = \sigma_y^2 Q(z)Q(z^{-1}) = \frac{6.17 + 1.9(z+z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)} = \sigma_y^2 \frac{1+cz^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \frac{1+cz}{1-0.5z}$$

Identifiering ger $c = 0.3445$ och $\sigma_y^2 = 5.5153$.

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_y^2 Q(z)} \left[\frac{P_{xy}(z)}{Q^*(z^{-1})}\right]_+ = \frac{1-0.5z^{-1}}{5.5153(1+0.3445z^{-1})} \left[\frac{3(1+0.8z)}{(1-0.5z^{-1})(1+0.3445z)}\right]_+ =$$

$$\frac{1-0.5z^{-1}}{5.5153(1+0.3445z^{-1})} \left[\frac{A}{1-0.5z^{-1}} + \frac{Bz}{1+0.3445z}\right]_+ =$$

$$\frac{1-0.5z^{-1}}{5.5153(1+0.3445z^{-1})} \frac{A}{(1-0.5z^{-1})}$$

Identifiering ger $A = 3.5829$.

$$H(z) = \frac{0.6496}{1+0.3445z^{-1}}$$

Uppgift 7.14

Enligt figur 7.12 i Hayes kan Wienerfiltret betraktas som en kaskad av ett vitningsfilter med ett kausalt filter som producerar minstakvadratestimatet av $d(n)$ från $\epsilon(n)$. För en reell process blir kaskadkopplingens systemfunktion

$$H(z) = F(z)G(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)} \left[\frac{P_{dx}(z)}{Q(z^{-1})}\right]_+$$

och medelkvadratfelet är

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{l=0}^{\infty} h(l) r_{dx}(l)$$

a) Finn impulssvaret $h(n)$ för det kausala Wienerfiltret om $r_{d\epsilon} = \delta(k)$ och

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{4}{(1-0.5z^{-1})(1-0.5z)}$$

b) Ge ett uttryck för medelkvadratfelet som uttrycker $\xi_{\min}$ i korskorrelationen $r_{d\epsilon}(k)$, och räkna ut medelkvadratfelet när

$$r_{d\epsilon} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k u(k) + \left(\tfrac{1}{3}\right)^{-k} u(-k-1)$$

och

$$E\left\{d^2(n)\right\} = 4$$

Lösning 7.14:

c)

$$P_x(e^{j\omega}) = 4\frac{1}{(1-0.5z^{-1})}\frac{1}{(1-0.5z)} = \sigma_0^2 Q(z)Q^*(1/z^*)$$

Vitningsfiltret $F(z)$ blir

$$F(z) = \frac{1}{\sigma_0 Q(z)} = \frac{1}{2}(1-0.5z^{-1})$$

Andra steget i kaskadkopplingen, $G(z)$, ges som kausal filtrering av den vita signalen $\epsilon(n)$: Denna är vitt brus med varians 1. Därmed är $P_\epsilon = 1$ och $\sigma_\epsilon^2 = Q_\epsilon(z) = Q_\epsilon(z^{-1}) = 1$. $P_{d\epsilon} = \mathcal{Z}(\delta(k)) = 1$.

$$G(z) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2 Q_\epsilon(z)}\left[\frac{P_{d\epsilon}(z)}{Q_\epsilon(z^{-1})}\right]_+ = 1$$

Wienerfiltret $H(z) = F(z)G(z) = F(z)$ får impulssvaret

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1)$$

d) Det minimala medelkvadratfelet ges av ekv. 7.65 som

$$\begin{aligned}
\xi_{\min} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[P_d(e^{j\omega} - H(e^{j\omega})P_{dx}^*(e^{j\omega})\right]d\omega \\
&= r_d(0) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[H(e^{j\omega})P_{dx}^*(e^{j\omega})\right]d\omega
\end{aligned}$$

Vi vet att

$$H(z) = \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)}\left[\frac{P_{dx}(z)}{Q(z^{-1})}\right]_+$$

och

$$P_{d\epsilon}(z) = \frac{P_{dx}(z)}{\sigma_0 Q^*(1/z^*)} \Longrightarrow P_{dx}(z) = \sigma_0 Q^*(1/z^*)P_{d\epsilon}(z)$$

$$\begin{aligned}
H(z)P_{dx}^*(1/z^*) &= \frac{1}{\sigma_0^2 Q(z)}\left[\frac{\sigma_0 Q^*(1/z^*)P_{d\epsilon}(z)}{Q^*(1/z^*)}\right]_+ \sigma_0 Q(z)P_{d\epsilon}^*(1/z^*) \\
&= \left[P_{d\epsilon}(z)\right]_+ P_{d\epsilon}^*(1/z^*)
\end{aligned}$$

Med hjälp av Parsevals teorem, ekv. 2.11,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega} \right|^2 d\omega$$

kan $\xi_{\min}$ uttryckas som

$$\begin{aligned}\xi_{\min} &= r_d(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[P_{d\epsilon}(e^{j\omega}) \right]_+ P^*_{d\epsilon}(e^{j\omega}) d\omega \\ &= r_d(0) - \sum_{k=0}^{\infty} |r_{d\epsilon}(k)|^2\end{aligned}$$

För den givna korskorrelationen $r_{d\epsilon}(k)$, blir det minimala felet

$$\xi_{\min} = 4 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \right)^2 = 4 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^k = 4 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{3}$$

Kapitel 8

Uppgift 8.3

Bartletts metod används för att estimera effektspektrumet för en process från en sekvens på $N = 2000$ sampel.

a) Vilken är den minimala längden L som kan användas för varje delsekvens om vi vill ha en upplösning på $\Delta f = 0.005$?

b) Förklara varför det inte är fördelaktigt att öka L utöver värdet från a)?

c) *Kvalitetsfaktorn* för ett spektrum definieras som inversen på variabiliteten,

$$Q = 1/\mathcal{V}.$$

Om vi använder Bartletts metod, vad är det minimala antalet sampel, N, som behövs för att uppnå en upplösning på $\Delta f = 0.005$, och en kvalitetsfaktor som är fem gånger så stor som för periodogrammet?

Lösning 8.3:

a) Enligt tabell 8.4:

$$\Delta f = 0.89\frac{K}{N} = \frac{0.89}{L} \leq 0.005$$

vilket ger $L \geq 178$.

b) En ökning i L förbättrar upplösningen, men minskar antalet segment i medelvärdesbildningen vilket ökar variansen i spektrat.

c) Enligt tabell 8.7 gäller

$$\begin{aligned} \text{Periodogram:} \quad & \mathcal{V}_{\text{per}} = 1 \\ \text{Bartlett:} \quad & \mathcal{V}_B = \tfrac{1}{K} \end{aligned}$$

Det minimala värdet på K ges av

$$K = \frac{1}{\mathcal{V}_B} = Q_B \geq 5Q_{\text{per}} = \frac{5}{\mathcal{V}_{\text{per}}} = 5$$

Således, 5 segment om 178 sampel behövs,

$$N = KL \geq 5 \cdot 178 = 890$$

Uppgift 8.5

Många fourieranalysatorer uppdaterar kontinuerligt sin skattning av effektspektrum till en process $x(n)$ genom att exponentiellt medelvärdesbilda periodogram enligt

$$\hat{P}_i(e^{j\omega}) = \alpha\hat{P}_{i-1}(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1} x_i(n)e^{-jn\omega}\right|^2$$

där $x_i(n) = x(n+iN)$ är sekvens i med N datavärden. Uppdateringsekvationen initieras med $\hat{P}_{-1} = 0$.

a) Beskriv den kvalitativa tanken bakom denna metod, och beskriv hur viktningsfaktorn α skall väljas.

b) Finn medelvärde och varians av $\hat{P}_i(e^j\omega)$ för en Gaussisk stokastisk process, om man kan anta att de olika periodogrammen är okorrelerade och att $0 < \alpha < 1$.

c) Repetera analysen i b) om periodogrammen ersätts med modifierade periodogram.

Lösning 8.5:

a) Blockvis uppdatering av spektrat. När N sampel är insamlade beräknas ett nytt periodogram och viktas in. Med α nära 1 fås en medelvärdesbildning alla delsekvenser. Om α är nära 0 så kommer bara de senaste N samplen ha betydelse.

b) Definiera

$$Q_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\Big|\sum_{n=0}^{N-1} x_i(n)e^{-jn\omega}\Big|^2$$

Då blir differensekvationen för $\hat{P}_i(e^{j\omega})$

$$\hat{P}_i(e^{j\omega}) = \alpha\hat{P}_{i-1}(e^{j\omega}) + (1-\alpha)Q_i(e^{j\omega})$$

$$\hat{P}_0(e^{j\omega}) = (1-\alpha)Q_0(e^{j\omega})$$

$$\hat{P}_1(e^{j\omega}) = \alpha(1-\alpha)Q_0(e^{j\omega}) + (1-\alpha)Q_1(e^{j\omega})$$

Generellt gäller

$$\hat{P}_i(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{i} \alpha^{i-k}(1-\alpha)Q_k(e^{j\omega})$$

Enligt tabell 8.1 i Hayes gäller

$$E\left\{Q_k(e^{j\omega})\right\} = \frac{1}{2\pi}P_x(e^{j\omega}) * W_b(e^{j\omega})$$

Medelvärdet blir

$$\begin{aligned}
E[\hat{P}_i(e^{j\omega})] &= \sum_{k=0}^{i} \alpha^{i-k}(1-\alpha)E[Q_k(e^{j\omega})] \\
&= (1-\alpha)\frac{1}{2\pi}P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})\sum_{k=0}^{i}\alpha^k \\
&= (1-\alpha)\frac{1}{2\pi}P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})\frac{1-\alpha^{i+1}}{1-\alpha} \\
&= \frac{(1-\alpha^{i+1})}{2\pi}P_x(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega})
\end{aligned}$$

Enligt tabell 8.1 gäller också

$$\text{var}\left\{\hat{P}_{\text{per}}(e^{j\omega})\right\} \approx P_x^2(e^{j\omega})$$

På samma sätt som för medelvärdet blir variansen

$$\text{var}[\hat{P}_i(e^{j\omega})] = (1-\alpha^{i+1})P_x^2(e^{j\omega})$$

c) Enligt tabell 8.3 gäller för det modifierade periodogrammet

$$E[Q_i(e^{j\omega})] = E[\hat{P}_m(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi NU} P_x(e^{j\omega}) * |W(e^{j\omega})|^2$$

där

$$U = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2$$

$$E[P_i(e^{j\omega})] = (1-\alpha^{i+1})\frac{1}{2\pi NU} P_x(e^{j\omega}) * |W(e^{j\omega})|^2$$

Variansen för det modifierade periodogrammet är samma som för det vanliga periodogrammet, därför blir var$[\hat{P}_i(e^{j\omega})]$ samma som i b)-uppgiften.

Uppgift 8.7

Låt $x(n)$ vara en stokastisk process bestående av en komplex exponentialfunktion i vitt brus,

$$r_x(k) = Pe^{jk\omega_0} + \sigma_w^2\delta(k)$$

och låt $\mathbf{g}_i$ vara minimumvarians-bandpassfiltret

$$\mathbf{g}_i = \frac{\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{e}_i}{\mathbf{e}_i^H\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{e}_i}$$

som har en centerfrekvens ω_i med $G(e^{j\omega_i}) = 1$. Visa att $G_i(z)$ har ett nollställe som närmar sig $z = e^{j\omega_0}$ när $\sigma_w^2 \longrightarrow 0$. Antag att $\omega_i \neq \omega_0$.

Lösning 8.7:

$$r_x(k) = Pe^{jk\omega_0} + \sigma_w^2\delta(k)$$

Med

$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega_i} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega_i} \end{bmatrix}$$

och

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega} \\ \vdots \\ e^{j(N-1)\omega} \end{bmatrix}$$

gäller för $N \times N$-autokorrelationsmatrisen att

$$\mathbf{R}_x = P\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^H + \sigma_w^2\mathbf{I} = \sigma_w^2\left[\mathbf{I} + \frac{P}{\sigma_w^2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^H\right]$$

Enligt Woodburys identitet, ekvation 2.30 i Hayes, i kombination med att $\mathbf{e}^H\mathbf{e} = N$ så kan inversen skrivas

$$\mathbf{R}_x^{-1} = \frac{1}{\sigma_w^2}\left[\mathbf{I} - \frac{\frac{P}{\sigma_w^2}\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^H}{1 + \frac{NP}{\sigma_w^2}}\right] = \frac{1}{\sigma_w^2}\left[\mathbf{I} - \frac{P\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^H}{\sigma_w^2 + NP}\right]$$

Minimumvariansfiltret blir

$$\mathbf{g}_i = \frac{\frac{1}{\sigma_w^2}[\mathbf{e}_i - \frac{P\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^H\mathbf{e}_i}{\sigma_w^2+NP}]}{\mathbf{e}_i^H\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{e}_i}$$

$$G_i(e^{j\omega}) = \mathbf{e}^H\mathbf{g}_i = \frac{1}{\sigma_w^2\mathbf{e}_i^H\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{e}_i}[\mathbf{e}^H\mathbf{e}_i - \frac{P\mathbf{e}^H\mathbf{e}_0\mathbf{e}_0^H\mathbf{e}_i}{\sigma_w^2 + NP}]$$

För $\omega = \omega_0$ sätter vi $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0$:

$$G_i(e^{j\omega_0}) = \frac{1}{\sigma_w^2\mathbf{e}_i^H\mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{e}_i}\underbrace{\left[1 - \frac{N}{\frac{\sigma_w^2}{P} + N}\right]}_{\to 0}\mathbf{e}_0^H\mathbf{e}_i$$

vilket går mot noll då $\frac{\sigma_w^2}{P}$ går mot noll.

Uppgift 8.13

Från mätningar av en process $x(n)$ skattar vi följande värden från autokorrelationssekvensen:

$$r_x(k) = \alpha^{|k|} \quad ; \quad |k| \le M$$

där $|\alpha| < 1$. Skatta effektspektrum med hjälp av

a) Blackman-Tukeys metod med ett rektangulärt fönster.

b) Minimumvariansmetoden.

Lösning 8.13:

a) Tabell 8.6 i Hayes ger

$$\begin{aligned}
P_{BT}(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-M}^{M} \hat{r}_x(k)w(k)e^{-jk\omega} \\
&= \sum_{k=-M}^{M} \alpha^{|k|}e^{-jk\omega} \\
&= \sum_{k=0}^{M}(\alpha e^{-j\omega})^k + \sum_{k=0}^{M}(\alpha e^{j\omega})^k - 1 \\
&= \frac{1-\alpha^{M+1}e^{-j\omega(M+1)}}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{1-\alpha^{M+1}e^{j\omega(M+1)}}{1-\alpha e^{j\omega}} - 1 \\
&= \frac{1-\alpha^{M+1}e^{-j\omega(M+1)} + \alpha^{M+2}e^{-j\omega M} - \alpha^{M+1}e^{j\omega(M+1)} + \alpha^{M+2}e^{j\omega M} - \alpha^2}{1-\alpha e^{-j\omega} - \alpha e^{j\omega} + \alpha^2} \\
&= \frac{2\alpha^{M+1}(\alpha\cos M\omega - \cos(M+1)\omega) + 1 - \alpha^2}{1+\alpha^2 - 2\alpha\cos\omega}
\end{aligned}$$

b) Enligt ekvation 8.93 och ekvationen högst upp på sidan 431:

$$P_{MV}(e^{j\omega}) = \frac{M+1}{\mathbf{e}^H\mathbf{R}_M^{-1}\mathbf{e}} = \frac{M+1}{q(0) + 2\sum_{k=1}^{M} q(k)\cos k\omega}$$

där $q(0)$ är summan längs huvuddiagonalen i $\mathbf{R}_x^{-1}$, $q(1)$ är summan längs diagonalen under huvuddiagonalen, osv.

$$\mathbf{R}_M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^M \\ \alpha & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{M-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \alpha^M & \dots & \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Från exempel 5.2.11 på sidan 258 ser vi att inversen på autokorrelationsmatrisen är

$$\mathbf{R}_M^{-1} = \frac{1}{1-\alpha^2} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha^2 & -\alpha & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -\alpha & 1+\alpha^2 & -\alpha \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}$$

Då kan vi utläsa värdena $q(0$ och $q(1)$:

$$q(0) = \frac{2+(M-1)(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2} = \frac{(M+1)+(M-1)\alpha^2}{1-\alpha^2}$$
$$q(1) = \frac{-\alpha M}{1-\alpha^2}$$

$$P_{MV}(e^{j\omega}) = \frac{(1-\alpha^2)(M+1)}{(M+1)+(M-1)\alpha^2 - 2\alpha M\cos\omega}$$

Uppgift 8.22

Följande värden är givna för autokorrelationssekvensen för en svagt stationär process $x(n)$:

$$r_x(0) = 2 \quad ; \quad r_x(1) = \sqrt{3}/2 \quad ; \quad r_x(2) = 0.5$$

Egenvärdena hos Toeplitz-autokorrelationsmatrisen med storlek 3×3 är $\lambda_1 = 3.5$, $\lambda_2 = 1.5$, och $\lambda_3 = 1.0$. Motsvarande normaliserade egenvektorer är

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{2/5}\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det är känt att $x(n)$ består av en sinus i vitt brus.

a) Skatta sinussvängningens frekvens med Blackman-Tukeys frekvensskattningsmetod.

b) Använd MUSIC-algoritmen för att skatta frekvensen.

Lösning 8.22:

a) Enligt tabell 8.11 i Hayes:

$$\hat{P}_{PC-BT}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{P} \lambda_i |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_i|^2$$

Vi har en sinus, vilket innebär två exponentialfunktioner, $p = 2$. Vi har $M = 3$ egenvektorer.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\omega} \\ e^{j2\omega} \end{bmatrix}$$

Vi får då

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{PC-BT}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{P} \lambda_i |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_i|^2 \\
&= \frac{1}{3}\left[3.5\frac{2}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + e^{-j\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-j2\omega}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + e^{j\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{j2\omega}\right)\right. \\
&\qquad \left. + 1.5\frac{1}{2}\left(-1 + e^{-j2\omega}\right)\left(-1 + e^{j2\omega}\right)\right] \\
&= \frac{5}{3} + \frac{14}{15}\sqrt{3}\cos\omega + \frac{1}{5}\cos 2\omega
\end{aligned}$$

som har sitt maximum för $\omega = 0$.

b) Enligt tabell 8.10 i Hayes:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{MU}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sum_{i=P+1}^{M} |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_i|^2} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{e}^H \mathbf{v}_3|^2} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{5}\left(1 - \sqrt{3}e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}\right)\left(1 - \sqrt{3}e^{j\omega} + e^{j2\omega}\right)} \\
&= \frac{5}{5 - 4\sqrt{3}\cos\omega + 2\cos 2\omega}
\end{aligned}$$

Derivering av nämnaren ger

$$\omega = \frac{\pi}{6}$$

Uppgift 8.28

Autokorrelationsmatrisen av storlek 3×3 för en harmonisk process är

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 3 & -j & -1 \\ j & 3 & -j \\ -1 & j & 3 \end{bmatrix}$$

a) Använd Pisarenkos harmoniska uppdelning för att bestämma frekvenserna på de komplexa exponentialfunktionerna, samt variansen på det vita bruset.

b) Repetera a) för MUSIC-algoritmen och egenvektormetoden.

Lösning 8.28:

c) Räkna ut egenvärdena för $\mathbf{R}_x$:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{R}_x - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -j & -1 \\ j & 3-\lambda & -j \\ -1 & j & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (3-\lambda)((3-\lambda)^2 + j^2) - j(-3j + j\lambda + j) - (j^2 + 3 - \lambda) \\
&= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = 0
\end{aligned}$$

Detta polynom har lösningarna $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Minsta egenvärdet är 2 och eftersom två egenvärden har detta värde, har brusrummet dimension 2. Detta innebär att det finns en komplex exponentialfunktion, $p = 1$. Variansen på bruset är $\sigma_w^2 = \lambda_{\min} = 2$. Enligt tabell 8.9:

$$\mathbf{R}_x(\text{av storlek } 2 \times 2) = \begin{bmatrix} 3 & -j \\ j & 3 \end{bmatrix}$$

Egenvärden $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Egenvärdet 2 har tillhörande egenvektor

$$\mathbf{v}_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}$$

Den skattade frekvensen fås ur rötterna till

$$V_{\min}(z) = \sum_{k=0}^{p} v_{\min}(k) z^{-k} = 1 - jz^{-1}$$

dvs. $\omega = \pi/2$.

d)

MUSIC-algoritmen Räkna ut egenvektorerna till $\mathbf{R}_x$:

$$\lambda_1 = 5 \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -j \\ 1 \\ j \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2 \qquad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ j \\ 1 \end{bmatrix}$$

Enligt tabell 8.10:

$$\begin{aligned}
\hat{P}_{MU}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sum_{i=P+1}^{M} |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_i|^2} \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{6}\left(2 - je^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right)\left(2 + je^{j\omega} + e^{2j\omega}\right) + \frac{1}{2}\left(je^{-j\omega} + e^{-2j\omega}\right)\left(-je^{j\omega} + e^{2j\omega}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{2 - \frac{4}{3}\sin\omega + \frac{2}{3}\cos 2\omega}
\end{aligned}$$

Egenvektormetoden

$$\begin{aligned}\hat{P}_{EV}(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sum_{i=P+1}^{M} \frac{1}{\lambda_i} |\mathbf{e}^H \mathbf{v}_i|^2} \\ &= 2\hat{P}_{MU}(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{3}\sin\omega + \frac{1}{3}\cos 2\omega}\end{aligned}$$