

Övning 8

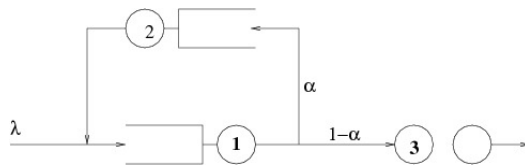
Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna beräkna medelantal kunder för alla köer i ett könät med återkopplingar.
- Kunna beräkna medeltiden som en kund tillbringar i ett könät med återkopplingar.

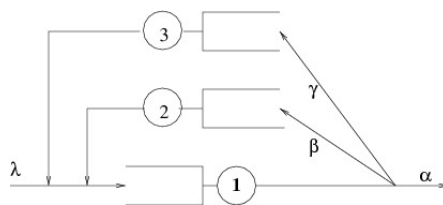
I denna övning kallas ett kösystem som ingår i ett könät oftast *nod*.

Problem

1. Könätet nedan beskriver ett datorsystem. Till könätet kommer jobb i enlighet med en Poissonprocess med medelvärde λ jobb per tidsenhet. Ett jobb som är färdigbetjänat i nod 1 fortsätter med sannolikheten α till nod 2 och med sannolikheten $1-\alpha$ till nod 3. Nod 3 är ett upptagetsystem med två betjänare. Låt $\alpha = 0.4$, $\lambda = 0.75$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1.5$ samt $\mu_3 = 3$
 - (a) Bestäm ankomstintensiteten till alla noderna. Bestäm också intensiteten med vilken kunder blir färdigbetjänade i nod 3.
 - (b) Bestäm medelantal jobb i könätet.
 - (c) Bestäm medelsvarstiden i könätet för ett jobb som inte spärras.



2. Könätet nedan består av tre M/M/1-köer. Betjäningsintensiteten i nod i är μ_i . Nya jobb kommer till könätet med intensiteten λ . Jobb som blir färdiga i nod 1 kan lämna könätet eller återkopplas till nod 2 eller 3. Sannolikheterna för detta är α , β respektive γ där $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Vi antar att ingen nod är överbelastad.
 - (a) Beräkna $\lambda_k =$ ankomstintensiteten till nod i för alla i .
 - (b) Beräkna medelantalet jobb i könätet.
 - (c) Beräkna medeltiden i könätet för en godtycklig kund.
 - (d) Beräkna medelantalet jobb som lämnar könätet per tidsenhet.

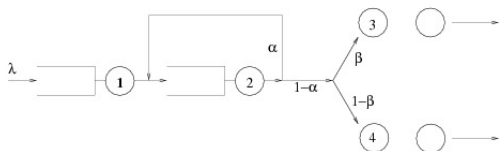


3. Kunder kommer till ett könät med M noder som alla är M/M/1-system. Ankomsterna bildar en Poissonprocess med intensiteten λ . En kund som kommer till könätet går till nod i med sannolikheten p_i . När en kund är färdigbetjänad i en nod lämnar den könätet med sannolikheten $1 - \alpha$ och med sannolikheten α går kunden tillbaka till en av noderna. Kunden väljer då nod i med sannolikheten p_i . Antag att $p_i = 1/M$ och att alla betjäningsintensiteten är μ i alla kösystemen.

- Bestäm ankomstintensiteten till nod i .
- Bestäm medeltiden i könätet för en godtycklig kund.
- Bestäm sannolikheten att ett jobb aldrig blir betjänat av nod 1.

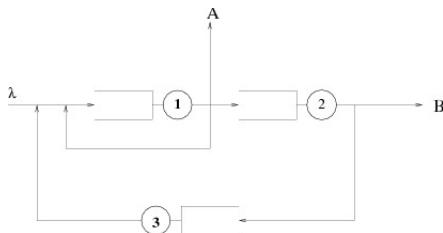
4. Betrakta könätet i figuren nedan. Nod 1 och 2 är M/M/1-system och nod 3 och 4 är upptagetsystem med m betjänare. Betjäningsintensiteten i nod i är μ_i .

- Beräkna medelantal kunder i alla noderna.
- Beräkna medeltiden i hela kösystemet för de kunder som får fullständig betjäning.



5. Betrakta nedanstående könät. Alla betjäningstider är exponentialfördelade och har medelvärdet 1. Dessutom är $p_{11} = 0.1$, $p_{12} = 0.8$ och $p_{23} = 0.5$.

- Bestäm ett värde på λ så att belastningen på den högst belastade betjänaren är 0.9.
- Beräkna sannolikheten att en kund lämnar könätet vid A respektive B.
- Beräkna medelantal betjäningar som en kund får innan den lämnar könätet.



6. Vi har ett könät med två noder som bägge är M/M/1-system. En kund som lämnar nod 1 fortsätter alltid till nod 2 och en kund som lämnar nod 2 fortsätter alltid till nod 1. Inga nya kunder kommer till nätet och inga kunder lämnar nätet. Antag att det finns M kunder i nätet och att betjäningsintensiteterna i noderna är μ_1 respektive μ_2 .

- Sätt $P(k_1, k_2) =$ sannolikheten att det finns k_1 kunder i nod 1 och k_2 kunder i nod 2. Beräkna $P(k_1, k_2)$.

- (b) Beräkna belastningen på betjänaaren i nod 1. Belastning = andel av tiden som betjänaaren jobbar = medelantal kunder som finns i betjänaaren.
- (c) Beräkna hur många kunder som i medeltal blir färdigbetjänade i nod 2 per tidsenhet.

Lösningar

1. (a) Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + \lambda_2 \\ \lambda_2 &= \alpha\lambda_1 \\ \lambda_3 &= (1 - \alpha)\lambda_1\end{aligned}$$

Vilket har lösningen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\lambda}{1 - \alpha} = \frac{0.75}{1 - 0.4} = 1.25 \\ \lambda_2 &= \frac{\alpha\lambda}{1 - \alpha} = \frac{0.4 \cdot 0.75}{1 - 0.4} = 0.5 \\ \lambda_3 &= \lambda = 0.75\end{aligned}$$

Intensiteten med vilken kunder blir färdigbetjänade i nod 3 är

$$\Lambda_3 = \lambda_3(1 - E_2(\lambda_3/\mu_3)) = 0.75 \cdot (1 - E_2(0.25)) \approx 0.73$$

- (b) De sedvanliga formlerna ger

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1/\mu_1}{1 - \lambda_1/\mu_1} \approx 1.67$$

$$E(N_2) = \frac{\lambda_2/\mu_2}{1 - \lambda_2/\mu_2} = 0.5$$

$$E(N_3) = \rho_3(1 - E_2(\rho_3)) = 0.25(1 - E_2(0.25)) \approx 0.24$$

Det totala antalet jobb blir alltså

$$E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) \approx 2.41$$

- (c) Fram till nod 3 har alla jobb i medeltal tillbringat samma tid i könätet, nämligen

$$E(T_{12}) = \frac{E(N_1) + E(N_2)}{\lambda} \approx 2.89$$

En kund som inte avvisas tillbringar alltid tiden $1/\mu_3 = 1/3$ i nod 3. Medeltiden i könätet för en kund som inte avvisas blir då

$$E(T_{tot}) = E(T_{12}) + \frac{1}{\mu_3} \approx 3.22$$

2. (a) Vi får ett ekvationssystem

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 &= \beta\lambda_1 \\ \lambda_3 &= \gamma\lambda_1\end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\lambda}{\alpha} \\ \lambda_2 &= \frac{\beta\lambda}{\alpha} \\ \lambda_3 &= \frac{\gamma\lambda}{\alpha}\end{aligned}$$

- (b) Man beräknar först ρ_i och använder sedan den vanliga formeln för M/M/1-system. Det ger

$$\begin{aligned}E(N_1) &= \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{\lambda_1/\mu_1}{1 - \lambda_1/\mu_1} = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{\lambda}{\alpha\mu_1 - \lambda} \\ E(N_2) &= \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{\beta\lambda}{\alpha\mu_2 - \beta\lambda} \\ E(N_3) &= \frac{\lambda_3}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{\gamma\lambda}{\alpha\mu_3 - \gamma\lambda}\end{aligned}$$

- (c) Medeltiden blir enligt Littles sats

$$E(T) = \frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)}{\lambda}$$

- (d) Ingen nod är överbelastad vilket innebär att i medeltal måste lika många kunder per tidsenhet lämna systemet som det kommer. Svaret är således λ .

3. (a) För nod i får vi ekvationen

$$\lambda_i = p_i\lambda + \sum_{j=1}^M \alpha\lambda_j p_j$$

Av symmetriskäl inser man att alla λ_j måste vara lika om alla $p_j = 1/M$. Då får man

$$\lambda_i = p_i\lambda + \sum_{j=1}^M \alpha\lambda_j p_j = \frac{\lambda}{M} + \alpha\lambda_i \Rightarrow \lambda_i = \frac{\lambda}{M(1 - \alpha)}$$

- (b) Vi bestämmer medelantal kunder i könätet. Medelantal kunder måste vara lika i alla noder så vi får att det totala antalet kunder i könätet blir

$$E(N) = M \cdot E(N_1) = M \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{M\lambda}{M(1 - \alpha)\mu - \lambda}$$

varefter Littles sats ger medeltiden i könätet

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{M}{M(1 - \alpha)\mu - \lambda}$$

- (c) Låt K vara antalet gånger som ett jobb passerar en godtycklig kö i könätet. K har då en geometrisk fördelning det vill säga

$$P(K = n) = \alpha^{n-1}(1 - \alpha), \quad n \geq 1$$

Vi sätter A = händelsen att nod 1 inte besöks av en kund. För varje gång ett jobb passerar genom köerna så är sannolikheten att det inte besöker nod 1

$$\frac{M-1}{M}$$

Det ger att

$$P(A|K = n) = \left(\frac{M-1}{M}\right)^n$$

Nu tar vi bort betinget

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|K = n)P(K = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M-1}{M}\right)^n \alpha^{n-1}(1 - \alpha) = \\ &= \frac{M-1}{M}(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M-1}{M}\right)^{n-1} \alpha^{n-1} = \\ &= \frac{M-1}{M}(1 - \alpha) \frac{M}{M - \alpha(M-1)} = \frac{(M-1)(1 - \alpha)}{M - \alpha(M-1)} \end{aligned}$$

4. (a) Först beräknar vi λ_i och ρ_i för alla noderna

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + \alpha\lambda_2 \\ \lambda_3 &= (1 - \alpha)\beta\lambda_2 \\ \lambda_4 &= \alpha\beta\lambda_2 \end{aligned}$$

Vilket medför

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda \\ \lambda_2 &= \frac{\lambda}{1 - \alpha} \\ \lambda_3 &= \beta\lambda \\ \lambda_4 &= (1 - \beta)\lambda \end{aligned}$$

och sedan $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ för alla i . Medelantal i noderna blir nu

$$E(N_i) = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad \text{för } i = 1 \text{ och } 2$$

$$E(N_i) = \rho_i(1 - E_{m_i}(\rho_i)) \quad \text{för } i = 3 \text{ och } 4$$

- (b) Fram till det ställe där kunderna delas upp mellan nod 3 och 4 så har alla tillbringat samma medeltid i könätet vare sig de avvisas eller inte. Enligt Littles sats är denna tid

$$E(T_{12}) = \frac{E(N_1) + E(N_2)}{\lambda}$$

Intensiteten med vilken kunder verkligen får komma in till upptaget-systemet blir

$$\Lambda_i = \lambda_i(1 - E_{m_i}(\rho_i)), \quad i = 3, 4$$

Sannolikheten att en kund som får betjäning får betjäning i nod 3 blir då

$$T_{tot} = \frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 + \Lambda_4}$$

och motsvarande för nod 4. Den totala medeltiden i könätet för en kund som inte avvisas blir då

$$T_{12} + \frac{\Lambda_3}{\Lambda_3 + \Lambda_4} \cdot \frac{1}{\mu_3} + \frac{\Lambda_4}{\Lambda_3 + \Lambda_4} \cdot \frac{1}{\mu_4}$$

5. (a) För ankomstintensiteterna till noderna får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lambda + 0.1\lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 &= 0.8\lambda_1 \\ \lambda_3 &= 0.5\lambda_2\end{aligned}$$

vilket har lösningen

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2\lambda \\ \lambda_2 &= 1.6\lambda \\ \lambda_3 &= 0.8\lambda\end{aligned}$$

För alla noderna gäller att $\mu_i = 1$ vilket innebär att $\rho_i = \lambda_i$. Den högst belastade noden är nod 1. Väljer vi $\lambda = 0.45$ så blir belastningen på den 0.9.

- (b) Vi beräknar utintensiteten vid A (kalla den λ_A) respektive B (kalla den λ_B). Man får

$$\begin{aligned}\lambda_A &= 0.1\lambda_1 = 0.2\lambda \\ \lambda_B &= 0.5\lambda_2 = 0.8\lambda\end{aligned}$$

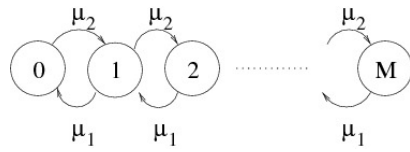
Observera att $\lambda_A + \lambda_B = \lambda$. Det ger att sannolikheten att en kund lämnar nätet vid A blir

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{0.2\lambda}{\lambda} = 0.2$$

och att den lämnar nätet vid B blir

$$\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{0.8\lambda}{\lambda} = 0.8$$

- (c) Eftersom $\lambda_1 = 2\lambda$ så måste varje kund i medeltal besöka nod 1 två gånger under sin tid i nätet. På samma sätt så besöks nod 2 i medeltal 1.6 gånger och nod 3 i medeltal 0.8 gånger under en kunds tid i nätet. En godtycklig kund blir alltså betjänad i medeltal $2 + 1.6 + 0.8 = 4.4$ gånger under sin tid i nätet.
6. (a) Vi observerar att eftersom det alltid finns M kunder i könätet så måste vi ha att $k_1 + k_2 = M$. Det räcker alltså att hitta sannolikheten att det finns k_1 kunder i nod 1. För att göra detta ritar vi en Markovkedja som beskriver antal kunder i nod 1:



Snittmetoden ger oss sedan

$$P(k_1 \text{ i nod } 1) = \rho_1^{k_1} \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{M+1}}$$

där $\rho_1 = \mu_2/\mu_1$. Således gäller

$$P(k_1, k_2) = \rho_1^{k_1} \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{M+1}} \text{ om } k_1 + k_2 = M$$

(b) Belastningen blir

$$1 - P(k_1 = 0) = 1 - \rho_1^0 \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1^{M+1}} = \frac{1 - \rho_1^{M+1} - 1 + \rho_1}{1 - \rho_1^{M+1}} = \frac{\rho_1 - \rho_1^{M+1}}{1 - \rho_1^{M+1}}$$

(c) Vi använder Littles sats på betjänares i nod 1. Belastningen på betjänares är detsamma som medelantalet jobb i betjänares. Littles sats ger då (om λ_1 är antal som blir färdigbetjänade per tidsenhet i nod 1)

$$1 - P(k_1 = 0) = \lambda_1 \cdot \frac{1}{\mu_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\rho_1 - \rho_1^{M+1}}{1 - \rho_1^{M+1}} \cdot \mu_1$$