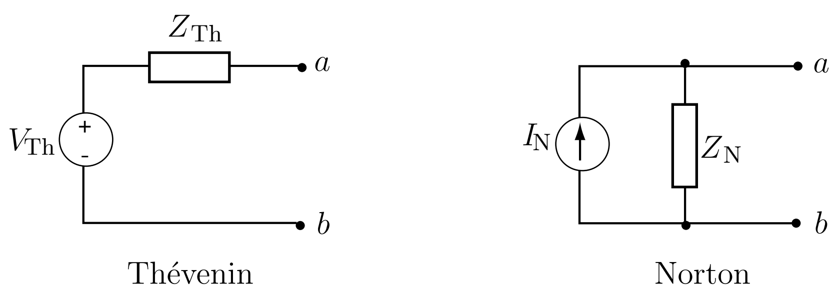
Formelsamling i kretsteori

Elektrovetenskap
Lunds tekniska högskola
Mars 2006

Komplexvärden

- Realdelskonvention: $v(t) = \mathrm{Re}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ och $i(t) = \mathrm{Re}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.
- Imaginärdelskonvention: $v(t) = \mathrm{Im}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ och $i(t) = \mathrm{Im}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.

Tvåpolsekvivalenter



Komplex effekt

$$S = \frac{1}{2}VI^* = P + \mathrm{j}Q = |S|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$$

$S =$ komplex effekt [VA]

$|S| =$ skenbar effekt [VA]

$P = \mathrm{Re}\, S =$ aktiv effekt (=tidsmedelvärdet av effektförbrukningen) [W]

$Q = \mathrm{Im}\, S =$ reaktiv effekt $[\mathrm{VA_r}] = [\mathrm{VAR}]$

$\cos\varphi =$ effektfaktor

Effektanpassningsregeln

$$Z_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{i}}^* \quad \text{och} \quad \max\{P_{\mathrm{L}}\} = \frac{|V|^2}{8R_{\mathrm{i}}}.$$

Ömsesidig induktans

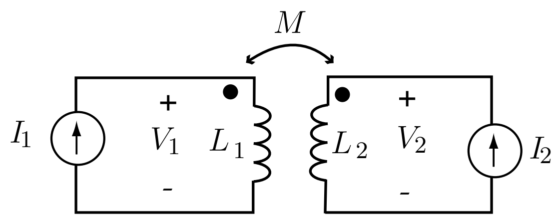
$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \\ V_2 = \mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 \end{cases}$$

$L_1,\ L_2 =$ självinduktanser

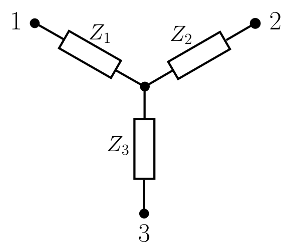
$M =$ ömsesidig induktans

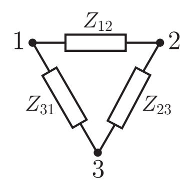
$M = k\sqrt{L_1 L_2}$ där $0 \leq k \leq 1$

$k =$ kopplingsfaktorn



Nätverkstransformation

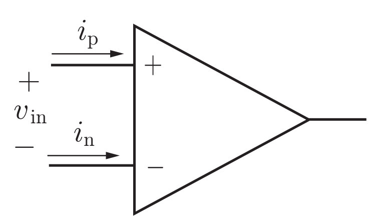




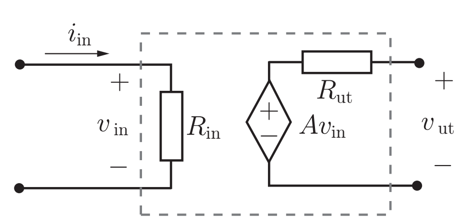
Y till △	△ till Y
$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_3}$	$Z_1 = \dfrac{Z_{31} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$
$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \dfrac{Z_2 Z_3}{Z_1}$	$Z_2 = \dfrac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$
$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \dfrac{Z_3 Z_1}{Z_2}$	$Z_3 = \dfrac{Z_{23} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$

Ideal operationsförstärkare (OP)

För en ideal OP är $i_\mathrm{p} = i_\mathrm{n} = 0$. Vi använder vanligtvis negativ återkoppling där också $v_\mathrm{in} = 0$.



Kretsmodell av spänningsförstärkare



Dioder

Shockleyekvationen

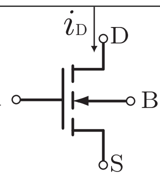
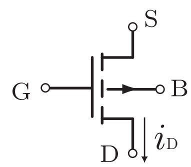
$$i_\mathrm{D} = I_\mathrm{s}\left(\mathrm{e}^{\frac{v_\mathrm{D}}{nV_\mathrm{T}}} - 1\right)$$

där $V_\mathrm{T} = \frac{kT}{q}$, $q \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ C och $k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

Dynamisk resistans

$$r_\mathrm{d} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{D}}{\mathrm{d}v_\mathrm{D}}\right|_Q}$$

MOSFET

	NMOS	PMOS
Kretssymbol		
$KP \approx$	$50\,\mu\mathrm{AV}^{-2}$	$25\,\mu\mathrm{AV}^{-2}$
K	$\frac{KP}{2}\frac{W}{L}$	$\frac{KP}{2}\frac{W}{L}$
$V_\mathrm{t0} \approx$	+1 V	-1 V
Strypt område (cutoff)	$v_\mathrm{GS} \le V_\mathrm{t0}$, $i_\mathrm{D} = 0$	$v_\mathrm{GS} \ge V_\mathrm{t0}$, $i_\mathrm{D} = 0$
Triodområde	$v_\mathrm{GS} \ge V_\mathrm{t0}$, $0 \le v_\mathrm{DS} \le v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0}$, $i_\mathrm{D} = K\big(2(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0})v_\mathrm{DS} - v_\mathrm{DS}^2\big)$	$v_\mathrm{GS} \le V_\mathrm{t0}$, $0 \ge v_\mathrm{DS} \ge v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0}$, $i_\mathrm{D} = K\big(2(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0})v_\mathrm{DS} - v_\mathrm{DS}^2\big)$
Mättnads-område	$v_\mathrm{GS} \ge V_\mathrm{t0}$, $v_\mathrm{DS} \ge v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0}$, $i_\mathrm{D} = K(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0})^2$	$v_\mathrm{GS} \le V_\mathrm{t0}$, $v_\mathrm{DS} \le v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0}$, $i_\mathrm{D} = K(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0})^2$
v_DS, v_GS	Vanligtvis positiva	Vanligtvis negativa

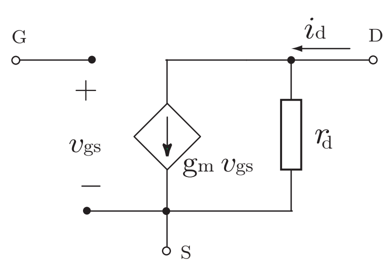
Småsignalmodell

Småsignalmodell för en FET, där

$$g_\mathrm{m} = \left.\frac{\partial i_\mathrm{D}}{\partial v_\mathrm{GS}}\right|_\mathrm{arbetspunkt}$$

och

$$\frac{1}{r_\mathrm{d}} = \left.\frac{\partial i_\mathrm{D}}{\partial v_\mathrm{DS}}\right|_\mathrm{arbetspunkt}$$



Trigonometriska formler

$\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$

$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha-\beta) \text{ där } \cos\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha}-e^{-j\alpha}}{2j}$$

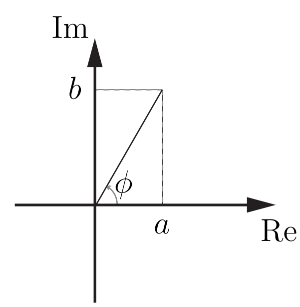
$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

Komplexa tal

$$z = a + jb = |z|e^{j\phi}$$

där

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{och om } a > 0 \text{ är} \quad \phi = \arctan\frac{b}{a}$$



Ekvationssystem (2×2)

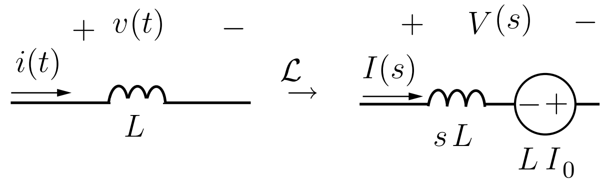
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

med lösning

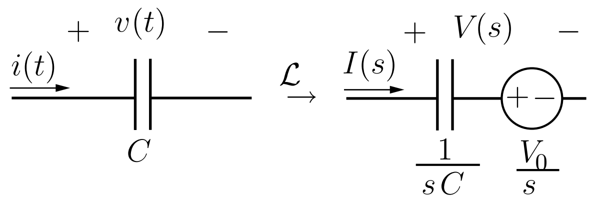
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

Laplacetransformen

Spole med $i(0^-) = I_0$:
$V(s) = L(sI(s) - I_0)$



Kondensator med $v(0^-) = V_0$:
$I(s) = C(sV(s) - V_0)$



Allmänna satser

$f(t)$	$F(s)$
$Kf(t)$	$KF(s)$
$f_1(t) + f_2(t) - f_3(t) + \cdots$	$F_1(s) + F_2(s) - F_3(s) + \cdots$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0^-) - \frac{df(0^-)}{dt}$
$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0^-) - s^{n-2}\frac{df(0^-)}{dt}$ $-s^{n-3}\frac{d^2f(0^-)}{dt} - \cdots - \frac{d^{n-1}f(0^-)}{dt}$
$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(s)}{s}$
$f(t-a)u(t-a), a > 0$	$e^{-as}F(s)$
$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
$tf(t)$	$-\frac{dF(s)}{ds}$
$t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)du$

Begynnelsevärdessatsen $\lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Slutvärdessatsen $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

TABELL ÖVER LAPLACETRANSFORMER

	Laplacetransformen:	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt.$	
1.	$\delta(t)$	1	
2.	$\delta^{(n)}(t)$	s^n	$(n = 1, 2, 3, \ldots)$
3.	$u(t)$, enhetssteget	$\frac{1}{s}$	
4.	$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$(n = 1, 2, 3, \ldots)$
5.	$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	
6.	$\frac{t^n}{n!} \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$	$(n = 1, 2, 3, \ldots)$
7.	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	
8.	$\frac{ae^{-at} - be^{-bt}}{a-b} \cdot u(t)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$	
9.	$\sin(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	
10.	$\cos(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	
11.	$[\sin(\beta t) - \beta t \cdot \cos(\beta t)] \cdot u(t)$	$\frac{2\beta^3}{(s^2+\beta^2)^2}$	
12.	$\beta t \cdot \sin(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{2\beta^2 s}{(s^2+\beta^2)^2}$	
13.	$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	
14.	$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \cdot u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	

Fouriertransformer för elementära funktioner

$f(t)$	$F(\omega)$
$\delta(t)$ (impuls)	1
A (konstant)	$2\pi A\delta(\omega)$
sgn (t) (signum)	$2/j\omega$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
$e^{at}u(-t)$	$1/(a - j\omega)$
$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$

Allmänna satser för fouriertransformer

$f(t)$	$F(\omega)$
$Kf(t)$	$KF(\omega)$
$f_1(t) - f_2(t) + f_3(t)$	$F_1(\omega) - F_2(\omega) + F_3(\omega)$
$d^n f(t)/dt^n$	$(j\omega)^n F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$	$F(\omega)/j\omega$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$
$f(t - a)$	$e^{-j\omega a}f(t)$
$e^{j\omega_0 t}f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
$f(t)\cos\omega_0 t$	$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda)d\lambda$	$X(\omega)H(\omega)$
$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(u)F_2(\omega - u)\ du$
$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

TRANSMISSIONSLEDNINGAR

Ledningsekvationerna, förlustfri dubbelledning

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial z} &= L\,\frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial z} &= C\,\frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}$$

Allmän lösning, förlustfri dubbelledning

$$\begin{aligned} v &= v^+(z - v_\mathrm{p}t) + v^-(z + v_\mathrm{p}t) \\ i &= \frac{1}{Z_0}v^+(z - v_\mathrm{p}t) - \frac{1}{Z_0}v^-(z + v_\mathrm{p}t) \end{aligned}$$

$$v_\mathrm{p} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad LC = \mu_r\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0$$

Ledningsekvationerna, sinusformigt tidsberoende

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{dz} &= RI + \mathrm{j}\omega LI \\ -\frac{dI}{dz} &= GV + \mathrm{j}\omega CV \end{aligned}$$

Allmän lösning, sinusformigt tidsberoende

$$\begin{aligned} V(z) &= V_1e^{-\gamma z} + V_2e^{\gamma z} \\ I(z) &= \frac{1}{Z_0}(V_1e^{-\gamma z} - V_2e^{\gamma z}) \end{aligned}$$

Utbredningskonstant

$$\gamma = \sqrt{(R + \mathrm{j}\omega L)(G + \mathrm{j}\omega C)}$$

Karakteristisk impedans

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + \mathrm{j}\omega L}{G + \mathrm{j}\omega C}}$$

Impedansen för en dubbelledning med längden l avslutad med Z_L

$$Z_{in} = Z_0\frac{Z_L + Z_0\tanh\gamma l}{Z_0 + Z_L\tanh\gamma l}$$

Impedansen för en förlustfri ledning med längden l avslutad med Z_L

$$Z_{in} = Z_0\frac{Z_L\cos(\beta l) + \mathrm{j}Z_0\sin(\beta l)}{Z_0\cos(\beta l) + \mathrm{j}Z_L\sin(\beta l)}$$

Reflektionsfaktorn för spänning vid belastningen

$$\Gamma = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Bode diagram