Tentamen i Kösystem och Köteori torsdagen den 9 mars 2006

Tillåtna hjälpmedel: formelsamling från hemsidan, allmän formelsamling av typ Tefyma, räknedosa

Alla svar måste motiveras.

Uppgift 1

Antag att vi har ett kösystem med två betjänare och två köplatser. Kunder kommer till systemet med intensiteten 5 s^{-1} och betjäningsintensiteten är 2,5 s^{-1}. Tiderna mellan ankomster och betjäningstiderna är exponentialfördelade.

a) Rita tillståndsdiagram och beräkna tillståndssannolikheterna.

b) Vad är medeltiden i kösystemet för en kund som inte spärras?

c) Hur stor är den avverkade trafiken i systemet?

d) Antag att ankomstintensiteten går mot 0. Hur lång tid tillbringar då en kund i medeltal i kösystemet?

Uppgift 2

Betrakta en GSM-basstation där tiden mellan två inkommande samtal och samtalstiden är exponentialfördelade med medelvärdena $\lambda = 5.5\ \text{min}^{-1}$ och $\mu = 0{,}5\ \text{min}^{-1}$. Om alla radiokanaler är upptagna spärras inkommande samtal.

a) Hur många radiokanaler behövs det för att spärrsannolikheten ska vara mindre än 4 %?

b) Bestäm sannolikheten att basstationen hanterar fler än 12 samtal samtidigt. Om du inte lyckades lösa uppgift a) så kan du antaga att basstationen har 15 radiokanaler.

c) Är systemet stabilt eller instabilt?

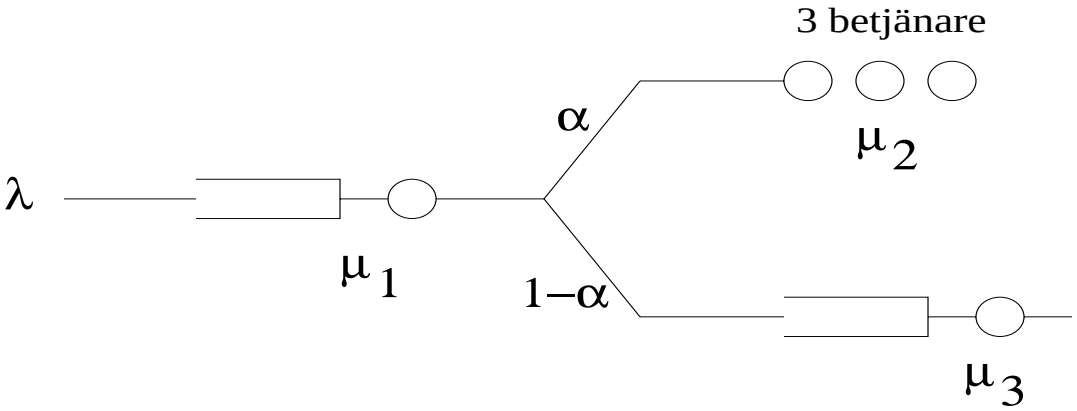
Antag nu att antalet kunder är 5 stycken och att varje kund som inte betjänas har ankomstintensiteten 1 min^{-1}. För övrigt är systemet oförändrat.

d) Rita tillståndsgrafen för systemet.

e) Bestäm spärrsannolikheten för systemet.

Uppgift 3

I ett kösystem enligt figuren nedan har delsystemen exponentialfördelade betjäningstider. Till kösystemet ankommer kunder enligt en Poissonprocess. Väntsystemen har oändliga köer.



$\lambda = 10s^{-1}$ $\mu_1 = 12s^{-1}$ $\mu_2 = 0{,}5s^{-1}$ $\mu_3 = 9s^{-1}$ $\alpha = 0{,}4$

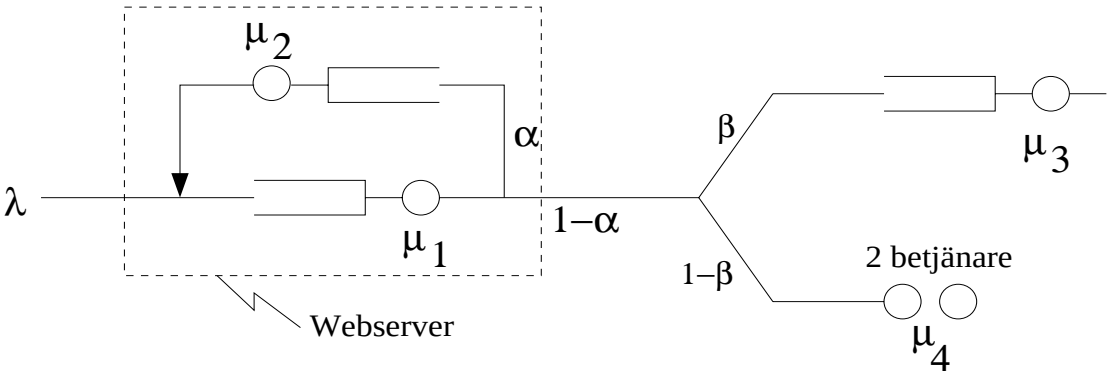
a) Bestäm avverkad trafik i delsystem 2.

b) Beräkna svarstiden i vart och ett av de tre delsystemen.

c) Beräkna medelvärdet av tiden som en kund som får betjäning i delsystem 2 eller delsystem 3 tillbringar i könätet.

d) Bestäm medeltiden som en kund som får fullständig betjäning tillbringar i könätets köer.

Uppgift 4



Till en webserver ankommer jobb enligt en Poissonprocess med intensiteten λ. När ett jobb är färdigbetjänat i delsystem 1 går det med sannolikheten α till delsystem 2. Jobb som lämnar webservern går med sannolikheten β till delsystem 3 och med sannolikheten $1-\beta$ till delsystem 4. Betjäningstiderna i systemen är alla exponentialfördelade och väntsystemen har oändliga köer.

Antag att $\lambda = 10\,\mathrm{s}^{-1}$, $\alpha = 0{,}5$, $\mu_1 = 25\,\mathrm{s}^{-1}$, $\mu_2 = 15\,\mathrm{s}^{-1}$, $\mu_3 = 5\ \mathrm{s}^{-1}$, $\mu_4 = 0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$ och $\beta = 0{,}4$;

a) Bestäm antalet spärrade kunder per sekund.

b) Bestäm medelantal kunder i vart och ett av delsystemen.

c) Beräkna tiden en kund tillbringar i webservern. Observera att webservern innehåller två delsystem.

d) Med hur många procent måste ankomstintensiteten till hela könätet, λ, minst öka för att delsystem 3 skall bli instabilt?

Uppgift 5

För ett M/G/1-system gäller

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)}$$ där $N =$ medelantal kunder i kösystemet.

Lös följande uppgifter:

a) Antag att ankomstintensiteten är 10 s^{-1} och att betjäningstiden alltid är 0,05 sekunder. Beräkna medelantal kunder i kösystemet.

b) Beräkna medeltiden som en kund tillbringar väntande i kön i detta system.

c) Antag nu att betjäningstiden har samma medelvärde som i a) men att den är summan av två oberoende exponentialfördelade tider. De två exponentialfördelade tiderna har samma medelvärde. Vad blir då medeltiden som en kund tillbringar i systemet?

Uppgift 6

Ett upptagetsystem med tre betjänare fungerar på följande sätt. Till systemet anländer två sorters kunder. Kunder av typ A kan betjänas av en betjänare, men kunder av typ B måste betjänas av två betjänare. Finns det inga lediga betjänare så spärras kunder av typ A, finns det en eller inga lediga betjänare så avvisas kunder av typ B. Denna typ av upptagetsystem kan användas för att modellera mobilsystem där vissa förbindelser behöver mer än en radiokanal. Vi antar att ankomsterna bildar en Poissonprocess och att betjäningstiderna är exponentialfördelade.

a) Definiera tillstånd och rita ett tillståndsdiagram för detta system. Antag att ankomstintensiteterna för typ A och B är λ_A respektive λ_B och att betjäningsintensiteterna är μ_A respektive μ_B.

b) Beräkna spärrsannolikheten för kunder av typ A respektive typ B. Antag här att $\lambda_A = \lambda_B = \mu_A = \mu_B = 1$ per sekund.

c) Hur många kunder av typ A respektive typ B blir färdigbetjänade per sekund? . Antag också här att $\lambda_A = \lambda_B = \mu_A = \mu_B = 1$ per sekund.