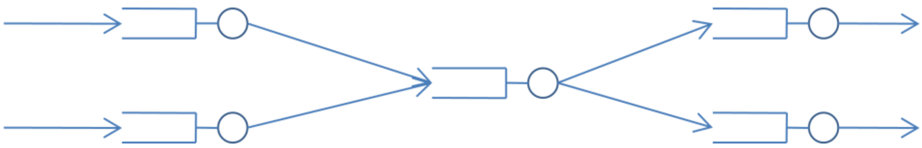
Föreläsning 6, Kösystem

Könät utan återkoppling

Ofta modelleras system bäst genom att använda ett könät det vill säga ett antal sammankopplade köer. Det kan till exempel se ut som nedan:



Nu kan vi bevisa följande:

Poissonprocess in till M/M/1 ger Poissonprocess ut

Detta kan man visa genom att beräkna fördelningen för tiden mellan avgångarna från ett M/M/1-system. Vi sätter $Y =$ tiden mellan två avgångar. Kalla en kund som lämnar systemet A och den därpå följande kunden B. Y är då tiden mellan avgångarna för A och B. Då får vi att

$$F_Y^*(s) = F_Y^*(s|\text{A lämnar tomt system})P(\text{A lämnar tomt system}) + F_Y^*(s|\text{A lämnar ej tomt system})P(\text{A lämnar ej tomt system}) \tag{4}$$

Nu har vi dessutom att

$$F_Y^*(s|\text{A lämnar tomt system}) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \cdot \frac{\mu}{\mu + s}$$

eftersom man först måste vänta på B:s ankomst och sedan på B:s betjäning. Dessutom är

$$P(\text{A lämnar tomt system}) = 1 - \rho$$

Samma typ av resonemang ger

$$F_Y^*(s|\text{A lämnar ej tomt system}) = \frac{\mu}{\mu + s}$$

och

$$P(\text{A lämnar ej tomt system}) = \rho$$

Insättning i (4) och ganska mycket algebra ger sedan

$$F_Y^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s}$$

Således är tiden mellan avgångar exponentialfördelad och därmed är det en poissonprocess som lämnar ett kösystem.

Sammanslagning av Poissonprocesser ger en ny Poissonprocess

Antalet händelser i en Poissonprocess under ett tidsintervall av längden t är Poissonfördelat vilket innebär att

$$P(k\text{ händelser}) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

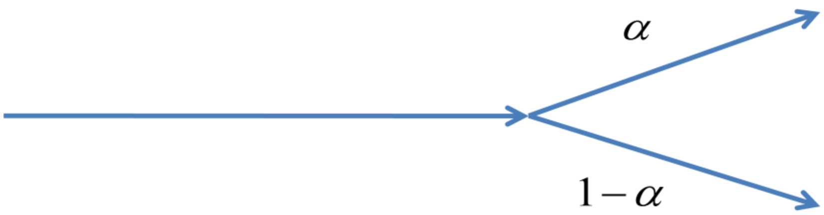
Z-transformerar vi detta så blir det

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^k \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} = e^{\lambda t(1-z)} \qquad (5)$$

Om vi har två Poissonprocesser och slår samman dem så är antalet händelser i intervallet summan av antalet händelser i vart och ett av intervallen. Då får vi z-transformen för antalet händelser i den sammanslagna processen genom att multiplicera z-transformerna för antalet händelser i de ej sammanslagna processerna. Och från formel (5) får man då att den sammanslagna processen måste vara en Poissonprocess.

Uppdelning av Poissonprocesser ger ny Poissonprocess

Vi delar upp en process genom att varje gång en kund kommer till delningspunkten så skickas den med sannolikheten α uppåt och $1 - \alpha$ nedåt.



Om N är antalet händelser i den ursprungliga, odelade processen under ett intervall av längden t och M är antalet händelser i "uppåtprocessen" så får vi:

$$P(M=k) = \sum_{i=k}^{\infty} P(M=k|N=i)P(N=i) = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{i-k} \cdot \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t} =$$

$$= \alpha^k e^{-\lambda t} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{k!\,(i-k)!} (1-\alpha)^{i-k} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = \frac{\alpha^k e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{[(1-\alpha)\lambda t]^{i-k}}{(i-k)!} =$$

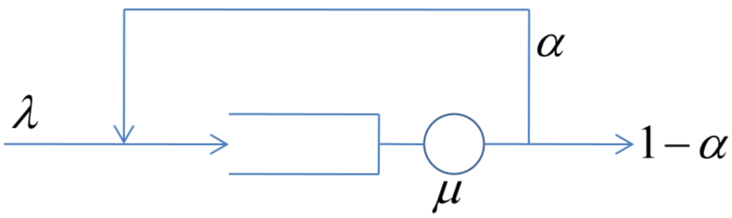
$$= \frac{\alpha^k e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} e^{(1-\alpha)\lambda t} = \frac{(\alpha \lambda t)^k}{k!} e^{-\alpha \lambda t}$$

Antalet händelser i uppprocessen är också Poissonfördelat, vilket innebär att det är en Poissonprocess.

Nu kan man alltså räkna på könät av det slag som vi ritade ovan. Dock visar det sig att det blir problem när man inför återkopping, mer om det nedan.

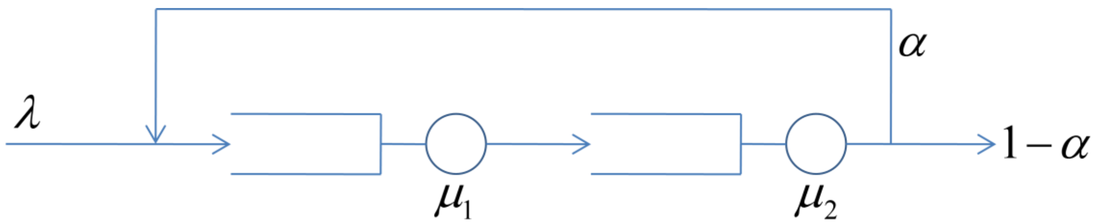
Könät med återkoppling

Detta gör att vi enkelt kan räkna på könät som innehåller M/M/1-system och som inte har några återkopplingar. Men så snart man inför återkopplingar så har man inte längre Poissonprocesser i könätet. Det kan man göras troligt på följande sätt. Säg att vi har ett kösystem med en återkoppling som i figuren nedan.



Om ankomstintensiteten är mycket liten i förhållande till betjäningsintensiteten och sannolikheten för återkoppling är mycket stor så kommer avgångsprocessen från betjänaren att se ut så här: för det mesta kommer det inga kunder. När någon kund kommer utifrån så kommer det att bli en massa avgångar väldigt snabbt (det är samma kund som återkopplas, med stor sannolikhet många gånger eftersom återkopplingssannolikheten är stor). Det innebär att om vi har haft en avgång från betjänaren så är det stor sannolikhet att vi inom kort kommer att få en ny avgång. Omvänt, om vi inte har haft någon avgång så är det stor sannolikhet att det dröjer ganska länge för då finns förmodligen ingen kund i kösystemet och då måste man vänta på en ankomst (och ankomstintensiteten var låg). Det innebär att man har nytta av att känna till historien för att förutsäga framtiden, vilket innebär att det inte kan vara en poissonprocess.

Dock visar det sig att man kan räkna på könät med återkoppling på samma sätt som om de inte har återkoppling. Ganska konstigt, men så är det. Att visa detta i det allmänna fallet gör vi inte i denna kurs. Ett exempel visar hur man kan göra:



Man kan rita en markovkedja i två dimensioner för att beskriva detta kösystem. Om vi kunde räkna på dessa kösystem som om det vore poissonprocesser som kom till dem så skulle vi ha att

$$P(k_1,k_2) = P(k_1)\cdot P(k_2) = (1-\rho_1)\rho_1^{k_1}\cdot(1-\rho_2)\rho_2^{k_2} \qquad (1)$$

Här är $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ och

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{1-\alpha}$$

Om vi tittar på ett tillstånd där $k_1 > 0$ och $k_2 > 0$ så ser flöde in flöde ut på följande sätt:

$$(\lambda+\mu_1+\mu_2)P(k_1,k_2) = \lambda P(k_1-1,k_2) + \mu_1 P(k_1+1,k_2-1) + \mu_2 P(k_1,k_2+1) \qquad (2)$$

Sätter vi in (1) i (2) och förenklar så ser man att (1) är en lösning till (2).

Liknande räkningar kan man göra i ett allmänt fall. Det blir mer beteckningar och index i formlerna men i princip gör man på samma sätt för att visa att man kan räkna som för ett M/M/1-system även i de fallen.