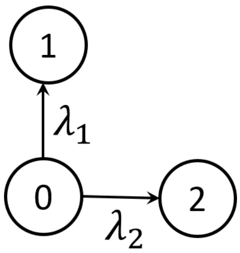
Föreläsning 3

I denna föreläsning ska vi behandla markovska kösystem som har ett begränsat antal buffertplatser och även ett begränsat antal kunder. För att kunna göra detta behöver man några resultat om markovkedjor och om poissonprocesser.

Tiden i ett tillstånd

Vi ska visa att tiden i ett tillstånd i en markovkedja är exponentialfördelad. Antag att vi har ett tillstånd, säg tillstånd 0, och att det från detta tillstånd går pilar med intensiteterna λ_1, λ_2 etc. Om vi följer pilen som det står λ_i på så hamnar man i tillstånd i. Figuren nedan visar hur det ser ut om vi har två pilar ut från tillstånd 0.



Säg att summan av alla dessa intensiteter är Λ. Vi kan också anta att markovkedjan startar i tillstånd 0 vid tiden $t = 0$ och att alla andra tillstånd är absorberande, det vill säga man kan aldrig lämna något av de tillstånden när man har kommit till dem. Då får vi följande ekvation för tillstånd 0 (från $p'(t) = p(t) \cdot Q$):

$$p_0'(t) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots)p_0(t) = -\Lambda p_0(t)$$

Denna differentialekvation har lösningen

$$p_0(t) = Ce^{-\Lambda t}$$

Eftersom $p_0(0) = 1$ (kedjan startar i tillstånd 0) så måste $C = 1$. Det betyder att lösningen är

$$p_0(t) = e^{-\Lambda t}$$

Om nu Y är tiden i tillståndet så blir

$$\begin{aligned} F_Y(t) = P(y \le t) = P(&\text{har lämnat tillstånd 0 vid tiden } t) = \\ 1 - P(&\text{kvar i tillstånd 0 vid tiden } t) = 1 - p_0(t) = 1 - e^{-\Lambda t} \end{aligned}$$

Det innebär att tiden i tillståndet är exponentialfördelad med medelvärde $1/\Lambda$. Man inser att detta resonemang gäller för vilket tillstånd som helst hur än markovkedjan ser ut.

Åt vilket håll hoppar man?

När man lämnar ett tillstånd, vad är sannolikheten att man lämnar det via pilen som det står λ_i på? Det verkar rimligt att den sannolikheten är

$$\frac{\lambda_i}{\Lambda}$$

för ju större intensitet på en båge desto större sannolikhet att man lämnar tillståndet längs den bågen. Vi kan använda samma markovkedja som i avsnittet innan för att visa detta. Då ställer vi i stället upp ekvationen för tillstånd 1:

$$p_1'(t) = \lambda_1 p_0(t) = \lambda_1 e^{-\Lambda t}$$

Denna differentialekvation har lösningen

$$p_1(t) = C - \frac{\lambda_1}{\Lambda} \cdot e^{-\Lambda t}$$

Eftersom vi inte befinner oss i tillstånd 1 vid tiden t så är $p_1(0) = 0$ vilket gör att vi kan bestämma värdet på C:

$$p_1(0) = C - \frac{\lambda_1}{\Lambda} = 0 \Rightarrow C = \frac{\lambda_1}{\Lambda}$$

Det ger oss slutligen

$$p_1(t) = \frac{\lambda_1}{\Lambda} \cdot (1 - e^{-\Lambda t})$$

Sannolikheten att vi kommer till tillstånd 1 när vi lämnar tillstånd 0 får vi genom att låta $t \to \infty$ i $p_1(t)$:

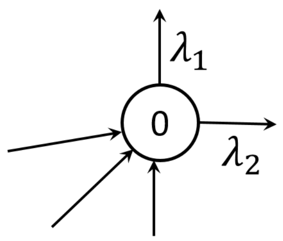
$$p_1(t) \to \frac{\lambda_1}{\Lambda} \cdot (1 - 0) = \frac{\lambda_1}{\Lambda}$$

Gissningen bekräftades alltså, sannolikheten att man lämnar tillståndet genom att följa båge som det står λ_1 på är

$$\frac{\lambda_1}{\Lambda}$$

Hur många hopp per tidsenhet gör man längs en båge?

Här måste vi skilja på två olika sorters tillstånd i markovkedjor. Den ena sorten är de som man bara besöker ett ändligt gånger efter vilket man aldrig återkommer. I det fallet så är antalet hopp per tidsenhet = 0 för man tar ju ett ändligt antal och dividerar med en oändlig tid. Men om man alltid är garanterad att få återkomma till ett tillstånd sedan man har lämnat det så kommer man ju förr eller senare alltid att göra om ett hopp igen. Därför antar vi att vi befinner oss i ett tillstånd som man alltid kommer tillbaka till förr eller senare när man har lämnat det. Låt oss antaga att tillståndet (som har markeringen 0) ser ut på följande sätt:



Vilken pil vi än lämnar tillståndet längs så kommer vi förr eller senare tillbaka till det. Hur lång tid det kan ta är naturligtvis slumpmässigt. Antalet inpilar och antalet utpilar kan vara godtyckligt. Summan av alla utintensiteter kallar vi Λ.

Betrakta nu ett mycket långt tidsintervall, säg från 0 till x. Låt K vara antalet besök man gör i tillstånd 0 under intervallet. Eftersom ett besök i tillstånd 0 i medel varar tiden $1/\Lambda$ och p_0 är andelen av tiden som vi tillbringar i tillstånd 0 så måste det gälla att:

$$E(K) \cdot \frac{1}{\Lambda} = x \cdot p_0 \Rightarrow E(K) = x \cdot p_0 \cdot \Lambda$$

I förra avsnittet visade vi att sannolikheten att man lämnar tillstånd 0 via bågen som det står λ_1 på är λ_1/Λ. Då måste medelantal gånger man följer den bågen under intervallet vara

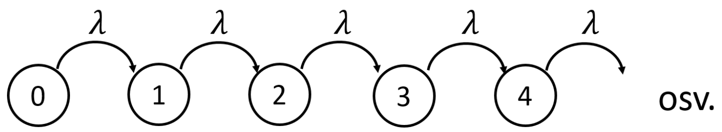
$$E(K) \cdot \frac{\lambda_1}{\Lambda} = x \cdot p_0 \cdot \Lambda \cdot \frac{\lambda_1}{\Lambda} = xp_0\lambda_1$$

Då får vi medelantal gånger per tidsenhet man följer bågen som det står λ_1 genom att dividera med längden av intervallet. Antalet hopp per tidsenhet längs bågen med λ_1 blir då

$$\lambda_1 p_0$$

Poissonprocessen

En poissonprocess är en process där tiden mellan händelser (i vårt fall nästan alltid ankomster till ett system) är exponentialfördelade. Det innebär att sker en händelse varje gång man hoppar längs en båge i en markovkedja som ser ut så här:



Om vi är i tillstånd 0 vid tiden 0 så är vi i tillstånd k vid tiden t om det har inträffat k händelser vid tiden t. Vad blir fördelningen för antalet händelser under ett intervall av längden t? Om N är antalet händelser fram till tiden t så är

$$P(N = k) = p_k(t)$$

Vi kan beräkna $p_k(t)$ med hjälp av differentialekvationerna $p'(t) = p(t)Q$ där Q-matrisen för markovkedjan är

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Detta leder till följande system av differentialekvationer:

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_1'(t) &= \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_k'(t) &= \lambda p_{k-1}(t) - \lambda p_k(t) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dessa ekvationer kan laplacetransformeras. För $k > 0$ får man

$$sp_k(s) = \lambda p_{k-1}(s) - \lambda p_k(s) \Rightarrow p_k(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \cdot p_{k-1}(s)$$

Upprepar man detta så ger det

$$p_k(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^k \cdot p_0(s)$$

Vi kan lösa ekvationen för $p_0(t)$ på samma sätt som i föreläsning 1 vilket ger

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow p_0(s) = \frac{1}{\lambda + s}$$

Det innebär att

$$p_k(s) = \frac{\lambda^k}{(\lambda + s)^{k+s}}$$

Tabellen över transformer ger oss då inversen:

$$P(N = k) = p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

N är poissonfördelad.

Observera att i poissonprocessen så är tiderna mellan händelser exponentialfördelade och antalet händelser under en viss tid är poissonfördelad. Poissonprocessen är minneslös, att vi känner till vad som har hänt hjälper oss inte alls att förutsäga tiden till nästa ankomst. Tiden till nästa händelser är alltid exponentialfördelad med samma medelvärde oavsett när den senaste händelsen inträffade.

Ofta är poissonprocessen en bra modell av ankomster många källor till ankomsterna. Om det är många som är inne på en webbserver så har man många källor (många som klickar på länkar som leder till webbplatsen) och då är poissonprocessen en bra beskrivning av ankomsterna.

Varianter av markovska kösystem

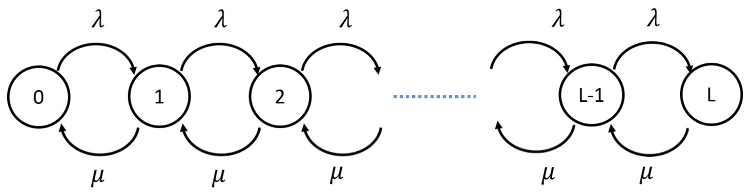
Det finns många varianter av markovska kösystem. När man räknar på dem använder man samma standardmall:

1. Rita markovkedjan
2. Hitta tillståndsfördelninen med t ex snittmetoden
3. Beräkna intressanta performanceparametrar

Här nedan kommer finns några vanliga varianter av markovska kösystem och deras markovkedjor.

Ändlig buffert, en bejänare

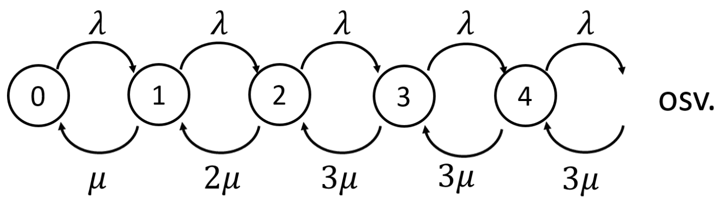
Markovkedjan ser ut så här om det finns totalt L platser i systemet:



Man löser den med snittmetoden som vanligt.

Flera betjänare

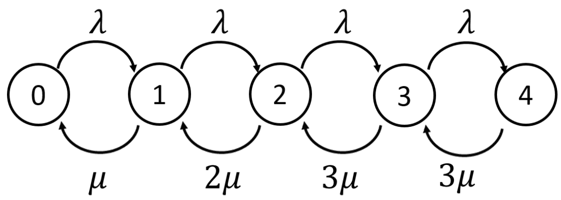
Markovkedjan ser ut så här om det finns totalt tre betjänare i systemet:



Hur man ändrar om det finns fler eller färre betjänare är uppenbart.

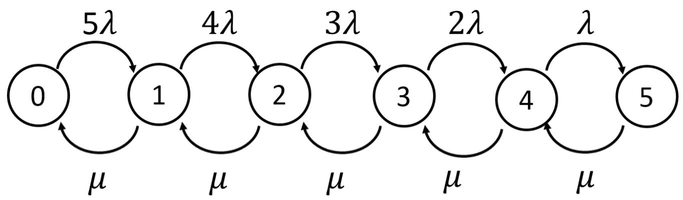
Flera betjänare och ändligt antal platser

Markovkedjan ser ut så här om det finns totalt tre betjänare och en plats i bufferten i systemet:



Ändligt antal kunder

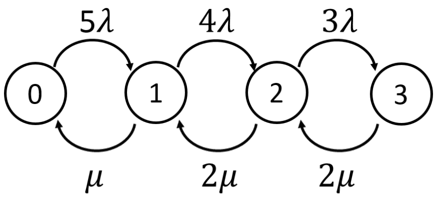
Antag att det finns fem som använder en webbplats. När någon klickar på en länk så får denne ett svar efter en tid. Antag sedan att den som har fått svaret sitter och läser och tänker en exponentialfördelad tid med medelvärdet $1/\lambda$ och sedan återigen klickar på en länk. Det kan man beskriva som ett kösystem med följande markovkedja:



Ankomstintensiteten blir mindre ju fler som finns i systemet, för de kunder som betjänas eller står och köar skickar inte några nya jobb till systemet.

Ändligt antal kunder, ändligt antal köplatser, fler än en betjänare

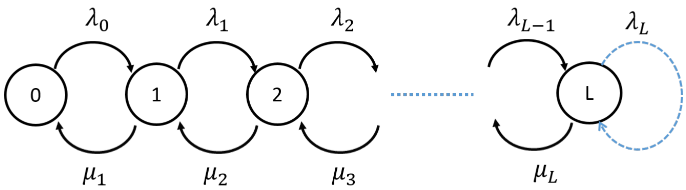
Här är ett exempel då vi har fem kunder, två betjänare och en buffertplats:



Beräkningar på markovska kösystem

När man har beräknat tillståndsfördelningen så är det enkelt att beräkna medelantal kunder i kösystemet, $E(N)$. Man kan antingen använda definitionen av medelvärde eller z-transformera, derivera och låta $z \to 1$.

Att beräkna spärrsannolikheten när alla får plats är enkelt, den blir ju 0. För att beräkna spärrsannolikheten när alla inte får plats måste vi beräkna hur många som kommer till systemet varje tidsenhet och hur många som inte får komma in i systemet varje tidsenhet. Betrakta en markovkedja som ser ut på följande sätt:



Tillstånd L är spärrtillstånd. Även i tillstånd L har vi ankomster, det är just de som spärras. Nu använder vi resultaten från tidigare om antal hopp per tidsenhet på bågarna i en markovkedja. Vi har en ankomst varje gång ett hopp görs på någon av de övre bågarna eller bågen som leder från L och kommer tillbaka till L. Antalet ankomster (både sådana som får komma in i systemet och som spärras) per tidsenhet blir då:

$$\sum_{k=0}^{L} \lambda_k p_k$$

De som spärras är de som kommer på bågen som är märkt λ_L. Antalet hopp per tidsenhet på den bågen är

$$\lambda_L p_L$$

Då måste sannolikheten för spärr bli

$$\frac{\text{antal spärrade per tidsenhet}}{\text{antal som kommer per tidenhet}} = \frac{\lambda_L p_L}{\sum_{k=0}^{L} \lambda_k p_k}$$

För att beräkna medelantal som får komma in i systemet per tidsenhet så använder man samma resonemang. De som får komma in är de som kommer när man hoppar på bågarna märkta λ_0 till λ_{L-1}. Det innebär att

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_{k=0}^{L-1} \lambda_k p_k$$

Nu kan vi beräkna medeltiden i systemet med hjälp av littles sats:

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{\text{eff}}}$$

Observera att om alla $\lambda_i = \lambda$ så blir spärrsannolikheten

$$\frac{\lambda p_L}{\sum_{k=0}^{L} \lambda p_k} = \frac{p_L}{\sum_{k=0}^{L} p_k} = p_L$$

eftersom summan av alla sannolikheter (dvs $\sum_{k=0}^{L} p_k$) måster vara $= 1$.