Övning 6

Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna beräkna medelantal kunder i ett M/G/1-system.
- Kunna beräkna medeltiden som en kund tillbringar i ett M/G/1-system.

Problem

1. För alla fördelningar nedan, beräkna medelantal kunder i systemet, medelantal kunder i kön, medelantal kunder i betjänaren och medeltiden i systemet. Medelbetjäningstiden är i alla fall 1 sekund. Gör detta för $\rho = 0.5$ och för $\rho = 0.9$.
   (a) M/M/1
   (b) M/D/1
   (c) M/E_2/1
   (d) M/H_2/1 med $V(X) = 2$
2. Vi har ett M/G/1-system där ankomstintensiteten är 10 kunder per timme. Att betjäna en kund tar en exponentialfördelad tid med medelvärdet 5 minuter. Nu förändrar vi betjänaren så att medelbetjäningstiden ökar med 10% och betjäningstidens varians minskar med 40%. Blir medeltiden i systemet för en kund längre eller kortare?
3. Antag att vi har ett M/G/1*upptagetsystem. Medelbetjäningstiden är $E(X)$ och ankomstintensiteten är λ. Bestäm sannolikheten att betjänaren är upptagen respektive ledig. Ledning: Fundera över hur lång medeltiden från det att betjänaren blir upptagen tills den blir ledig igen är. Gör samma sak för tiden från det att den blir ledig tills den blir upptagen igen.
4. För ett M/G/1-system är Laplacetransformen för väntetiden i kön
$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}$$
   Utgå från denna transform och visa att för medelväntetiden i kön $E(W)$ gäller att
$$E(W) = \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)}$$
   där $E(X^2)$ är andramomentet för betjäningstiden.

Lösningar

1. Vi använder att följande gäller för M/G/1-system
$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(X^2)}{2(1-\rho)}$$
$$E(N_s) = \lambda E(X) = \rho$$

$$E(N_q) = E(N) - E(N_s) = E(N) - \rho$$

Medelantalet kunder i betjänaren blir 0.5 respektive 0.9 för $\rho = 0.5$ respektive 0.9. Det gäller för all fördelningarna. Medeltiderna som det frågas efter kan beräknas med Littles sats. Observera att $\lambda_{\text{eff}} = \lambda$ eftersom det finns oändligt många köplatser i ett M/G/1-system.

(a) Här är betjäningstiden exponentialfördelad med medelvärde

$$E(X) = \frac{1}{\mu}$$

Andramomentet för en exponentialfördelning är

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \lim_{s \to 0} \frac{d^2 F^*(s)}{ds^2} = \lim_{s \to 0} \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\mu}{\mu + s} \right) = \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{2\mu}{(\mu + s)^3} = \frac{2}{\mu^2} \end{aligned}$$

I vårt fall är ju $\mu = 1$ eftersom medelbetjäningstiden är $= 1$. Det ger

$$E(X^2) = 2$$

För $\rho = 0.5$, dvs $\lambda = 0.5$ får vi

$$E(N) = 0.5 + \frac{0.5^2 \cdot 2}{2(1 - 0.5)} = 1$$

$$E(N_q) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1}{0.5} = 2$$

För $\rho = 0.9$, dvs $\lambda = 0.9$ får vi

$$E(N) = 0.9 + \frac{0.9^2 \cdot 2}{2(1 - 0.9)} = 9$$

$$E(N_q) = 9 - 0.9 = 8.1$$

$$E(T) = \frac{N}{\lambda} = \frac{9}{0.9} = 10$$

Detta hade vi också kunnat beräkna med formlerna som vi redan har för M/M/1.

(b) Här är betjäningstiden alltid är lika lång, i det här fallet en sekund. Om en deterministis fördelningen har $a = E(X)$ så är dess frekvensfunktion

$$f_X(t) = \delta(t - a)$$

eftersom all sannolikhetsmassa är samlad i punkten $t = a$. Laplacetransformen för en deterministisk fördelning blir

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-as}$$

Det ger att

$$E(X) = -\lim_{s\to 0} \frac{d}{ds} e^{-as} = -\lim_{s\to 0} -ae^{-as} = a$$

och

$$E(X^2) = \lim_{s\to 0} \frac{d^2}{ds^2} e^{-as} = \lim_{s\to 0} a^2 e^{-as} = a^2$$

I vårt fall blir då $E(X^2) = a^2 = 1$ eftersom $1 = E(X) = a$. Insättning i formlerna för M/G/1 ger nu för $\rho = 0.5$

$$E(N) = 0.5 + \frac{0.5^2 \cdot 1}{2(1-0.5)} = 0.75$$

$$E(N_q) = 0.75 - 0.5 = 0.25$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{0.75}{0.5} = 1.5$$

För $\rho = 0.9$ får vi

$$E(N) = 0.9 + \frac{0.9^2 \cdot 1}{2(1-0.9)} = 4.95$$

$$E(N_q) = 4.95 - 0.9 = 4.05$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{4.95}{0.9} = 5.5$$

(c) En E_2-fördelning är summan av två exponentialfördelningar med samma medelvärde. Om den ska ha medelvärde = 1 så har den laplacetransformen

$$F^*(s) = \left(\frac{2}{2+s}\right)^2 = 4(2+s)^{-2}$$

Derivering två gånger ger då:

$$\frac{d^2 F^*(s)}{ds^2} = 4 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (2+s)^{-4} \to 1.5 \text{ då } s \to 0$$

Det ger

$$E(X^2) = 1.5$$

Insättning i formlerna för M/G/1 ger nu för $\rho = 0.5$

$$E(N) = 0.5 + \frac{0.5^2 \cdot 1.5}{2(1-0.5)} = 0.875$$

$$E(N_q) = 0.875 - 0.5 = 0.375$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{0.875}{0.5} = 1.75$$

För $\rho = 0.9$ får vi

$$E(N) = 0.9 + \frac{0.9^2 \cdot 1.5}{2(1-0.9)} = 6.975$$

$$E(N_q) = 6.975 - 0.9 = 6.075$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{6.975}{0.9} = 7.75$$

(d) Här får vi veta att $V(X) = 2$. Det leder till

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 2 + 1 = 3$$

eftersom $E^2(X) = 1$. Insättning i formlerna för M/G/1 ger nu för $\rho = 0.5$

$$E(N) = 0.5 + \frac{0.5^2 \cdot 3}{2(1-0.5)} = 1.25$$

$$E(N_q) = 1.25 - 0.5 = 0.75$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

För $\rho = 0.9$ får vi

$$E(N) = 0.9 + \frac{0.9^2 \cdot 3}{2(1-0.9)} = 13.05$$

$$E(N_q) = 13.05 - 0.9 = 12.15$$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{13.05}{0.9} = 14.5$$

2. Vi använder medelantal kunder i systemet som ett mått på hur bra det är. Innan systemet ändrades var

$$E(X) = \frac{1}{12}\ \mathrm{h}^{-1} \Rightarrow \rho = \lambda E(X) = \frac{10}{12} \Rightarrow E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} = 5$$

Vi kan ju använda formlerna för M/M/1. Antag nu att den stokastiska variabeln Y är betjäningstiden efter ändringen. Då gäller

$$E(Y) = E(X) \cdot 1.1 = \frac{1.1}{12}\ \mathrm{h}^{-1}$$

Variansen för X är

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2E^2(X) - E^2(X) = E^2(X) = \frac{1}{144}$$

Observera att $E(X^2) = 2E^2(X)$ enbart gäller för exponentialfördelningen. Se tal 1a i denna övning för en härledning av detta! Detta ger att

$$V(Y) = \frac{1}{144} \cdot 0.6 \Rightarrow E(Y^2) = V(Y) + E^2(Y) = \frac{0.6}{144} + \frac{1.21}{144} = \frac{1.81}{144}$$

Det nya värdet på ρ blir

$$\rho = \lambda E(Y) = \frac{11}{12}$$

Nu kan vi beräkna medelantalet kunder efter förändringen

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(Y^2)}{2(1-\rho)} = \frac{11}{12} + \frac{10^2(1.81/144)}{2(1-11/12)} \approx 8.5$$

Det blir alltså fler kunder i systemet vilket innebär att tiden i systemet i medeltal blir längre.

3. Tiden från det att betjänaren blir upptagen tills den blir ledig motsvarar en betjäningstid eftersom det inte finns någon kö. Tiden från det att betjänaren blir ledig tills den blir upptagen igen är exponentialfördelad med medelvärde $1/\lambda$. Den andel av tiden som betjänaren är upptagen blir då
$$\frac{E(X)}{E(X)+1/\lambda} = \frac{\lambda E(X)}{\lambda E(X)+1} = \frac{\rho}{\rho+1}$$
Den andel av tiden som betjänaren är ledig blir då
$$\frac{1/\lambda}{E(X)+1/\lambda} = \frac{1}{\rho+1}$$
Observera att man inte kan avända Markovkedjor i denna uppgift. Det får man bara göra när också betjäningstiderna är exponentialfördelade. Man kan inte heller använda teorin för M/G/1-system eftersom den bara fungerar för oöndligt många köplatser.

4. Denna uppgift kan lösas på flera sätt. Vi använder serieutveckling (Maclaurinutveckling). För en godtycklig kontinuerlig stokastisk variabel Y måste det gälla att
$$F_Y^*(s) = 1 - E(Y)s + \frac{1}{2}E(Y^2)s^2 + o(s^3)$$
eftersom
$$\frac{d}{ds}F_Y^*(s) \to -E(Y) \text{ då } s \to 0$$
och
$$\frac{d^2}{ds^2}F_Y^*(s) \to E(Y^2) \text{ då } s \to 0$$
Tillämpat på $W^*(s)$ och $B^*(s)$ ger det
$$W^*(s) = 1 - E(W)s + O(s^2)$$
och
$$B^*(s) = 1 - E(X)s + \frac{1}{2}E(X^2)s^2 + o(s^3)$$
Vi skriver om sambandet mellan $W^*(s)$ och $B^*(s)$ som
$$W^*(s)\left[s - \lambda + \lambda B^*(s)\right] = s(1-\rho)$$
Sätter vi sedan in serieutvecklingarna så får vi
$$\left[1 - E(W)s + o(s^2)\right]\left[s - \lambda + \lambda\left(1 - E(X)s + \frac{1}{2}E(X^2)s^2 + o(s^3)\right)\right] = s(1-\rho)$$
vilket efter lite algebra blir
$$s(1-\rho) + \left(\frac{1}{2}E(X^2) - E(W)(1-\rho)\right)s^2 + o(s^3) = s(1-\rho)$$
Detta kan bara vara sant för alla s om koefficienten framför s^2 är $= 0$ vilket ger
$$\frac{1}{2}\lambda E(X^2) - E(W)(1-\rho) = 0 \Rightarrow E(W) = \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)}$$
Ett annat sätt är att lösa denna uppgift är att derivera $W^*(s)$ och låta $s \to 0$.