Övning 7

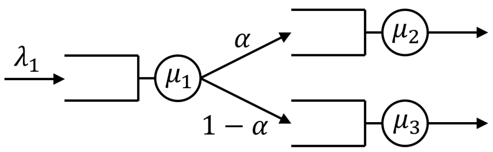
Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna beräkna medelantal kunder för alla köer i ett könät utan återkopplingar.
- Kunna beräkna medeltiden som en kund tillbringar i ett könät utan återkopplingar.

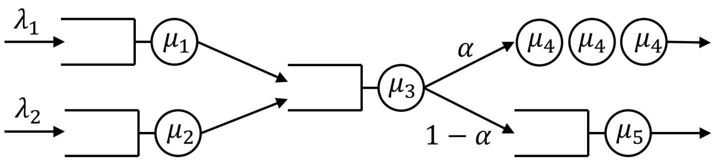
I denna övning kallas ett kösystem som ingår i ett könät oftast *nod*.

Problem

1. En enkel webbserver kan modelleras som könätet i figuren nedan. Systemet består av 3 stycken M/M/1-system med oändlig buffert. Nod i har betjäningsintensiteten μ_i. När ett jobb har blivit betjänat i nod 1, fortsätter det till nod 2 med sannolikheten α. Med sannolikheten $1-\alpha$ fortsätter jobbet till nod 3. Jobb som kommer till könätet kommer alltid till nod 1 i enlighet med en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 10$. Låt dessutom $\alpha = 0.7$, $\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 10$ samt $\mu_3 = 5$.
   (a) Vad blir $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$ för noderna?
   (b) Bestäm medelantal jobb i könätet.
   (c) Bestäm den totala medelväntetiden i buffertarna för ett godtyckligt jobb.



2. Ett system har modellerats med könätet nedan. Nod 1, 2, 3 och 5 har oändligt buffertutrymme. Nod 4 är ett upptagetsystem med tre betjänare. Alla betjäningstider är exponentialfördelade med medelvärde $1/\mu_i$ för nod i. Kunder kommer med intensiteterna λ_1 och λ_2. Låt $\lambda_1 = 4$ s^{-1}, $\lambda_2 = 2$ s^{-1}, $\mu_1 = \mu_2 = 5$ s^{-1}, $\mu_3 = 8$ s^{-1}, $\mu_4 = 2$ s^{-1}, $\mu_5 = 6$ s^{-1} och $\alpha = 2/3$.
   (a) Bestäm medelantal kunder i var och en av de fem noderna.
   (b) Bestäm medelantal kunder som spärras per sekund i nod 4.
   (c) Bestäm medeltiden i systemet för de kunder som inte spärras.
   (d) Hur lång är medelväntetiden i köerna för en godtycklig kund?



3. Ett system modelleras som ett könät med tre noder. Nod 1 och 2 är M/M/1-system, och nod 3 är ett upptagetsystem med 2 betjänare. Betjäningstiderna i de tre systemen är exponentialfördelade med medelvärdena $E(X_1)$, $E(X_2)$ respektive $E(X_3)$. Alla kunder som kommer till systemet går först till nod 1 (ankomstintensitet λ). När en kund är färdigbetjänad i nod 1 fortsätter den med sannolikheten β till nod 2 och med sannolikheten $1-\beta$ till nod 3. Efter betjäning i nod 2 eller 3 eller efter att ha spärrats i nod 3 lämnar kunden könätet. Låt $\lambda = 4$ per minut, $E(X_1) = 10$ sekunder, $E(X_2) = 30$ sekunder och $E(X_3) = 20$ sekunder samt $\beta = 0.2$.

   (a) Rita könätet

   (b) Vad blir ankomstintensiteten till nod 2 respektive nod 3?

   (c) Bestäm medelantal kunder i nod 1 respektive nod 2.

   (d) Bestäm hur många kunder som per minut avvisas från nod 3.

   (e) Bestäm medeltid i systemet för en kund som får full betjäning.

   (f) Bestäm den tid som en kund som får fullständig betjäning tillbringar i systemets buffertar.

4. Ett könät består av två noder. Nod 1 är ett M/M/1-system och nod 2 är ett upptagetsystem med 3 betjänare. Betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärdena $E(X_1)$ respektive $E(X_2)$. Alla kunder som kommer till könätet anländer till nod 1 med intensiteten λ. När de är färdigbetjänade där fortsätter de med sannolikheten $1 - \alpha$ till nod 2 och med sannolikheten α lämnar de könätet. En kund som är färdigbetjänad i nod 2 eller avvisas där lämnar könätet. Antag att $\lambda = 3$ per minut, $E(X_1) = 10$ sekunder, $E(X_2) = 60$ sekunder och $\alpha = 0.2$.

   (a) Bestäm ankomstintensiteten till nod 2.

   (b) Bestäm $P(k_1$ jobb i nod 1 och k_2 jobb i nod 2$)$.

   (c) Bestäm medelantal jobb i nod 1.

   (d) Bestäm sannolikheten att ett jobb som kommer till nod 2 avvisas.

   (e) Bestäm medelantal jobb i nod 2.

   (f) Bestäm hur många jobb per minut som i medeltal blir färdigbetjänade i nod 2.

5. Kunder kommer enligt en Poissonprocess till ett upptagetsystem med en betjänare. De kunder som får betjäning fortsätter till ett kösystem med en köplats och en betjänare. Antag att betjäningstiderna i bägge noderna är exponentialfördelade med medelvärde 1 sekund. Medeltiden mellan ankomsterna är 1 sekund.

   (a) Beräkna medelantalet kunder i nod 1 och nod 2.

   (b) Beräkna medeltiden som en kund som betjänas i nod 2 tillbringar i nod 2.

   (c) Är antalet kunder som finns i nod 1 och nod 2 oberoende av varandra?

Lösningar

1. (a) Först beräknar vi λ_i = ankomstintensiteten till nod i. Vi får

$$\lambda_1 = \lambda = 10$$

$$\lambda_2 = \alpha \cdot \lambda_1 = 7$$

$$\lambda_3 = (1-\alpha) \cdot \lambda_1 = 3$$

Nu får vi

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{7}{10}$$

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{3}{5}$$

(b) Vi börjar med att beräkna medelantal jobb i könätet för var och en av noderna och sedan summerar vi. Antag att N_i är antal kunder i nod i. Vi kan använda den vanliga formeln för medelantal kunder i ett M/M/1-system, vilket ger

$$E(N_1) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{2/3}{1-2/3} = 2$$

$$E(N_2) = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{7/10}{1-7/10} = \frac{7}{3}$$

$$E(N_3) = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = \frac{3/5}{1-3/5} = \frac{3}{2}$$

Det totala antalet kunder i könätet blir nu

$$E(N) = E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) = \frac{12}{6} + \frac{14}{6} + \frac{9}{6} = \frac{35}{6}$$

(c) Vi betraktar alla könätets buffertar som ett enda system och använder Littles sats. För att göra detta måste vi först beräkna medelantal kunder som köar i hela könätet. Om N_{qi} är antalet kunder som väntar i bufferten i nod i gäller

$$E(N_{qi}) = E(N_i) - E(N_{si}) = E(N_i) - \rho_i$$

där N_{si} är antalet kunder som betjänas i nod i, observera att N_{si} i detta fall är $= 0$ eller 1. Det ger

$$E(N_q) = E(N) - \rho_1 - \rho_2 - \rho_3 = \frac{35}{6} - \frac{4}{6} - \frac{7}{10} - \frac{3}{5} = \frac{58}{15}$$

Medeltiden som en godtycklig kund väntar i köerna blir då

$$\frac{E(N_q)}{\lambda} \approx 0.39 \text{ s}$$

2. (a) Vi får

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{4}{5} \Rightarrow E(N_1) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 4$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{2}{5} \Rightarrow E(N_2) = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{2}{3}$$

$$\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu_3} = \frac{3}{4} \Rightarrow E(N_3) = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = 3$$

$$\rho_4 = \frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{\lambda_3\alpha}{\mu_4} = 2 \Rightarrow E(N_4) = \rho_4(1-E_3(\rho_4)) \approx 1.58$$

$$\rho_5 = \frac{\lambda_5}{\mu_5} = \frac{\lambda_3(1-\alpha)}{\mu_5} = \frac{1}{3} \Rightarrow E(N_5) = \frac{\rho_5}{1-\rho_5} = \frac{1}{2}$$

(b)

$$\lambda_4 E_3(\rho_4) \approx 0.84$$

(c) Vi låter T_i vara tiden i nod i. Då är

$$E(T_1) = \frac{E(N_1)}{\lambda_1} = 1$$

$$E(T_2) = \frac{E(N_2)}{\lambda_2} \approx 0.333$$

$$E(T_3) = \frac{E(N_3)}{\lambda_3} = 0.5$$

$$E(T_4) = \frac{1}{\mu_4} = 0.5$$

$$E(T_5) = \frac{E(N_5)}{\lambda_5} = 0.25$$

En kund som inte spärras kan ta följande vägar genom systemet
Väg A : $1 \to 3 \to 4$
Väg B : $1 \to 3 \to 5$
Väg C : $2 \to 3 \to 4$
Väg D : $2 \to 3 \to 5$
Antag nu att Y = tiden som en kund som inte spärras befinner sig i könätet. Då gäller

$$E(Y|\text{tar väg A}) = T_1 + T_3 + T_4 = 2$$

$$E(Y|\text{tar väg B}) = T_1 + T_3 + T_5 = 1.75$$

$$E(Y|\text{tar väg C}) = T_2 + T_3 + T_4 = 1.333$$

$$E(Y|\text{tar väg D}) = T_2 + T_3 + T_5 = 1.083$$

Låt nu Λ_i vara antal kunder per sekund som tar väg i. Då får vi

$$\Lambda_A = \lambda_1\alpha(1-E_3(\rho_4)) \approx 2.105$$

$$\Lambda_B = \lambda_1(1-\alpha) \approx 1.333$$

$$\Lambda_C = \lambda_2\alpha(1 - E_3(\rho_4)) \approx 1.053$$

$$\Lambda_D = \lambda_2(1 - \alpha) \approx 0.667$$

Vi får då

$$P(\text{tar väg } i) = \frac{\Lambda_i}{\Lambda_A + \Lambda_B + \Lambda_C + \Lambda_D}$$

Sedan kan vi ta bort betinget och få

$$E(Y) = \sum_{i\in\{A,B,C,D\}} E(Y|\text{tar väg } i)P(\text{tar väg } i) \approx 1.7$$

(d) Låt W vara den totala kötiden för en godtycklig kund. Littles sats medför att

$$E(W) = \frac{E(N_{qtot})}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Där N_{qtot} är det totala antalet köande kunder i könätet. Nu gäller

$$E(N_{q1}) = E(N_1) - \rho_1 = 3.2$$

$$E(N_{q2}) = E(N_2) - \rho_2 \approx 0.267$$

$$E(N_{q3}) = E(N_3) - \rho_3 = 2.25$$

$$E(N_{q4}) = 0$$

$$E(N_{q5}) = E(N_5) - \rho_5 \approx 0.167$$

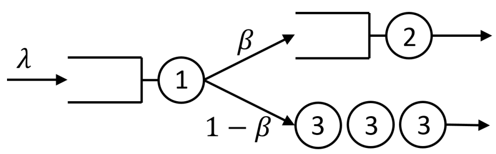
vilket medför att

$$E(N_{qtot}) \approx 5.88$$

och slutligen

$$E(W) \approx 0.98 \text{ s}$$

3. (a) Könätet ser ut så här:



(b) Om λ_i är ankomstintensiteten till nod i så får vi

$$\lambda_2 = \beta\lambda = 0.8 \text{ min}^{-1}$$

$$\lambda_3 = (1 - \beta)\lambda = 3.2 \text{ min}^{-1}$$

(c) Vi kan räkna på nod 1 och 2 som om de vore M/M/1-system vilket ger

$$\rho_1 = \lambda\overline{x}_1 = 4 \cdot \frac{10}{60} \Rightarrow E(N_1) = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = 2$$

$$\rho_2 = \lambda_2\overline{x}_2 = 0.8 \cdot \frac{30}{60} = 0.4 \Rightarrow E(N_2) = \frac{\rho_2}{1 - \rho_2} = \frac{2}{3}$$

(d) Medelantal avvisade per minut blir

$$\lambda_3 E_2(\rho_3) = 3.2 \cdot E_2(3.2 \cdot \frac{20}{60}) \approx 0.69$$

(e) Det finns två vägar genom systemet, väg A som går från 1 till 2 och väg B som går från 1 till 3. Medeltiden som en kund tillbringar i de olika noderna är

$$E(T_1) = \frac{E(N_1)}{\lambda} = 0.5$$
$$E(T_2) = \frac{E(N_2)}{\lambda_2} \approx 0.83$$
$$E(T_3) = E(X_3) = \frac{1}{3}$$

Medelantal kunder som betjänas under en minut är λ_2 för nod 2 och $\lambda_3^{eff} = \lambda_3(1 - E_2(\rho_3))$ för nod 3. Således blir medeltiden i systemet för en godtycklig kund som betjänas färdigt

$$(E(T_1) + E(T_2))\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_3^{eff}} + (E(T_1) + E(T_3))\frac{\lambda_3^{eff}}{\lambda_2 + \lambda_3^{eff}} \approx 0.95$$

(f) Medeltiden som en kund tillbringar med att vänta i nod i är

$$E(W_{q1}) = \frac{E(N_1) - \rho_1}{\lambda} = \frac{1}{3}$$
$$E(W_{q2}) = \frac{E(N_2) - \rho_2}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$$
$$E(W_{q3}) = 0$$

På samma sätt som vi får i f-uppgiften får vi att medeltiden som en godtycklig kund som betjänas tillbringar med att vänta i buffertarna är

$$\begin{aligned} E(W_q) &= (E(W_{q1}) + E(W_{q2}))\frac{\lambda_2}{\lambda_3^{eff} + \lambda_2} + (E(W_{q1}) + E(W_{q3}))\frac{\lambda_3^{eff}}{\lambda_3^{eff} + \lambda_2} \\ &= E(W_{q1}) + E(W_{q2})\frac{\lambda_2}{\lambda_3^{eff} + \lambda_2} \approx \frac{24.8}{60} \text{ min} \end{aligned}$$

4. (a)

$$\lambda_2 = \lambda(1 - \alpha) = 2.4 \text{ min}^{-1}$$

(b) Eftersom vi har en Poissonprocess ut från nod 1 så kommer antalet kunder i systemen att vara oberoende av varandra. Det ger

$$P(k_1, k_2) = \rho_1^{k_1}(1 - \rho_1) \cdot \frac{\rho_2^{k_2}/k_2!}{1 + \rho_2 + \rho_2^2/2 + \rho_2^3/3!}$$

(c)

$$E(N_1) = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = 1$$

(d)

$$E_3(\rho_2) = E_3(2.4) \approx 0.27$$

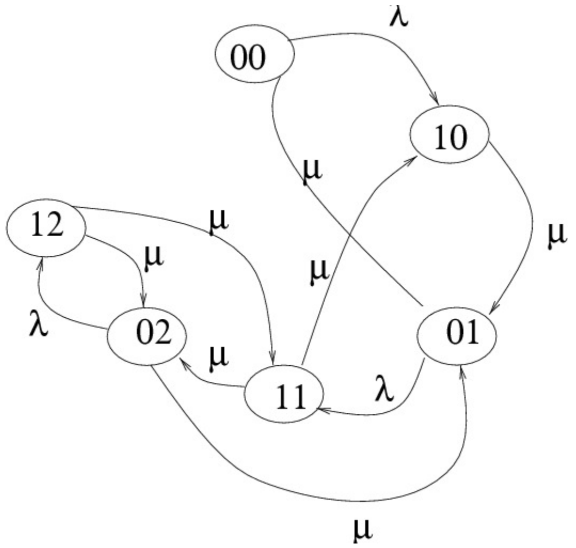
(e)

$$\rho_2(1 - E_3(\rho_2)) \approx 1.76$$

(f)

$$\lambda_2(1 - E_3(\rho_2)) \approx 1.76 \text{ min}^{-1}$$

5. (a) Vi börjar med att rita upp en Markovkedja som beskriver systemet. Vi låter tillstånd ij betyda att det finns i kunder i upptagetsystemet och j kunder i väntsystemet. Då får vi Markovkedjan nedan.



Använder vi flöde-in flöde-ut-metoden på denna Markovkedja och utnyttjar att $\lambda = \mu = 1$ så får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} p_{00} = p_{01} \\ p_{10} = p_{00} + p_{11} \\ 2p_{01} = p_{02} + p_{10} \\ 2p_{11} = p_{12} + p_{01} \\ 2p_{02} = p_{12} + p_{11} \\ 2p_{12} = p_{02} \end{cases}$$

Om vi också använder oss av att summan av alla sannolikheter måste vara 1 så ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} p_{00} = \frac{5}{24} \\ p_{01} = \frac{5}{24} \\ p_{10} = \frac{8}{24} \\ p_{11} = \frac{3}{24} \\ p_{02} = \frac{2}{24} \\ p_{12} = \frac{1}{24} \end{cases}$$

Definitionen av medelvärde ger sedan

$$E(N_1) = 1 \cdot (p_{10} + p_{11} + p_{12}) = 0.5$$

$$E(N_2) = 1 \cdot (p_{01} + p_{11}) + 2 \cdot (p_{02} + p_{12}) = 1.75$$

(b) Först måste vi beräkna λ_2^{eff}. För att göra detta använder vi ett trick. Vi kan beräkna medelantalet kunder i nod 2:s betjänare dels med Littles sats, dels med definitionen. Om vi gör det får vi

$$\lambda_2^{eff} \cdot \frac{1}{\mu} = 1 \cdot (p_{01} + p_{02} + p_{11} + p_{12}) \Rightarrow \lambda_2^{eff} = \frac{11}{24}$$

Nu kan vi använda Littles sats, vilken ger att medeltiden i nod 2 blir

$$\frac{E(N_2)}{\lambda_2^{eff}} = \frac{42}{11}$$

(c) Nej, vi har inte oberoende. Om vi till exempel sätter $p_i(k)$ = sannolikheten att antalet kunder i nod i är k så är

$$p_{00} \neq p_1(0)p_2(0)$$

vilket innebär att vi ej har oberoende.