Övning 3

Vad du ska kunna efter denna övning

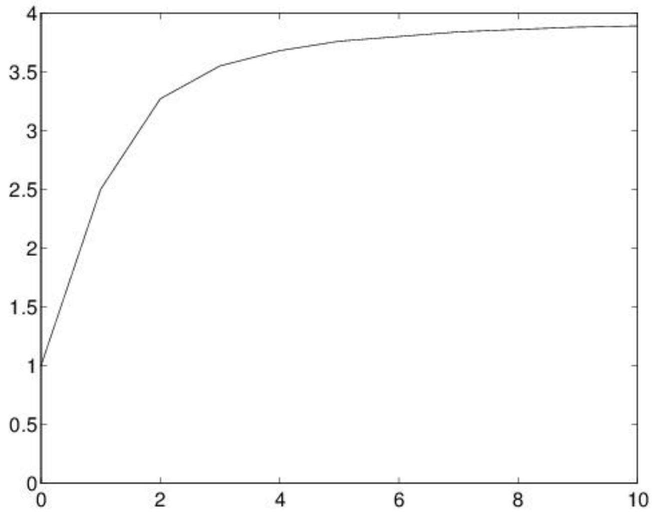
- Kunna dra slutsatser om ett systems betjäningstider och antalet köplatser genom att tolka diagram.
- Kunna beräkna medeltid i systemet och spärrsannolikhet när antalet kunder är begränsat och/eller antalet platser i kösystemet är begränsat.

Problem

1. Antag att vi har ett M/M/1-system med två buffertplatser och fyra kunder. Antag vidare att ankomstintensiteten för en ledig kund är β s^{-1} , samt att betjäningsintensiteten är μ s^{-1}.
   (a) Rita tillståndsdiagram.
   (b) Beräkna medelantal upptagna betjänare.
   (c) Beräkna sannolikheten att en kund spärras.
   (d) Beräkna hur många kunder som i medeltal betjänas per sekund.
2. Antag att vi kan modellera ett system som ett M/M/2-system med sex kunder och en buffertplats. När en kund har fått ett svar från systemet så tänker kunden i medeltal 1 s innan hen skickar ett nytt jobb till systemet. Medelbetjäningstiden är 0.5 s.
   (a) Rita Markovkedjan för detta system.
   (b) Bestäm tillståndsfördelningen.
   (c) Bestäm spärrsannolikheten.
   (d) Bestäm medelantal upptagna betjänare.
   (e) Bestäm hur många kunder som i medeltal spärras per sekund.
3. Ankomstintensiteten till ett M/M/1-system är λ. Vid varje ankomst kommer två kunder till systemet. Betjänaren behandlar kunderna en och en med intensiteten μ.
   (a) Rita tillståndsdiagram och ställ upp ekvationerna för p_k med hjälp av snittmetoden.
   (b) Bestäm z-transformen för antalet kunder i systemet utgående från ekvationerna i a).
   (c) Beräkna medelantal kunder i systemet.
4. I denna uppgift skall vi analysera en webbserver. Nya jobb, dvs http-requests, kommer enligt en Poissonprocess med λ s^{-1}. Servern modelleras som en betjänare med en begränsad buffert med K platser. Jobben behandlas enligt First-Come-First-Served. Medelbetjäningstiden är $E(X)$ s. I diagrammet nedan visas den uppmätta tiden i systemet, $E(T)$, (i sekunder) för jobb som inte spärras som en funktion av ankomstintensiteten. Bestäm följande från diagrammet:

(a) Medelbetjäningstiden för ett godtyckligt jobb, dvs $E(X)$.

(b) Antalet köplatser, dvs K.



5. Betrakta ett M/M/∞-system där kunder kommer i grupper om två. Det kommer i medeltal λ grupper per sekund. Kunderna betjänas en och en och betjäningsintensiteten är μ.

   (a) Rita Markovkedjan för systemet och ställ upp tillståndsekvationerna.

   (b) Bestäm den differentialekvation som måste lösas för att få fram z-transformen för antalet kunder i systemet genom att först multiplicera tillståndsekvationerna med z^k och sedan addera dem.

   (c) Visa att $P(z) = Ce^{\lambda(z+z^2/2)/\mu}$ är en lösning till differentialekvationen.

   (d) Bestäm C.

   (e) Bestäm medelantal kunder i systemet.

   (f) Vilken relation måste råda mellan λ och μ för att systemet ska vara stabilt?

6. Kunderna som befinner sig i kön i ett M/M/1-system med K buffertplatser blir otåliga. Så länge en kund befinner sig i kön lämnar den kön utan att få betjäning med intensiteten $\mu/2$. Ankomstintensiteten är λ och betjäningsintensiteten är μ.

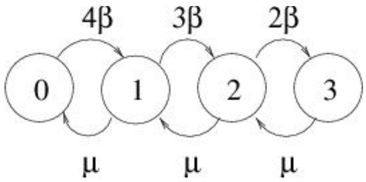
   (a) Bestäm tillståndssannolikheterna.

   (b) Beräkna medelantalet spärrade ankomster per tidsenhet.

   (c) Beräkna medelantalet avgångar utan betjäning från systemet per tidsenhet.

Lösningar till övning 3

1. (a) Markovkedjan blir



(b) Vi använder snittmetoden och inför $\alpha = \beta/\mu$. Det ger

$$\begin{aligned}
4\beta p_0 &= \mu p_1 \Rightarrow p_1 = 4\alpha p_0 \\
3\beta p_1 &= \mu p_2 \Rightarrow p_2 = 12\alpha^2 p_0 \\
2\beta p_2 &= \mu p_3 \Rightarrow p_3 = 24\alpha^3 p_0
\end{aligned}$$

Sedan utnyttjar vi att summan av alla sannolikheter ska vara $= 1$ för att bestämma p_0

$$p_0 = \frac{1}{1 + 4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}$$

Nu får vi medelantal upptagna betjänare som

$$E(N_s) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (p_1 + p_2 + p_3) = \frac{4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}{1 + 4\alpha + 12\alpha^2 + 24\alpha^3}$$

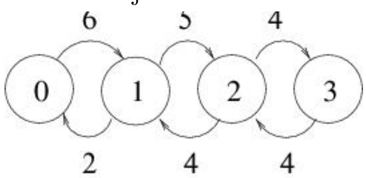
(c) Sannolikheten att en kund spärras blir

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_3 p_3}{\sum_{k=0}^{3} \lambda_k p_k} &= \frac{\beta 24\alpha^3 p_0}{4\beta \cdot p_0 + 3\beta \cdot 4\alpha p_0 + 2\beta \cdot 12\alpha^2 p_0 + \beta \cdot 24\alpha^3 p_0} \\
&= \frac{24\alpha^3}{4 + 12\alpha + 24\alpha^2 + 24\alpha^3}
\end{aligned}$$

(d) Antal kunder som betjänas per sekund är

$$\lambda_{\text{eff}} = 4\beta p_0 + 3\beta p_1 + 2\beta p_2$$

2. (a) Markovkedjan ser ut så här:



(b) Vi ställer upp tillståndsekvationerna med hjälp av snittmetoden

$$\begin{aligned}
6p_0 &= 2p_1 \\
5p_1 &= 4p_2 \\
4p_2 &= 4p_3
\end{aligned}$$

Löser vi dessa ekvationer (med hjälp av att $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$) så får vi

$$\begin{aligned}
p_0 &= 4/46 \\
p_1 &= 12/46 \\
p_2 &= 15/46 \\
p_3 &= 15/46
\end{aligned}$$

(c) Sannolikheten för spärr blir

$$\frac{\lambda_3 p_3}{\sum_{k=0}^{3} \lambda_k p_k} = \frac{45}{189} \approx 0.24$$

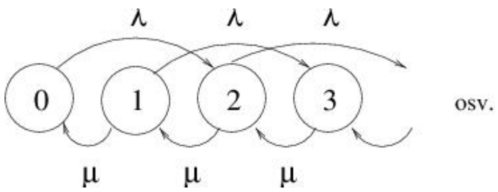
(d) Medelantal upptagna betjänare kan vi beräkna med hjälp av definitionen av medelvärde, så här:

$$\begin{aligned} E(N_s) &= 0 \cdot P(0 \text{ upptagna betjänare}) + \\ &\quad +1 \cdot P(1 \text{ upptagen betjänare}) + \\ &\quad +2 \cdot P(2 \text{ upptagna betjänare}) = \\ &= p_1 + 2(p_2 + p_3) = \\ &= \frac{72}{46} \approx 1.57 \end{aligned}$$

(e) Medelvärdet av antalet kunder som spärras per sekund blir

$$\lambda_3 p_3 = 3 \cdot \frac{15}{46} = 0.98$$

3. (a) Markovkedjan blir



Vi använder snittmetoden. Observera att alla snitt utom det första skär av tre bågar i Markovkedjan. Därför är det två termer i högerledet utom i första ekvationen. Vi får

$$\begin{aligned} \mu p_1 &= \lambda p_0 \\ \mu p_2 &= \lambda(p_0 + p_1) \\ \mu p_3 &= \lambda(p_1 + p_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

(b) Multiplicera ekvation k ovan med z^k. Det ger

$$\begin{aligned} \mu p_1 z &= \lambda p_0 z \\ \mu p_2 z^2 &= \lambda(p_0 + p_1) z^2 \\ \mu p_3 z^3 &= \lambda(p_1 + p_2) z^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Om vi adderar alla ekvationer får vi

$$\mu \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_k = \lambda \left(p_0 z + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+2} p_k + \sum_{k=1}^{\infty} z^{k+1} p_k \right)$$

Definitionen av z-transform är

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$$

vilket insatt i ekvationen ovan ger

$$\mu(P(z) - p_0) = \lambda(p_0 z + z^2 P(z) + z(P(z) - p_0))$$

Löser man ut $P(z)$ så får man

$$P(z) = \frac{\mu p_0}{\mu - \lambda z - \lambda z^2}$$

För att bestämma p_0 så observerar vi att för z-transformen måste gälla

$$P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

I vårt fall måste då gälla att

$$P(1) = \frac{\mu p_0}{\mu - 2\lambda} = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{\mu - 2\lambda}{\mu} = 1 - \frac{2\lambda}{\mu}$$

Slutligen får vi

$$P(z) = \frac{\mu}{\mu - \lambda z - \lambda z^2} \cdot \left(1 - \frac{2\lambda}{\mu}\right)$$

(c) För att bestämma medelvärdet deriverar vi först $P(z)$

$$P'(z) = \frac{\mu p_0(\lambda + 2\lambda z)}{(\mu - \lambda z - \lambda z^2)^2}$$

Därefter får vi medelvärdet genom att låta $z \to 1$

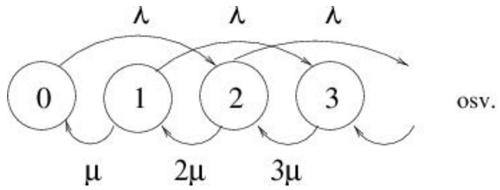
$$E(N) = \lim_{z \to 1} P'(z) = \frac{\mu p_0(\lambda + 2\lambda)}{(\mu - 2\lambda)^2} = \frac{3\lambda}{\mu - 2\lambda}$$

4. (a) När ankomstintensiteten är mycket låg så kommer tiden i systemet för en kund nästan alltid att vara = betjäningstiden. Därför kan vi lösa av medelbetjäningstiden genom att se vad medeltiden i systemet är när ankomstintensiteten är mycket liten. Ur diagrammet (vid $\lambda = 0$) ser vi att medelbetjäningstiden = $E(X)$ är 1 sekund.

(b) När ankomstintensiteten är mycket hög så kommer systemet nästan alltid att vara fullt. En kund som kommer in i systemet hamnar nästan alltid på den sista köplatsen. Kunden måste alltså först vänta på att de L kunderna före honom ska bli färdiga innan han börjar betjänas. Därefter ska kunden själv betjänas innan han lämnar systemet. Det betyder att kunden i medeltal tillbringar tiden $(L + 1)E(X)$ i systmet. Om vi tittar i diagrammet ser vi att för mycket stora värden på ankomstintensiteten så är medeltiden i systemet 4 sekunder. Det betyder att

$$(L + 1)E(X) = 4 \Rightarrow L = 3$$

5. (a) Markovkedjan blir



Snittmetoden ger tillståndsekvationerna

$$\begin{aligned}
\mu p_1 &= \lambda p_0 \\
2\mu p_2 &= \lambda(p_0 + p_1) \\
3\mu p_3 &= \lambda(p_1 + p_2) \\
4\mu p_4 &= \lambda(p_2 + p_3) \\
&\vdots \\
k\mu p_k &= \lambda(p_{k-2} + p_{k-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(b) Vi multiplicerar ekvation k med z^k vilket ger

$$\begin{aligned}
\mu p_1 z &= \lambda p_0 z \\
2\mu p_2 z^2 &= \lambda(p_0 + p_1) z^2 \\
3\mu p_3 z^3 &= \lambda(p_1 + p_2) z^3 \\
4\mu p_4 z^4 &= \lambda(p_2 + p_3) z^4 \\
&\vdots \\
k\mu p_k z^k &= \lambda(p_{k-2} + p_{k-1}) z^k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Därefter summerar vi alla ekvationerna. Resultatet är

$$\mu z \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1} = \lambda \left[p_0 z + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + z \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \right]$$

Vi observerar att

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1}$$

Insatt ovan ger det

$$\mu z P'(z) = \lambda z \left[p_0 + z P(z) + P(z) - p_0 \right] = \lambda z (1 + z) P(z)$$

Differentialekvationen är således efter hyfsning

$$\mu P'(z) = \lambda (1 + z) P(z)$$

(c) Deriverar man $P(z) = C e^{\lambda(z + z^2/2)/\mu}$ så blir resultatet

$$P'(z) = \frac{C\lambda(1 + z) e^{\lambda(z + z^2/2)/\mu}}{\mu}$$

Insättning visar att differentialekvationen satisfieras.

(d) För att bestämma värdet på C använder vi att $P(z) \to 1$ då $z \to 1$. Det ger

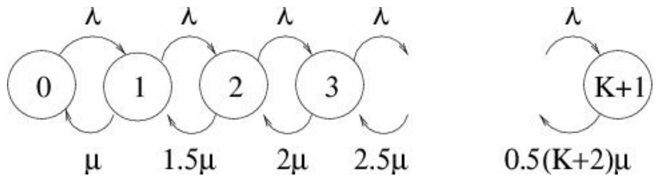
$$Ce^{\lambda(1+1/2)/\mu} = 1 \Rightarrow C = e^{-1.5\lambda/\mu}$$

(e) Vi deriverar $P(z)$ och låter sedan $z \to 1$ för att bestämma medelantal kunder:

$$\lim_{z\to 1} P'(z) = C \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot 2 \cdot e^{1.5\lambda/\mu} = \frac{2\lambda}{\mu}$$

(f) Eftersom det finns oändligt många betjänare så är systemet stabilt. Det finns inget värde på λ för vilket medelantal kunder $\to \infty$.

6. (a) Markovkedjan blir



Om vi sätter $\rho = \lambda/\mu$ så ger snittmetoden för $k \geq 0$

$$\lambda p_{k-1} = \frac{(k+1)\mu}{2} p_k \Rightarrow p_k = \frac{2\rho p_{k-1}}{k+1} = \frac{(2\rho)^2 p_{k-2}}{(k+1)k} = \ldots = \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} p_0$$

Sedan bestämmer vi p_0

$$\sum_{k=0}^{K+1} \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \left(\sum_{k=0}^{K+1} \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

Denna summa kan inte förenklas. Svaret blir således

$$p_k = \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} \left(\sum_{k=0}^{K+1} \frac{(2\rho)^k}{(k+1)!} \right)^{-1}$$

(b) Medelantalet spärrade ankomster per tidsenhet blir λp_{K+1}.

(c) Om det befinner sig k ($k \geq 1$) kunder i systemet så finns det $k-1$ kunder i kön. Var och en av dessa kunder lämnar kön med intensiteten $\mu/2$, så den sammanlagda intensiteten med vilken kunder lämnar systemet innan de har kommit fram till betjänaren är då

$$\frac{(k-1)\mu}{2}$$

Det innebär att medelvärdet av antal kunder som per tidsenhet lämnar systemet för att de blir otåliga blir

$$\sum_{k=1}^{K+1} \frac{(k-1)\mu}{2} p_k$$