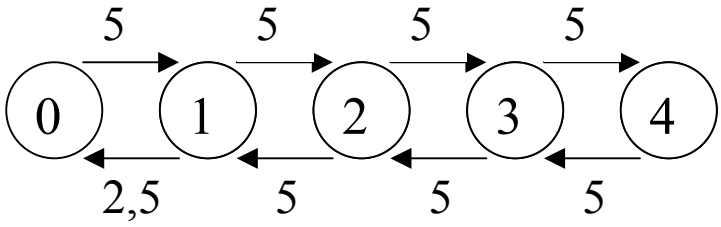
Lösningar till tentamen i Köteori och Kösystem mars 2006

Uppgift 1

a) Tillståndsdiagrammet ser ut så här:



Vi använder snittmetoden för att ställa upp tillståndsekvationerna:

$$5p_0 = 2{,}5p_1 \Rightarrow p_1 = 2p_0$$
$$5p_1 = 5p_2 \Rightarrow p_2 = p_1 = 2p_0$$
$$5p_2 = 5p_3 \Rightarrow p_3 = p_2 = 2p_0$$
$$5p_3 = 5p_4 \Rightarrow p_4 = p_3 = 2p_0$$

Därefter utnyttjar vi att summan av alla sannolikheter måste vara = 1 vilket ger

$$\sum_{i=0}^{4} p_i = 1 \Rightarrow p_0 \cdot (1+2+2+2+2) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{9}$$

Slutligen får vi

$$p_0 = \frac{1}{9}$$
$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{2}{9}$$

b) Vi använder Littles sats. För att göra det måste vi först beräkna medelvärdet av antal kunder i systemet och den effektiva ankomstintensiteten. Medelvärdet beräknas enklast genom att använda definitionen vilket ger

$$N = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = \frac{20}{9} \approx 2{,}22$$

Eftersom ankomstintensiteten inte beror av markovkedjans tillstånd, så blir

$$\lambda_{eff} = \lambda \cdot (1 - p_4) = \frac{35}{9} \approx 3{,}89$$

Littles sats ger slutligen

$$T = \frac{N}{\lambda_{eff}} = \frac{4}{7} \approx 1{,}56$$

c) Den avverkade trafiken är detsamma som medelantal upptagna betjänare. Man kan beräkna den på två sätt. Låt oss först använda definitionen av medelvärde:

$$N_s = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = \frac{14}{9}$$

Man kan också använda Littles sats på följande sätt:

$$N_s = \lambda_{eff} \cdot \bar{x} = \frac{14}{9} \approx 1{,}56$$

d) När ankomstintensiteten är mycket låg så finns det nästan aldrig några kunder i systemet när det kommer en kund vilket innebär att tiden i systemet blir en betjäningstid. Medeltiden blir då en medelbetjäningstid det vill säga

$$\bar{x} = \frac{1}{2{,}5} = 0{,}4$$

Uppgift 2

a) Spärrsannolikheten för detta system är lika med sannolikheten att systemet är fullt eftersom ankomstintensiteten är konstant. Vi kan använda Erlangfördelningen för att beräkna spärren:

$$E_m(\rho) = E_m(5{,}5 / 0{,}5) = E_m(11)$$

En titt i formelsamlingen avslöjar att

$$E_{15}(11) > 0{,}04 \text{ och } E_{16}(11) \approx 0.039 < 0.04$$

vilket innebär att det behövs minst 16 betjänare.

b) Först konstaterar vi att

$$P(\text{ hanterar fler än 12 samtal }) = p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16}$$

och att

$$p_{16} = E_{16}(11)$$

Dessutom har vi att

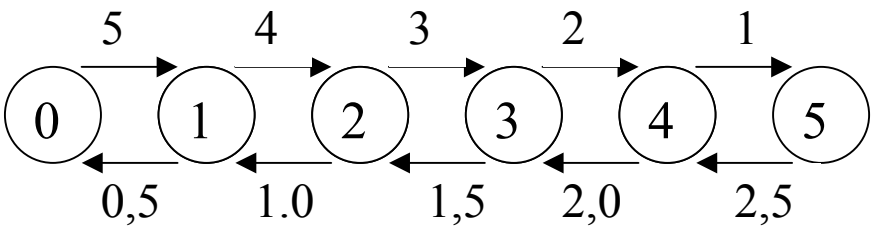
$$p_{i-1} = \frac{\rho^{i-1} / (i-1)!}{\sum_{\forall j} \rho^j / j!} = \frac{i}{\rho} \cdot \frac{\rho^i / i!}{\sum_{\forall j} \rho^j / j!} = \frac{i}{\rho} p_i$$

vilket ger

$$p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} = E_{16}(11) \cdot \left(\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{11^3} + \frac{16 \cdot 15}{11^2} + \frac{16}{11} + 1 \right) \approx 0{,}27$$

c) Systemet är stabilt eftersom det är ett upptagetsystem och dessa är alltid stabila eftersom antalet platser i systemet är begränsat.

d) Markovkedjan ser ut så här:



e) Sannolikheten för spärr är 0 eftersom det finns färre potentiella kunder än betjänare, det vill säga det finns alltid lediga betjänare.

Uppgift 3

a) Avverkad trafik i delsystem 2 blir

$$\rho_{avv} = \rho_2(1 - E_3(\rho_2)) = 8(1 - E_3(8)) = 8(1 - 0.675462) = 2.596$$

b) Tiderna blir

$$T_1 = \frac{1}{\mu_1\left(1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)} = \frac{1}{12\left(1 - \frac{10}{12}\right)} = 0.5 \text{ s}$$

$$T_2 = \frac{1}{\mu_2} = 2 \text{ s}$$

$$T_3 = \frac{1}{\mu_3\left(1 - \frac{\lambda_3}{\mu_3}\right)} = \frac{1}{9\left(1 - \frac{6}{9}\right)} = \frac{1}{3} \text{ s}$$

c) Medeltiden i könätet för en kund som får betjäning antingen i delsystem 2 eller delsystem 3 är:

$$T_{tot} = T_1 + \frac{4(1 - E_3(8))}{4(1 - E_3(8)) + 6} T_2 + \frac{6}{4(1 - E_3(8)) + 6} T_3 = 1.13 \text{ s}$$

d) Vi får

$$W_{q1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

$$W_{q2} = 0$$

$$W_{q3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

Medeltiden som en kund som får fullständig betjäning tillbringar i könätets köer är

$$W_{q,tot} = \frac{5}{12} + \frac{4(1-E_3(8))}{4(1-E_3(8))+6} \cdot 0 + \frac{6}{4(1-E_3(8))+6} \cdot \frac{2}{9} = 0.60 \text{ s}$$

.

Uppgift 4

a) Vi får

$$\lambda_4 = 6,\ \mu_4 = 0.5 \Rightarrow \rho_4 = 12$$

vilket ger att antalet spärrade kunder per sekund blir

$$\lambda_4 \cdot E_2(\rho_4) = 6 \cdot 0.847059 = 5{,}08$$

b) Först beräknar vi ankomstintensiteterna till delsystem 1 respektive delsystem 2

$$\lambda_1 = \frac{10}{1-\alpha} = 20 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_2 = 10 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_3 = \lambda \cdot \beta = 4 \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda_4 = \lambda \cdot (1-\beta) = 6 \text{ s}^{-1}$$

Sedan ger sedvanliga formler för M/M/1 och för Erlangsystem följande

$$\overline{N}_1 = \frac{\frac{20}{25}}{1-\frac{20}{25}} = 4$$

$$\overline{N}_2 = \frac{\frac{10}{15}}{1-\frac{10}{15}} = 2$$

$$\overline{N}_3 = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 4$$

$$\overline{N}_4 = \rho_4(1-E_2(\rho_4)) = 12(1-E_2(12)) = 12(1-0.847059) = 1{,}835$$

c) Littles sats ger

$$T_{WS} = \frac{\overline{N}_1 + \overline{N}_2}{\lambda} = \frac{6}{10} = 0.6 \text{ s}$$

d) Den maximala ankomstintensiteten som man kan ha till hela systemet blir

$$\lambda = \frac{\mu_3}{\beta} = \frac{5}{0{,}4} = 12{,}5 \text{ s}^{-1}$$

Observera att delsystem 1 också kommer att bli instabilt om man ökar λ med minst 25%. Det som maximalt kan ankomma till delsystem 3 då delsystem 1 blir överlastat är 12,5 per sekund vilket gör att delsystem 3 då blir instabilt.

Uppgift 5

a) Vi börjar med att beräkna alla storheter som ingår i den givna formeln:

$$\rho = \lambda E(X) = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$$

och

$$E(X^2) = 0.05^2$$

eftersom betjäningstiden är deterministisk (det vill säga alltid lika stor). Insättning ger nu

$$N = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0{,}5 + \frac{10^2 \cdot 0{,}05^2}{2 \cdot (1-0{,}5)} = 0{,}75$$

b) $$T_q = \frac{N}{\lambda} - E(X) = \frac{0{,}75}{10} - 0.05 = 0{,}025$$

c) Betjäningstiden är nu summan av två exponentialfördelade tider med samma medelvärde. Denna summa har medelvärdet 0,05. Det betyder att var och en av de exponentialfördelade tiderna måste ha medelvärdet 0,025. Låt oss sätta

$$a = \frac{1}{0{,}025} = 40$$

Då är laplacetransformen för en av tiderna

$$\frac{a}{a+s}$$

och laplacetransformen för summan blir då

$$f(s) = \left(\frac{a}{a+s}\right)^2 = a^2(a+s)^{-2}$$

Derivering ger nu

$$\frac{df(s)}{ds} = -2a^2(a+s)^{-3}$$

och

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} = 6a^2(a+s)^{-4} \to 6a^2 \cdot a^{-4} = 6a^{-2} \text{ då } s \to 0$$

Det innebär att

$$E(X^2) = 6a^{-2} = 6 \cdot 0{,}025^2$$

Medelantal kunder i systemet blir nu

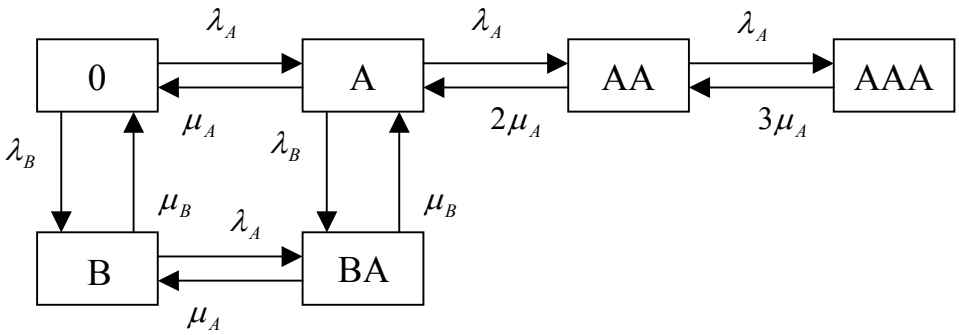
$$N = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)} = 0{,}5 + \frac{10^2 \cdot 6 \cdot 0{,}025^2}{2 \cdot (1-0{,}5)} = 0{,}875$$

Medeltiden i systemet blir då enligt Littles sats

$$T = \frac{N}{\lambda} = 0{,}0875$$

Uppgift 6

a) Markovkedjan ser ut så här:



b) Låt oss sätta $p_{AAA} = t$. Sedan använder vi flöde-in-flöde-ut för att ställa upp ekvationer. Det ger

$$\begin{cases} 2p_0 = p_A + p_B \\ 2p_B = p_0 + p_{BA} \\ 2p_{BA} = p_A + p_B \\ 3p_A = p_0 + p_{BA} + p_{AA} \\ 2p_{AA} = p_A + p_{AAA} \\ 3p_{AAA} = p_{AA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 = 6t \\ p_A = 6t \\ p_B = 6t \\ p_{BA} = 6t \\ p_{AA} = 3t \\ p_{AAA} = t \end{cases}$$

Använder vi sedan att summan av alla sannolikheter måste vara =1 så får vi att

$$t = \frac{1}{28}$$

Ankomstintensiteten av kunder av typ A respektive typ B är samma för alla tillstånd. Det ger att spärrsannolikheterna blir

$$P(\text{A-spärr}) = p_{BA} + p_{AAA} = \frac{7}{28}$$

och

$$P(\text{B-spärr}) = p_{AA} + p_B + p_{AAA} + p_{BA} = \frac{16}{28}$$

c) Medelantalet färdigbetjänade per tidsenhet blir

$$\lambda_A^{eff} = \lambda_A(1 - P(\text{A-spärr})) = 1 \cdot \left(1 - \frac{7}{28}\right) = \frac{21}{28}$$

$$\lambda_B^{eff} = \lambda_B(1 - P(\text{B-spärr})) = 1 \cdot \left(1 - \frac{16}{28}\right) = \frac{12}{28}$$