Övning 4

Vad du ska kunna efter denna övning

- Kunna beräkna spärren i ett M/M/m*upptagetsystem.
- Kunna beräkna den medelantal upptagna betjänare i ett M/M/m*upptagetsystem.
- Känna till begreppet *utnyttjning* av en betjänare och beräkna den.

Problem

1. Antag att vi har ett M/M/m*upptagetsystem.
   (a) Bestäm det minsta värde på m för vilket spärren är mindre än 1% för $\rho = 5$, 10 respektive 20.
   (b) Antag att man väljer vilken av de lediga betjänarna som ska användas av en kund helt slumpmässigt. Vad blir utnyttjningen av en betjänare i fallen ovan?

2. För ett M/M/10*upptagetsystem är $\rho = 5$. Låt p_k vara sannolikheten att det finns k kunder i systemet. Beräkna p_{10}, p_9 och p_8.

3. Vi har två M/M/m*upptagetsystem, i bägge är medelbetjäningstiden = 1. För det ena är $\lambda = 3$ och för det andra är $\lambda = 6$.
   (a) Bestäm det minsta antal betjänare som behövs i vart och ett av systemen för att spärren ska vara mindre än 1%. Beräkna också utnyttjningen av betjänarna i dessa system.
   (b) Antag att ett M/M/m*upptagetsystem (med medelbetjäningstid 1) har ankomstintensiteten $\lambda = 9$, det vill säga summan av ankomstintensiteterna i uppgift a. Beräkna det minsta antal betjänare som behövs för att spärren ska vara mindre än 1%. Beräkna utnyttjningen av betjänarna.

4. Betrakta ett M/M/100*upptagetsystem med $\rho = 70.5$. Låt som vanligt p_k = sannolikheten att k betjänare är upptagna. Finn det värde på k för vilket p_k är störst, det vill säga finn det troligaste antalet kunder i systemet.

5. Till ett kösystem med en betjänare kommer två olika slags kunder. Kunderna av typ 1 anländer med intensiteten λ_1. För dem fungerar systemet som ett M/M/1*upptagetsystem, det vill säga är betjänaren upptagen så spärras kunderna. Kunderna av typ 2 kommer med intensiteten λ_2. För dem fungerar systemet som ett M/M/1-system med oändligt stor kö. Bägge typerna av kunder har betjäningsintensiteten μ.
   (a) Rita tillståndsdiagram och bestäm p_k = sannolikheten för k kunder i kösystemet.
   (b) Beräkna hur många kunder som i medeltal spärras per tidsenhet.

6. Betrakta ett upptagetsystem med två betjänare. Till systemet kommer kunder av två typer. Kunder av typ 1 kommer med intensiteten λ_1 och kan enbart betjänas av betjänare 1. Om betjänare 1 är upptagen så spärras de. Kunder av typ 2 kommer med intensiteten λ_2. De kan betjänas av både betjänare 1 och 2. Om båda betjänarna är lediga när en kund av typ 2 kommer så väljer kunden alltid betjänare 2, om betjänare 2 är upptagen och 1 ledig så väljer den betjänare 1. Betjäningsintensiteten är μ för alla kunder. Vi antar också att ankomsterna bildar Poissonprocesser och att betjäningstiderna är exponentialfördelade.

   (a) Definiera lämpliga tillstånd och rita tillståndsdiagram.

   (b) Antag att $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu = 1$. Beräkna utnyttjningen av betjänare 1 och betjänare 2.

   (c) Beräkna hur många kunder av typ 1 respektive typ 2 som i medeltal finns i systemet för de numeriska värdena i b ovan.

7. Ett upptagetsystem med m_1 har ankomstintensitet λ. Om en kund avvisas i detta system fortsätter den till ett annat upptagetsystem med m_2 betjänare. Antag att ankomsterna till det första systemet bildar en Poissonprocess och att betjäningstiderna är exponentialfördelade med samma medelvärde i båda systemen. Bestäm medelantal upptagna betjänare i det andra systemet.

8. Antag att vi har ett M/M/m*upptagetsystem med ankomstintensitet λ och betjäningsintensitet μ. Beräkna medeltiden från det att en spärrperiod slutar tills nästa spärrperiod börjar. Spärrperiod = tiden från det att systemet blir fullt tills det inte längre är fullt.

Lösningar till övning 4

1. (a) Vi tittar i Erlangtabellerna som finns längst bak i läroboken. Vi ser att

$$\begin{array}{l} E_{11}(5) \approx 0.008 < 0.01 \text{ och } E_{10}(5) \approx 0.018 > 0.01 \\ E_{18}(10) \approx 0.007 < 0.01 \text{ och } E_{17}(10) \approx 0.013 > 0.01 \\ E_{30}(20) \approx 0.008 < 0.01 \text{ och } E_{29}(20) \approx 0.013 > 0.01 \end{array}$$

   Svaret är således 11, 18 respektive 30 betjänare

   (b) Utnyttjningen blir

$$\frac{\text{medelantal upptagna betjänare}}{\text{antal betjänare}} = \frac{\rho(1 - E_m(\rho))}{m}$$

   För de tre fallen ovan får vi

$$\frac{5(1 - E_{11}(5))}{11} \approx 0.45$$

$$\frac{10(1 - E_{18}(10))}{18} \approx 0.55$$

$$\frac{20(1 - E_{30}(20))}{30} \approx 0.66$$

2. Vi observerar först att $p_{10} = E_{10}(5) = 0.018385$. Värdet kan man slå upp i Erlangtabellerna längst bak i läroboken. För att beräkna p_9 och p_8 så använder vi att

$$p_k = \frac{\rho^k/k!}{\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!}} = \frac{\rho}{k} \cdot \frac{\rho^{k-1}/(k-1)!}{\sum_{i=0}^m \frac{\rho^i}{i!}} = \frac{\rho}{k} \cdot p_{k-1}$$

det vill säga

$$p_{k-1} = \frac{k}{\rho} \cdot p_k$$

Nu får vi slutligen

$$p_{10} = 0.018385$$
$$p_9 = \frac{10}{5} \cdot p_{10} = 0.03677$$
$$p_8 = \frac{9}{5} \cdot p_9 = 0.066186$$

3. (a) Erlangtabellerna ger att det behövs 8 betjänare i systemet som har $\lambda = 3$. Utnyttjningen blir då

$$\frac{3(1 - E_8(3))}{8} \approx 0.37$$

För systemet som som har $\lambda = 6$ behövs 13 betjänare. Då blir utnyttjningen

$$\frac{6(1 - E_{13}(6))}{13} \approx 0.46$$

(b) Om nu ett system i stället har $\lambda = 9$ så behövs det 17 betjänare vilket ger utnyttjningen

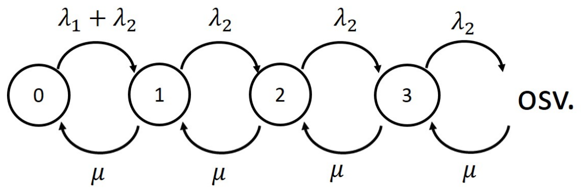
$$\frac{9(1 - E_{17}(9))}{17} \approx 0.53$$

4. Vi vet att

$$p_k = \frac{\rho^k/k!}{\sum_{i=0}^{100} \rho^i/i!} = \frac{\rho}{k} \cdot p_{k-1} \text{ för } k \geq 0$$

Det innebär att följden $p_0, p_1, \ldots, p_{100}$ kommer att vara ökande så länge $\rho/k > 1$ och därefter blir den minskande. I vårt fall antas det största värdet för p_k när $k = 70$.

5. (a) Markovkedjan kommer att se ut så här:



Tillståndsekvationerna blir

$$(\lambda_1 + \lambda_2)p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu} p_0 = (\rho_1 + \rho_2)p_0$$

$$\lambda_2 p_1 = \mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_2}{\mu} p_1 = (\rho_1 + \rho_2)\rho_2 p_0$$

$$\lambda_2 p_2 = \mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu} p_2 = (\rho_1 + \rho_2)\rho_2^2 p_0$$

där $\rho_i = \lambda_i/\mu$. Man ser enkelt att

$$p_k = (\rho_1 + \rho_2)\rho_2^{k-1} p_0 \text{ för } k \geq 1$$

Vi använder att summan av alla sannolikheter måste vara = 1 för att bestämma p_0

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k &= p_0 \left[1 + (\rho_1 + \rho_2) + (\rho_1 + \rho_2)\rho_2 + (\rho_1 + \rho_2)\rho_2^2 + \cdots\right] = \\
&= p_0 \left[1 + (\rho_1 + \rho_2)(1 + \rho_2 + \rho_2^2 + \cdots)\right] \\
&= p_0 \left[1 + (\rho_1 + \rho_2)\frac{1}{1 - \rho_2}\right] \\
&= p_0 \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_2}
\end{aligned}$$

Slutligen får vi

$$p_0 = \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_1}$$

$$p_k = (\rho_1 + \rho_2)\rho_2^{k-1} \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_1} \text{ för } k \geq 1$$

(b) Det är bara kunder av typ 1 som spärras. När det finns en kund eller fler så spärras de. Ankomstintensiteten av typ 1-kunder är alltid densamma. Därför blir intensiteteten med vilken typ 1-kunder spärras

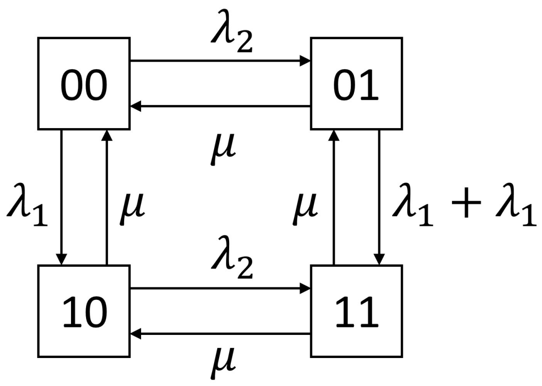
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \lambda_1 (1 - p_0) = \lambda_1 \cdot \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 + \rho_1}$$

Observera att detta gäller enbart då $\rho_2 < 1$. Om $\rho_2 \geq 1$ så gäller inte härledningen av p_0 i a-delen av uppgiften för då kan vi inte summera den oändliga serien

$$\sum_{i=1}^{\infty} \rho_2^i$$

Försök att fundera ut vad spärrsannolikheten blir om $\rho_2 \geq 1$. Svar finns på sista sidan i övningen.

6. (a) Vi definierar att tillstånd i, j = i kunder i betjänare 1 och j kunder i betjänare 2. Då ser tillståndsdiagrammet ut så här



(b) Vi ställer upp tillståndsekvationerna med hjälp av flöde-in flöde-ut-metoden. Det ger

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)p_{00} &= \mu p_{01}+\mu p_{10}\\(\mu+\lambda_2)p_{10} &= \lambda_1 p_{00}+\mu p_{11}\\2\mu p_{11} &= (\lambda_1+\lambda_2)p_{01}+\lambda_2 p_{10}\\(\lambda_1+\lambda_2+\mu)p_{01} &= \lambda_2 p_{00}+\mu p_{11}\end{aligned}$$

Sätter vi nu in $\lambda_1=\lambda_2=\mu=1$ så får vi

$$\begin{aligned}2p_{00} &= p_{01}+p_{10}\\2p_{10} &= p_{00}+p_{11}\\2p_{11} &= 2p_{01}+p_{10}\\3p_{01} &= p_{00}+p_{11}\end{aligned}$$

Vilken har lösningarna

$$\begin{aligned}p_{00} &= 5t\\p_{10} &= 6t\\p_{11} &= 7t\\p_{01} &= 4t\end{aligned}$$

t är ett godtyckligt tal. För att bestämma t så utnyttjar vi att summan av alla sannolikheter ska vara $=1$, vilket ger

$$t(5+6+7+4)=1 \Rightarrow t=\frac{1}{22}$$

Således blir

$$\begin{aligned}p_{00} &= 5/22\\p_{10} &= 6/22\\p_{11} &= 7/22\\p_{01} &= 4/22\end{aligned}$$

Utnyttjningen av en betjänare är detsamma som sannolikheten att den är upptagen. Här får vi

$$P(\text{betjänare 1 är upptagen})=p_{10}+p_{11}=\frac{13}{22}$$

$$P(\text{betjänare 2 är upptagen}) = p_{01} + p_{11} = \frac{11}{22}$$

(c) Först beräknar vi λ_{eff} för de två typerna av kunder och sedan använder vi Littles sats. Observera att medeltiden i systemet är samma som en medelbetjäningstid $= 1/\mu$. För kunder av typ 1 får vi

$$\lambda_{eff} = \lambda_1(p_{00} + p_{01}) = \frac{9}{22}$$
$$\Rightarrow$$
$$E(\text{antal kunder av typ 1}) = \lambda_{eff} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{9}{22}$$

För kunder av typ 2 får vi

$$\lambda_{eff} = \lambda_1(p_{00} + p_{01} + p_{10}) = \frac{15}{22}$$
$$\Rightarrow$$
$$E(\text{antal kunder av typ 2}) = \lambda_{eff} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{15}{22}$$

7. Medelantal upptagna betjänare i hela systemet blir

$$\rho(1 - E_{m_1+m_2}(\rho))$$

Medelantal upptagna betjänare i delsystem 1 blir

$$\rho(1 - E_{m_1}(\rho))$$

Medelantal upptagna betjänare delsystem 2 blir skillnaden mellan medelantalet i hela systemet och medelantalet i delsystem 1 det vill säga

$$\rho(1 - E_{m_1+m_2}(\rho)) - \rho(1 - E_{m_1}(\rho))$$

8. Antag att medellängden av en spärrperiod är S och att medeltiden mellan två spärrperioder är I. Det vi ska beräkna är alltså I. Spärrsannolikheten $E_m(\rho)$ är detsamma som andelen av tiden som alla betjänarna är upptagna. Det ger

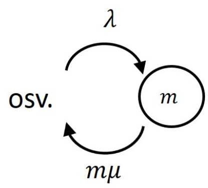
$$\frac{S}{S+I} = E_m(\rho) \Rightarrow I = \frac{S(1 - E_m(\rho))}{E_m(\rho)}$$

För ett M/M/m*upptagetsystem så är medellängden av en spärrperiod detsamma som medeltiden som man tillbringar i sista tillståndet i Markovkedjan. I det tillståndet finns det en utpil som det står $m\mu$ på (se figur nedan). Medeltiden i ett sådant tillstånd är

$$S = \frac{1}{m\mu}$$

Slutligen får vi

$$I = \frac{1 - E_m(\rho)}{m\mu E_m(\rho)}$$



Svar på fråga till uppgift 5: Om $\rho_2 \geq 1$ så går antalet kunder av typ 2 i kösystemet mot oändligheten. Då är betjänaren alltid upptagen vilket innebär att kunder av typ 1 alltid spärras. Så deras spärrsannolikhet blir 1.