Övning 5

Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna beräkna $P(\text{spärr})$ för system med begränsat antal kunder och köplatser.
- Kunna beräkna λ_{eff}.
- Kunna beräkna medelantal upptagna betjänare.

Problem

1. Antag att vi kan modellera ett system som ett M/M/2-system med en köplats. Det kommer kunder med intensiteten 3 s^{-1}. Det tar i medeltal 1 sekund att betjäna en kund.
   (a) Rita Markovkedjan för systemet.
   (b) Bestäm $P(\text{spärr})$.
   (c) Bestäm medelantal upptagna betjänare.
   (d) Bestäm utnyttjningen av varje betjänare.

2. Ett kösystem betjänar 4 kunder. Det finns två betjänare och en köplats. En kund som inte betjänas eller väntar i kön skickar jobb till systemet med intensiteten 1 s^{-1}. Betjäningstiderna är exponentialfördelade med medelvärde 1 s.
   (a) Bestäm tillståndsfördelningen (det vill säga alla p_k).
   (b) Bestäm medelantal kunder i kön.
   (c) Bestäm $P(\text{spärr})$.
   (d) Hur många kunder betjänas i medel per sekund?

3. I ett upptagetsystem finns det 3 betjänare. Ett jobb blir färdigbetjänat efter en exponentialfördelad tid med medelvärde 1 sekund. Till systemet finns 4 källor anslutna. Varje källa skickar jobb i enlighet med en Poissonprocess med intensiteten 2 s^{-1} om det inte finns något jobb från källan i upptagetsystemet. Om det finns ett jobb från källan i upptagetsystemet skickar källan inte några jobb.
   (a) Vad blir $P(\text{spärr})$ för detta system?
   (b) Vad blir medelantal upptagna betjänare i detta system?
   (c) Hur många jobb avvisas i medeltal under en timme?

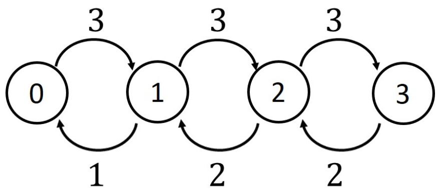
4. Lös följande uppgifter för ett M/M/1-system med ankomstintensitet λ s^{-1} och betjäningsintensitet μ s^{-1}.
   (a) Antag att systemet är tomt vid tidpunkten $t = 20$. Beräkna sannolikheten att det vid tidpunkten $t = 22$ har anlänt minst en kund till systemet.
   (b) Antag att en kund lämnar ett tomt system efter sig. Hur lång tid i medel befinner sig systemet i detta tomma tillstånd?

5. Vi har ett upptagetsystem med 100 betjänare där Erlangfördelningen antas gälla. Mätningar visar att alla betjänarna var upptagna i sammanlagt 72.3 sekunder under en timma. Under denna timma var exakt 99 betjänare upptagna under sammanlagt 82.2 sekunder. Uppskatta $\rho = \lambda/\mu$ under denna timma.

6. För ett M/M/1-system, beräkna medeltiden i systemet för kunder som inte kommer till ett tomt system.

Lösningar

1. (a) Markovkedjan blir



(b) Vi använder snittmetoden för att beräkna p_k. Ekvationerna blir

$$3p_0 = p_1 \Rightarrow p_1 = 3p_0$$

$$3p_1 = 2p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{3p_1}{2} = \frac{9p_0}{2}$$

$$3p_2 = 2p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{3p_2}{2} = \frac{27p_0}{4}$$

Vi bestämmer p_0 genom att summan av alla sannolikheter ska vara $= 1$

$$p_0\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4}\right) = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{4}{61}$$

Eftersom ankomstintensiteten inte beror på i vilket tillstånd systemet befinner sig så blir $P(\text{spärr})$

$$p_3 = \frac{27}{61}$$

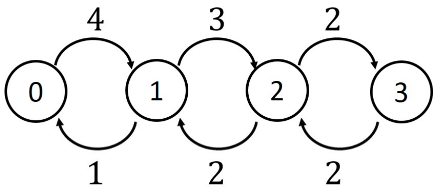
(c) Medelantal upptagna betjänare blir

$$\lambda_{\text{eff}} E(X) = \lambda(1 - p_3)E(X) = 3 \cdot \left(1 - \frac{27}{61}\right) \cdot 1 = \frac{102}{61} \approx 1.7$$

(d) Utnyttjningen av varje betjänare blir

$$\frac{\text{medelantal upptagna betjänare}}{\text{antal betjänare}} = \frac{51}{61} \approx 0.85$$

2. (a) Tillståndsdiagrammet ser ut så här



Tillståndsekvationerna blir

$$4p_0 = p_1 \Rightarrow p_1 = 4p_0$$

$$3p_1 = 2p_2 \Rightarrow p_2 = 6p_0$$

$$2p_2 = 2p_3 \Rightarrow p_3 = 6p_0$$

Att summan av sannolikheterna ska vara $= 1$ ger

$$p_0 = \frac{1}{1+4+6+6} = \frac{1}{17}$$

Således är

$$p_0 = \frac{1}{17}$$

$$p_1 = \frac{4}{17}$$

$$p_2 = \frac{6}{17}$$

$$p_3 = \frac{6}{17}$$

(b) Vi använder definitionen av medelvärde. Den ger

$$E(N) = \sum_{k=0}^{3} kp_k = 1 \cdot \frac{4}{17} + 2 \cdot \frac{6}{17} + 3 \cdot \frac{6}{17} = \frac{34}{17} = 2$$

Medelantal kunder som finns i betjänarna är

$$E(N_s) = \sum_{k=1}^{2} kP(\text{ i betjänarna}) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3) = \frac{28}{17}$$

Slutligen får vi medelantal kunder som väntar i kön

$$E(N_q) = E(N) - E(N_s) = 2 - \frac{28}{17} = \frac{6}{17}$$

Man kan också direkt räkna ut medelantal kunder i kön på följande sätt:

$$E(N_q) = 0 \cdot P(0 \text{ kunder i kön}) + 1 \cdot P(1 \text{ kund i kön}) = p_3 = \frac{6}{17}$$

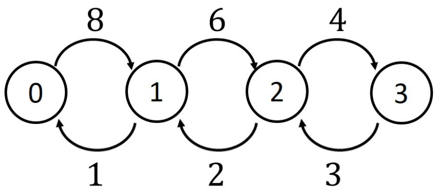
(c) $P(\text{spärr})$ blir

$$\frac{\lambda_3 p_3}{\sum_{k=0}^{3} \lambda_k p_k} = \frac{1 \cdot p_3}{4 \cdot p_0 + 3 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3} = \frac{3}{17}$$

(d) Antalet kunder som betjänas per sekund är detsamma som λ_{eff}. Vi får

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_{k=0}^{2} \lambda_k p_k = 4p_0 + 3p_1 + 2p_2 = \frac{28}{17}$$

3. (a) Markovkedjan ser ut så här



Vi ställer upp tillståndsekvationerna. Det ger

$$p_1 = 8p_0$$

$$2p_2 = 6p_1 \Rightarrow p_2 = 3p_1 = 24p_0$$

$$3p_3 = 4p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{4p_2}{3} = 32p_0$$

Vi bestämmer på vanligt sätt p_0:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 8 + 24 + 32} = \frac{1}{65}$$

$P(\text{spärr})$ blir

$$\frac{\lambda_3 p_3}{\sum_{k=0}^{3} \lambda_k p_k} = \frac{2p_3}{8p_0 + 6p_1 + 4p_2 + 2p_3} = \frac{8}{27} \approx 0.30$$

(b) Medelantal upptagna betjänare är

$$1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = \frac{152}{65} \approx 2.34$$

(c) Varje sekund avvisas i medel $\lambda_3 p_3$ kunder, så medelantalet avvisade kunder under en timme blir

$$3600 \cdot \lambda_3 p_3 \approx 3540$$

4. (a) Sannolikheten att det har anlänt minst en kund är lika med sannolikheten att tiden till nästa ankomst är mindre än två sekunder. Eftersom ankomstprocessen är en Poissonprocess så är tiden till nästa ankomst alltid exponentialfördelad med intensiteten λ. Sannolikheten att tiden till nästa ankomst (kalla den X) är mindre än två sekunder är

$$P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - e^{-\lambda \cdot 2}$$

(b) Eftersom ankomstprocessen är en Poissonprocess så är tiden till nästa ankomst alltid exponentialfördelad med medelvärde

$$\frac{1}{\lambda}$$

5. Antag att p_k är sannolikheten att det finns k kunder i systemet. Då gäller

$$p_k = \frac{\rho^k/k!}{\sum_{i=0}^{100} \rho^i/i}$$

Men p_k är också den andel av tiden som det finns k kunder i systemet. Det innebär att

$$p_{100} = \frac{\rho^{100}/100!}{\sum_{i=0}^{100} \rho^i/i} = \frac{72.3}{3600}$$

$$p_{99} = \frac{\rho^{99}/99!}{\sum_{i=0}^{100} \rho^i/i} = \frac{82.2}{3600}$$

Vi dividerar

$$\frac{p_{100}}{p_{99}} = \frac{\rho^{100}/100!}{\rho^{99}/99!} = \frac{72.3}{82.2}$$

Lite hyfsning ger nu

$$\frac{\rho}{100} = \frac{72.3}{82.2} \Rightarrow \rho \approx 88$$

6. Vi använder beting för att lösa denna uppgift. Låt T vara tiden som en kund tillbringar i systemet. T är då en stokastisk variabel. Eftersom detta är ett M/M/1-system så vet vi att

$$E(T) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Låt oss nu betinga på att systemet är tomt respektive icke tomt. Det vi vill beräkna är $E(T|\text{ej tomt})$. En kund som kommer till ett tomt system börjar omedelbart att betjänas och då blir medeltiden i systemet detsamma som medelbetjäningstiden dvs

$$E(T|\text{tomt}) = \frac{1}{\mu}$$

Dessutom vet vi att

$$P(\text{tomt}) = p_0 = 1 - \rho$$

och

$$P(\text{ej tomt}) = 1 - p_0 = \rho$$

Formeln för att ta bort beting ser ut så här i detta fall

$$E(T) = E(T|\text{tomt})P(\text{tomt}) + E(T|\text{ej tomt})P(\text{ej tomt})$$

Nu sätter vi in allt vi redan känner till. Då får vi

$$\frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\mu}(1 - \rho) + E(T|\text{ej tomt})\rho$$

Lite algebra ger sedan att

$$E(T|\text{ej tomt}) = \frac{2\rho - \rho^2}{\lambda(1 - \rho)}$$