Lösningar till Övningsuppgifter

Digital Signal Processing

Övningar med svar och lösningar

Mikael Swartling Nedelko Grbic Bengt Mandersson

rev. 2017

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

Introduktion

Lösning 1.2

Periodisk om det finns ett N så $\cos(\omega(n+N)) = \cos(\omega n)$ för alla n. N är fundamental period om $\omega = 2\pi \frac{k}{N}$ där k och N är heltal och saknar gemensamma faktorer.

a) $\cos(0.01\pi n) = \cos(0.01\pi(n+200))$, periodisk. $\cos(0.01\pi n) = \cos\left(2\pi n \frac{1}{200}\right)$ så $\frac{k}{N} = \frac{1}{200}$ ger $N = 200$.

b) Periodisk, $N = 7$.

c) Periodisk, $N = 2$.

d) $\sin(3n) = \sin(3(n+N))$ om $3N = 2\pi p$ och p heltal. Då kan ej N vara heltal, ej periodisk.

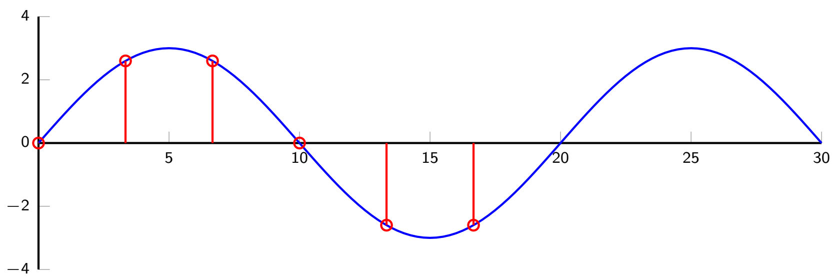
e) Periodisk, $N = 10$.

Lösning 1.5

a) Se c).

b) $x(n) = x_a(nT) = 3\sin(2\pi nT \cdot 50) = 3\sin(2\pi n \cdot \frac{50}{300}) = 3\sin(2\pi n \cdot \frac{1}{6})$. Periodisk med perioden $N = 6$ och frekvensen $f = 1/6$.

c) $N = 6$ och $T = 1/300$, så $T_p = NT = 0.02\,\mathrm{s}$.



d) $x(0) = 0$ och $x(1) = 3 = 3\sin\left(2\pi \cdot \frac{1}{4}\right) = 3\sin\left(2\pi \cdot \frac{50}{F_s}\right)$, så $\frac{50}{F_s} = \frac{1}{4}$ och därmed $F_s = 200\,\mathrm{Hz}$.

Lösning 1.7

a) $F_s \geq 2F_{\max} = 2 \cdot 10\,\mathrm{kHz} = 20\,\mathrm{kHz}$.

b) $x(n) = x_a(nT) = \cos\left(2\pi n \cdot \frac{5000}{8000}\right) = \cos\left(2\pi n \cdot \frac{5}{8}\right)$ men eftersom $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$ så är $x(n) = \cos\left(2\pi n\left(1 - \frac{3}{8}\right)\right) = \cos\left(-2\pi n \cdot \frac{3}{8}\right) = \cos\left(2\pi n \cdot \frac{3}{8}\right)$ så $x_a(t) = \cos(2\pi t \cdot 3000)$, det vill säga vikning till 3 kHz.

c) Vikning till 1 kHz.

Lösning 1.8

a) Nyquist rate F_N är den lägsta sampelfrekvensen så att vikning ej uppstår. $F_N = 2F_{\max} = 2 \cdot 100 = 200\,\mathrm{Hz}$.

b) $F_s = 250\,\mathrm{Hz}$ så $F_{\max} \leq 125\,\mathrm{Hz}$.

Lösning 1.11

Den analoga signalen är:

$$x_a(t) = 3\cos(2\pi t \cdot 50) + 2\sin(2\pi t \cdot 125) \tag{1}$$

Sampla med $F_s = 200\,\mathrm{Hz}$.

$$\begin{aligned}
x(n) &= x_a\left(n \cdot \frac{1}{200}\right) && (2)\\
&= 3\cos\left(2\pi n \cdot \frac{50}{200}\right) + 2\sin\left(2\pi n \cdot \frac{125}{200}\right) && (3)\\
&= 3\cos\left(2\pi n \cdot \frac{1}{4}\right) + 2\sin\left(2\pi n \cdot \frac{5}{8}\right) && (4)\\
&= 3\cos\left(2\pi n \cdot \frac{1}{4}\right) + 2\sin\left(-2\pi n \cdot \frac{3}{8}\right) && (5)
\end{aligned}$$

Rekonstruera med $F_{\text{rek}} = 1000\,\mathrm{Hz}$.

$$\begin{aligned}
y_a(t) &= 3\cos\left(2\pi t \cdot \frac{1000}{4}\right) + 2\sin\left(-2\pi t \cdot \frac{3 \cdot 1000}{8}\right) && (6)\\
&= 3\cos(2\pi t \cdot 250) - 2\sin(2\pi t \cdot 375) && (7)
\end{aligned}$$

MATLAB-kod som illustrerar exemplet:

```
>> t = (0:10000-1)/1000;
>> x = 3*sin(100*pi*t)+2*sin(250*pi*t);
>> y = x(1:5:end);
>> subplot(2,1,1); plot(t(1:100),x(1:100));
>> subplot(2,1,2); plot(t(1:100),y(1:100));
```

Lyssna sedan på signalerna:

```
>> soundsc(x, 1000);
>> soundsc(y, 1000);
```

Lösning 1.13

Antalet nivåer är $L = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\Delta} + 1$ och antalet bitar är $b = \log_2 L$.

a) $b = 7$

b) $b = 10$

Lösning 1.14

Bithastigheten är $20\,\mathrm{Hz} \cdot 8\,\text{bitar} = 160\,\text{bitar/s}$. $F_{\max} = 10\,\mathrm{Hz}$. $\Delta = 1/255\,\mathrm{V}$.

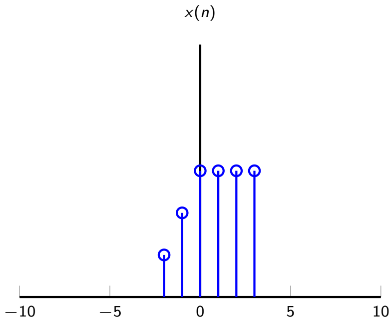
Lösning E1.1

Simulering i Matlab.

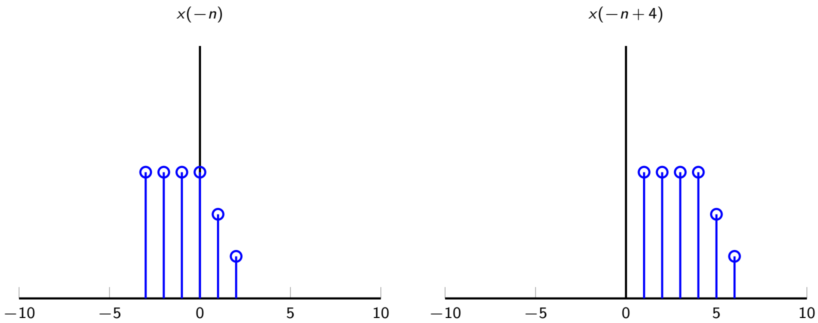
Impulssvar och faltning, kapitel 2

Lösning 2.1

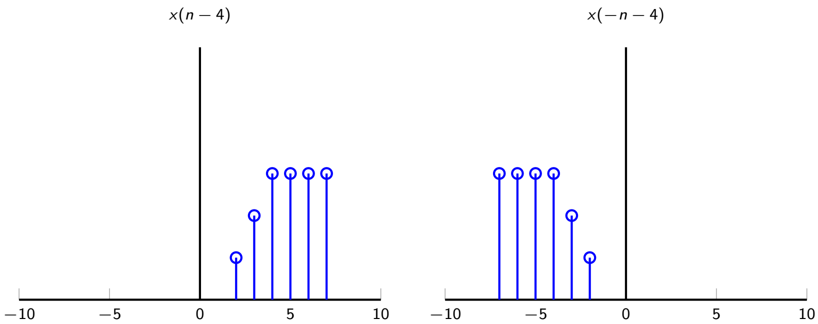
a)



b) För i:



För ii:



c) Alternativ (1) i b).

d) Spegla och fördröj k steg.

e) $x(n) = 1/3\ \delta(n+2) + 2/3\ \delta(n+1) + u(n) - u(n-4)$

Lösning 2.7

Systemen är:

a)
- Statiskt ty utsignalen beror bara av insignalen vid samma tidpunkt.
- Icke-linjärt ty Eq.(2.2.26) är ej uppfylld.
- Tidsinvariant eftersom en fördröjd insignal ger samma utsignal fast fördröjd.
- Kausalt eftersom utsignalen vid tidpunkten n ej beror av insignaler för tidpunkter $> n$.
- Stabilt ty begränsad insignal ger begränsad utsignal.

b) Dynamiskt, linjärt, tidsinvariant, icke-kausalt, instabilt.

c) Statiskt, linjärt, tidsvariant, kausalt, stabilt.

e) Statiskt, icke-linjärt, tidsinvariant, kausalt, stabilt.

h) Statiskt, linjärt, tidsvariant, kausalt, stabilt.

j) Dynamiskt, linjärt, tidsvariant, icke-kausalt, stabilt.

n) Statiskt, linjärt, tidsinvariant, kausalt, stabilt.

Lösning 2.13

(1) Tillräckligt: Antag att $\sum_n |h(n)| = M_h < \infty$. Då gäller med begränsad insignal, alltså $\sum_n |x(n)| \leq M_x < \infty$,

$$\left|y(k)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(k-n)\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \cdot |x(k-n)| \leq M_h \cdot M_x < \infty \tag{8}$$

det vill säga systemet är BIBO-stabilt.

(2) Nödvändigt: Antag att $\sum_n |h(n)| = \infty$. Bilda insignalen

$$x(n) = \begin{cases} h^*(-n)/|h(-n)| & h(-n) \neq 0, \\ 0 & h(-n) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

$x(n)$ är begränsad ty $|x(n)| \leq 1$. Vi får

$$y(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)x(-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h(n)h^*(n)}{|h(n)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|h(n)|^2}{|h(n)|} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \infty, \tag{10}$$

det vill säga en begränsad insignal ger en obegränsad utsignal och systemet är inte BIBO-stabilt. Alltså måste $\sum_n |h(n)| < \infty$ om systemet är BIBO-stabilt.

Lösning 2.16

a)

$$\sum_n y(n) = \sum_n \sum_k h(n-k)x(k) = \sum_k x(k) \sum_n h(n-k) = \sum_k x(k) \sum_l h(l) \tag{11}$$

b) 1) Grafisk lösning:

$h(0-k)$	4	2	$\underline{1}$					
$x(k)$			$\underline{1}$	1	1	1	1	
$h(k) * x(k)$			$\underline{1}$	3	7	7	7	6	4

$y(n) = \left\{ \underline{1} \quad 3 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 6 \quad 4 \right\}$

2) $y(n) = \left\{ 1 \quad 4 \quad 2 \quad -4 \quad 1 \right\}$

4) $y(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \right\}$

9) Grafisk lösning:

	1	-2	-3	$\underline{4}$
1	1	-2	-3	4
1	1	-2	-3	4
$\underline{0}$	0	0	0	$\underline{0}$
1	1	-2	-3	4
1	1	-2	-3	4

Summera antidiagonalerna,

$$y(n) = \left\{ 1 \quad -1 \quad -5 \quad 2 \quad 3 \quad \underline{-5} \quad 1 \quad 4 \right\}, \tag{12}$$

$$\sum_n y(n) = 0 = \sum_k x(k) \sum_l h(l) = 0 \cdot 4 \tag{13}$$

(11) Formel-lösning:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u(n-k) \tag{14}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} u(n-k) \tag{15}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \tag{16}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 2^k \tag{17}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \quad n \geq 0 \tag{18}$$

$$= \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] u(n) \tag{19}$$

$$\sum_n y(n) = \frac{8}{3} = \sum_k x(k) \sum_l h(l) = 2 \cdot \frac{4}{3} \tag{20}$$

Lösning 2.17

a) $y(n) = \left\{ \underline{6} \quad 11 \quad 15 \quad 18 \quad 14 \quad 10 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \right\}$

b) $y(n) = \left\{ 6 \quad 11 \quad 15 \quad \underline{18} \quad 14 \quad 10 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \right\}$

c) $y(n) = \left\{ 1 \quad \underline{2} \quad 2 \quad 2 \quad 1 \right\}$

d) $y(n) = \left\{ \underline{1} \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \right\}$

Lösning 2.21

a) Om $a \neq b$:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^k u(k) a^{n-k} u(n-k) \tag{21}$$

$$= a^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k \tag{22}$$

$$= a^n \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} \tag{23}$$

$$= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} \quad n \geq 0 \tag{24}$$

Om $a = b$:

$$y(n) = a^n \sum_{k=0}^{n} 1^k = a^n \cdot (n+1) \quad n \geq 0 \tag{25}$$

b) $y(n) = \left\{ 1 \quad 1 \quad \underline{-1} \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \right\}$

Lösning 2.35

a) Parallell- och seriekoppling:

$$h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n) * h_4(n)] \tag{26}$$

b)

$$h_3(n) * h_4(n) = (n-1) \cdot u(n-2) \tag{27}$$

$$h_2(n) - h_3(n) * h_4(n) = \delta(n) + 2u(n-1) \tag{28}$$

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3) \tag{29}$$

c) Falta med en komponent av $x(n)$ i taget.

$h(n) * \delta(n+2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\underline{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\dots$
$h(n) * 3\delta(n-1)$	0	0	$\underline{0}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$	6	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\dots$
$h(n) * (-4\delta(n-3))$	0	0	$\underline{0}$	0	0	-2	-5	-8	-10	-10
$\sum$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\underline{2}$	4	$\frac{25}{4}$	$\frac{13}{2}$	5	2	0	0

Utsignalen blir

$$y(n) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & \underline{2} & 4 & \frac{25}{4} & \frac{13}{2} & 5 & 2 \end{array} \right\} \tag{30}$$

Lösning 2.61

- För $r_{xx}(l)$:

$$r_{xx}(l) = \sum_n x(n)x(n-l) = \sum_{n=n_0-N+l}^{n_0+N} 1 = 2N - l + 1 \quad l \geq 0 \tag{31}$$

$$r_{xx}(l) = 2N - |l| + 1 \tag{32}$$

- För $r_{xy}(l)$:

$$r_{xy}(l) = \sum_n x(n)y(n-l) \tag{33}$$

Lös grafiskt, dvs

$$r_{xy}(l) = r_{xx}(l - n_0) \tag{34}$$

Lösning 2.62

a) $r_{xx}(l) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & \underline{7} & 5 & 3 & 1 \end{array} \right\}$

b) $r_{yy}(l) = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & \underline{7} & 5 & 3 & 1 \end{array} \right\}$

Lösning 2.64

$$x(n) = s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2) \tag{35}$$

$$r_{xx}(l) = \sum_n x(n)x(n-l) = \tag{36}$$

$$= \sum_n [s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)] \cdot [s(n-l) + r_1 s(n-k_1-l) + r_2 s(n-k_2-l)] \tag{37}$$

$$= r_{ss}(l) + r_1 r_{ss}(l+k_1) + r_2 r_{ss}(l+k_2) \tag{38}$$

$$+ r_1 r_{ss}(l-k_1) + r_1^2 r_{ss}(l) + r_1 r_2 r_{ss}(l+k_2-k_1) \tag{39}$$

$$+ r_2 r_{ss}(l-k_2) + r_1 r_2 r_{ss}(l+k_1-k_2) + r_2^2 r_{ss}(l) \tag{40}$$

Låt $r_1 \ll 1$ och $r_2 \ll 1$:

$$r_{xx}(l) \approx r_{ss}(l) + r_1 r_{ss}(l+k_1) + r_2 r_{ss}(l+k_2) + r_1 r_{ss}(l-k_1) + r_2 r_{ss}(l-k_2) \tag{41}$$

z-transform, kapitel 3

Lösning 3.1

a) $X(z) = 3z^5 + 6 + z^{-1} - 4z^{-2}$

b) $X(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{z^{-5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

Lösning 3.2

a) $X(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}$. Förläng med z^2. Nollställen: $z = 0$ (2st). Poler: $z = 1$ (2st).

c) $x(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ så $X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$. Nollställe: $z = 0$. Pol: $z = -\frac{1}{2}$.

f)

$$x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi) u(n) = Ar^n \left(\cos(\omega_0 n)\cos\phi - \sin(\omega_0 n)\sin\phi\right) u(n) \tag{42}$$

$$X(z) = A \cdot \frac{\left(1 - r\cos(\omega_0)\cdot z^{-1}\right)\cdot\cos\phi - r\sin(\omega_0)\cdot z^{-1}\cdot\sin\phi}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}} \tag{43}$$

Poler och nollställen ges av

$$X(z) = Az\cos\phi \cdot \frac{z - \frac{r\cos(\omega_0-\phi)}{\cos\phi}}{\left(z - re^{j\omega_0}\right)\left(z - re^{-j\omega_0}\right)} \tag{44}$$

Nollställen: $z = 0$ och $z = \frac{r\cos(\omega_0-\phi)}{\cos\phi}$. Poler: $z = re^{\pm j\omega_0}$.

h)

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \frac{z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10} z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{45}$$

Poler och nollställen ges av

$$X(z) = \frac{z^{-10}(z^{10} - (1/2)^{10})}{z^{-1}(z-1/2)} = \frac{z^{10} - (1/2)^{10}}{z^9(z-1/2)} \tag{46}$$

Nollställen: $z^{10} - \frac{1}{2}^{10} = 0$ ger $z = \frac{1}{2}\cdot e^{j2\pi k/10}$ för $k = 1\ldots 9$. Poler: $z = 0$ (9st). OBS! Polen $p = \frac{1}{2}$ och nollstället $z = \frac{1}{2}$ släcker ut varandra.

Lösning 3.8

a)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)u(n-k) = x(n) * u(n) \tag{47}$$

$$Y(z) = X(z) \cdot U(z) = X(z) \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \tag{48}$$

b)

$$u(n) * u(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)u(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)u(n) \tag{49}$$

$$X(z) = U(z) \cdot U(z) = \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \tag{50}$$

Lösning 3.9

Skalning i z-planet:

$$a^n x(n) \longleftrightarrow X(a^{-1}z) \tag{51}$$

Om vi har en pol eller nollställe i $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c}$ erhålles efter multiplikation i tidsplanet att

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0} z = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_c} \tag{52}$$

ger ny pol eller nollställe i $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_c+\omega_0)}$. Likaså

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0} z = r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_c} \;\Rightarrow\; z = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega_c-\omega_0)} \tag{53}$$

Polerna eller nollställena är inte längre komplexkonjugerade.

Lösning 3.14

a) $x(n) = 2(-1)^n u(n) - (-2)^n u(n)$

b) $x(n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot (n-1)\right) \cdot u(n-1) + \delta(n)$

c) $x(n) = u(n-6) + u(n-7)$

d)

$$X(z) = \frac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}} = 1 + \frac{z^{-2}}{1+z^{-2}} = 1 + \frac{z^{-2}}{(1+\mathrm{j}z^{-1})(1-\mathrm{j}z^{-1})} \tag{54}$$

$$= 1 + z^{-2}\left(\frac{A}{1+\mathrm{j}z^{-1}} + \frac{B}{1-\mathrm{j}z^{-1}}\right) \quad \text{där } A = \frac{1}{2} \text{ och } B = \frac{1}{2} \tag{55}$$

$$X(z) \xrightarrow{\mathrm{z}^{-1}} x(n) = \delta(n) + \frac{1}{2} \cdot (-\mathrm{j})^{n-2} \cdot u(n-2) + \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{j})^{n-2} \cdot u(n-2) \tag{56}$$

$$= \delta(n) - \left(\frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n/2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n/2}\right) u(n-2) \tag{57}$$

$$= \delta(n) - \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) u(n-2) \tag{58}$$

Alt. identifiering via FS

$$\alpha^n \sin(\beta n)u(n) \xrightarrow{\text{z}} \frac{z^{-1}\alpha\sin\beta}{1-z^{-1}2\alpha\cos\beta+\alpha^2 z^{-2}} \tag{59}$$

där $\alpha = 1$ och $\beta = \frac{\pi}{2}$ ger

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)u(n) \xrightarrow{\text{z}} \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} \tag{60}$$

$$x(n) = \delta(n) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(n-1)\right)u(n-1) \tag{61}$$

De båda svaren är samma signal, kolla gärna genom att sätta in $n = 0, 1, 2\ldots$

g)

$$X(z) = \frac{1}{4} + \frac{z^{-1}+\frac{3}{4}}{4z^{-2}+4z^{-1}+1} = \frac{1}{4} + X_1(z) \tag{62}$$

$$X_1(z) = \frac{z^{-1}}{(1+2z^{-1})^2} + \frac{3/4}{(1+2z^{-1})^2} \tag{63}$$

$$x(n) = \frac{1}{4}\cdot\delta(n) + (n+1-1)(-2)^{n-1}\cdot u(n-1) + \frac{3}{4}\cdot(n+1)(-2)^n\cdot u(n) \tag{64}$$

$$= \delta(n) - \left[\frac{1}{2}\,(n-1)(-2)^{n-1} + 2(-2)^{n-1}\right]\cdot u(n-1) \tag{65}$$

Lösning 3.16

a)

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) \qquad \xrightarrow{\text{z}} \frac{1}{4}\,\frac{z^{-1}}{1-1/4\,z^{-1}} \tag{66}$$

$$x_2(n) = \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n) \qquad \xrightarrow{\text{z}} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-1/2\,z^{-1}} \tag{67}$$

$$x_1 * x_2 \xrightarrow{\text{z}} X_1\cdot X_2 \tag{68}$$

$$X_1\cdot X_2 = z^{-1}\left[\frac{1/4}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\right] = \tag{69}$$

$$= z^{-1}\left[\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}} + \frac{C}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right] \tag{70}$$

Handpåläggning:

$$A = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-4} + \frac{1}{1-2}\right] = -\frac{1}{3} \tag{71}$$

$$B = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-1/4}\right] = \frac{1}{3} \tag{72}$$

$$C = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-1/2}\right] = \frac{1}{2} \tag{73}$$

$$X_1\cdot X_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{74}$$

$$X_1\cdot X_2 \xrightarrow{\text{z}^{-1}} x_1 * x_2 = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]u(n-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) \tag{75}$$

c)

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \quad \xrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{76}$$

$$x_2(n) = \cos(\pi n)u(n) \quad \xrightarrow{z} \frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1}{1+z^{-1}} \tag{77}$$

$$x_1 * x_2 \xrightarrow{z} X_1 \cdot X_2 \tag{78}$$

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)} = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}} \tag{79}$$

Handpåläggning:

$$A = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \tag{80}$$

$$B = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+z^{-1}} \tag{81}$$

$$x_1 * x_2 = \left[\frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}(-1)^n\right]u(n) = \left[\frac{1}{3}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3}\cdot\cos\pi n\right]u(n) \tag{82}$$

Lösning 3.35

a) $y_{zs}(n) = h * x(n)$ då systemet är i *vila* dvs

$$y(-\ell) = 0 \quad \ell = 1 \ldots N \tag{83}$$

$$Y_{zs}(z) = H(z)\cdot X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z{-2}} \tag{84}$$

$$= \left[\frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{B+Cz^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}\right] \tag{85}$$

$$= \frac{A-\frac{1}{2}Az^{-1}+\frac{1}{4}Az^{-2}+B+Cz^{-1}-\frac{1}{3}Bz^{-1}-\frac{1}{3}Cz^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)} \tag{86}$$

Id.koeff.

$$\left.\begin{array}{r} A+B=1 \\ -\frac{1}{2}A-\frac{1}{3}B+C=-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}A-\frac{1}{3}C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=\frac{1}{7} \\ B=\frac{6}{7} \\ C=\frac{3}{28} \end{array} \tag{87}$$

$$Y_{zs}(z) = \frac{1/7}{1-1/3\ z^{-1}} + \frac{6/7+3/28\ z^{-1}}{(1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2})} \tag{88}$$

$$= \frac{1/7}{1-1/3\ z^{-1}} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1+1/8\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}} \tag{89}$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-1/3\ z^{-1}} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1-1/4\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}} + \frac{3\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}/4\ z^{-1}}{1-1/2\ z^{-1}+1/4\ z^{-2}} \tag{90}$$

$$Y_{zs}(z) \xrightarrow{z^{-1}} y_{zs}(n) = \left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right]u(n) \tag{91}$$

d)

$$\left.\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{2}\cdot x(n) - \frac{1}{2}\cdot x(n-1) \\ x(n) &= 10\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n) \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{zs}(n) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)u(n-1) \tag{92}$$

Lösning 3.40

Kausalt LTI

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot u(n-1) \tag{93}$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) \tag{94}$$

a) Kausal in, kausal ut: begynnelsevillkor $= 0$.

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{95}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \tag{96}$$

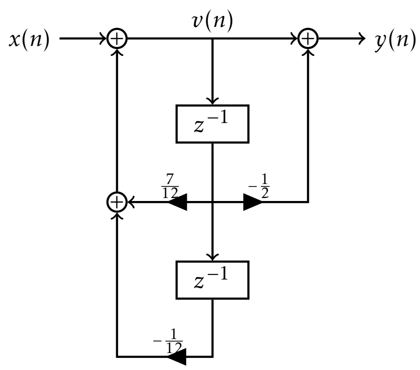
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \tag{97}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}} = \frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{98}$$

$$H(z) \xrightarrow{z^{-1}} h(n) = \left[-2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\cdot u(n) \tag{99}$$

b) $y(n) - \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{12}y(n-2) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$

c) Realisering:



d)

$$\left.\begin{aligned} |\text{poler}| &< 1 \\ h(n)\ &\text{kausal} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{stabil} \tag{100}$$

Lösning 3.49

b)

$$Y^+(z) - 1.5\left[z^{-1}Y^+(z) + 1\right] + 0.5\left[z^{-2}Y^+(z) + z^{-1}\right] = 0 \tag{101}$$

$$Y^+(z) - 1.5z^{-1}Y^+(z) + 0.5z^{-2}Y^+(z) = 1.5 - 0.5z^{-1} \tag{102}$$

$$Y^+(z) = \frac{1.5 - 0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \frac{2}{1 - z^{-1}} + \frac{-1/2}{1 - 1/2\,z^{-1}} \tag{103}$$

$$Y^+(z) \xrightarrow{\text{z}^{-1}} y_{zi}(n) = \left(2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \cdot u(n) \tag{104}$$

c)

$$Y^+(z) = \frac{1}{2}\ Y^+(z)z^{-1} + \frac{1}{2}\ y(-1) + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{105}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{2}\ z^{-1}Y^+(z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{106}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \tag{107}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1} + 2}{2\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{7/2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \tag{108}$$

$$Y^+(z) \xrightarrow{\text{z}^{-1}} y(n) = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u(n) \tag{109}$$

d)

$$Y^+(z) = \frac{1}{4}Y^+(z)z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-1}y(-1) + \frac{1}{4}y(-2) + \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{110}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{4}z^{-2}Y^+(z) + \frac{1}{4} + \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{111}$$

$$Y^+(z) = \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)} \tag{112}$$

$$= \frac{1 - z^{-1} + 4}{4\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)\left(1 - z^{-1}\right)} \tag{113}$$

$$= \frac{-3/8}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{7/24}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4/3}{1 - z^{-1}} \tag{114}$$

$$Y^+(z) \xrightarrow{\text{z}^{-1}} y(n) = -\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + \frac{7}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + \frac{4}{3} \cdot u(n) \tag{115}$$

Lösning E3.1

A-III, B-I, C-II

Ju längre avstånd från poler till enhetscirkeln, desto mer dämpat impuls-svar. Dubbelpol på enhetscirkeln beskriver ett instabilt system (detta är anledningen att systemets poler aldrig bör ligga på enhetscirkeln, även om systemet inte är instabilt, jfr B-I. En insignalpol på samma ställe ger obegränsad utsignal, jfr A-III.)

Lösning E3.2

a)

$$x(n) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n) \xrightarrow{z} X(z) = 3\frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} \tag{116}$$

$$y(n) = -\frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{5}x(n-1) \quad \text{där } y(-1) = \frac{1}{3} \tag{117}$$

$$Y^+(z) = -\frac{1}{2}z^{-1}\left[Y^+(z) + y(-1)\cdot z\right] + \frac{1}{5}z^{-1}X(z) \tag{118}$$

$$Y^+(z) = \frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{3}{5}z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1+z^{-2})} \tag{119}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{3}{5}z^{-1}\left[\frac{2}{5}\frac{1+2z^{-1}}{1+z^{-2}} - \frac{2}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right] \tag{120}$$

$$y(n) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{6}{25}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u(n-1) \tag{121}$$

b) $y(n) = 0$ det vill säga nollställe vid $\omega_0 = 2\pi f_0$.

$$T(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} = 2\left(1+z^{-1}+z^{-2}\right) = 0 \tag{122}$$

$$z_{1,2} = \frac{-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}2\pi\ 1/3} \quad \text{ger } f_0 = \frac{1}{3} \tag{123}$$

c) Pol på enhetscirkeln vid f_1.

$$N(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} = 1 - z^{-1} + z^{-2} = 0 \tag{124}$$

$$z_{1,2} = \frac{1\pm \mathrm{j}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}2\pi\ 1/6} \quad \text{ger } f_1 = \frac{1}{6} \tag{125}$$

Lösning E3.3

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\,y(n-2) = x(n) \tag{126}$$

$$Y(z)\left(1 - z^{-1} + \frac{3}{16}z^{-2}\right) = X(z) \tag{127}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\cdot X(z) \tag{128}$$

Poler:

$$p_{1,2} = \begin{cases} 1/4 \\ 3/4 \end{cases} \tag{129}$$

$$Y(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\cdot X(z) \tag{130}$$

Låt $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ där

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \tag{131}$$

$$x_2(n) = \sin\left(2\pi\frac{1}{4}n\right) \tag{132}$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}} \Rightarrow Y_1(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{133}$$

$$H\left(\omega = 2\pi\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{1}{4}} + \frac{3}{16}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\frac{\pi}{4}2}} = \frac{1}{\frac{13}{16}+\mathrm{j}} = 0.776\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.888} \tag{134}$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\cdot u(n) + 0.776\sin\left(2\pi\frac{1}{4}n - 0.888\right) \tag{135}$$

Lösning E3.4

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} \tag{136}$$

Poler: $p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$

a)

$$y_{zi}(n) = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left[\cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{4}n)\right]u(n) \tag{137}$$

b)

$$y_{zs}(n) = z^{-1}\cdot H(z)\cdot X(z) \tag{138}$$

$$= z^{-1}\left[\frac{0.5z^{-1}-(1-0.5z^{-1})}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}} + \frac{2}{1-z^{-1}}\right] \tag{139}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}n - \cos\frac{\pi}{4}n\right)\cdot u(n) + 2u(n) \tag{140}$$

c)

$$y_{tr} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{3\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\sin\frac{\pi}{4}n - \cos\frac{\pi}{4}n \tag{141}$$

$$= -(\frac{1}{\sqrt{2}})^n 2\cos\frac{\pi}{4}n,\ n \geq 0. \tag{142}$$

d)

$$y_{ss} = 2u(n) \tag{143}$$

Lösning E3.5

$$y(n) - \frac{1}{4}\, y(n-1) = x(n) \tag{144}$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{4} z^{-1}\right) = X(z) \quad \text{där } p = \frac{1}{4} \tag{145}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \tag{146}$$

För $n < 0$:

$$H\left(2\pi \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{1}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\mathrm{j}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j} \arctan \frac{1}{4}} = 0.97 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.24} \tag{147}$$

$$y(n) = 0.97 \sin\left(2\pi \frac{1}{4} n - 0.24\right) \quad \Rightarrow \quad y(-1) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{16}{17} = 0.94 \tag{148}$$

För $n \geq 0$:

$$Y^{+}(n) = \frac{1}{1 - 1/4\, z^{-1}} \cdot \frac{1}{4} y(-1) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - 1/4\, z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad y(n) = -\frac{4}{17} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot u(n) \tag{149}$$

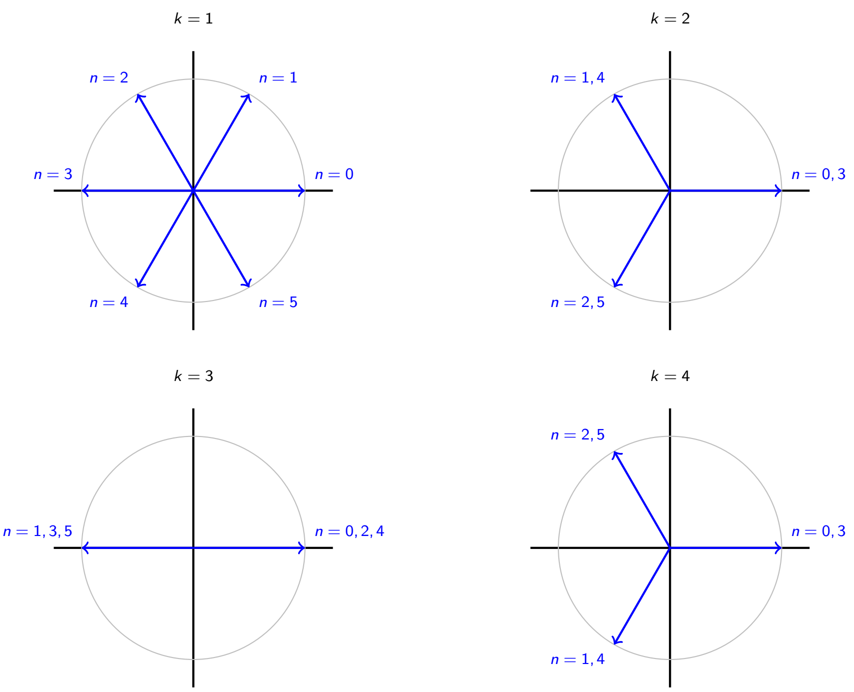
Fouriertransform, signaler genom LTI-system och sampling, kapitel 4, 5 och 6

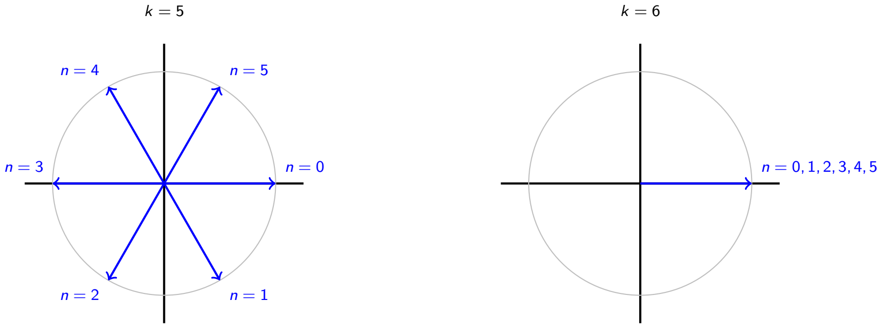
Lösning 4.8

a)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi k n/N} = \begin{cases} \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/N \cdot N}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/N}} = 0 & \text{för } k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \ell N n/N} = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N & \text{för } k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots = \ell N,\ \ell \in \mathbf{Z} \end{cases} \tag{150}$$

b)





c)

$$\sum_{n=N_1}^{N_1+N-1} e^{j(2\pi/N)kn} \cdot e^{-j(2\pi/N)\ell n} = \sum_{n=N_1}^{N_1+N-1} e^{j(2\pi/N)(k-\ell)n} = \begin{cases} N & k-\ell = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{151}$$

$$\sum_{n=N_1}^{N_1+N-1} e^{j(2\pi/N)(k-\ell)n} = \begin{cases} N & k = \ell \text{ (ty } s_k(n) = s_{k+N}(n)) \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{152}$$

Lösning 4.9

a)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (u(n) - u(n-6))e^{-j\omega n} \tag{153}$$

$$= \sum_{n=0}^{5} e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega 6}}{1 - e^{-j\omega}} = \frac{\sin(3\omega)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \cdot e^{-j\frac{5\omega}{2}} \tag{154}$$

b)

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}} \tag{155}$$

c)

$$X(\omega) = \frac{256e^{j4\omega}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \tag{156}$$

d)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha^n \sin \omega_0 n) \cdot u(n) \cdot e^{-j\omega n} \tag{157}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n e^{j\omega_0 n} - \alpha^n e^{-j\omega_0 n}}{2j} \cdot e^{-j\omega n} \tag{158}$$

$$= \frac{1}{2j(1 - \alpha e^{j\omega_0} e^{-j\omega})} - \frac{1}{2j(1 - \alpha e^{-j\omega_0} e^{-j\omega})} \tag{159}$$

$$= \frac{1 - \alpha e^{-j\omega_0} e^{-j\omega} - 1 + \alpha e^{j\omega_0} e^{-j\omega}}{2j(1 - \alpha e^{-j\omega_0} e^{-j\omega} - \alpha e^{j\omega_0} e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j2\omega})} \tag{160}$$

$$= \frac{\alpha \sin \omega_0 e^{-j\omega}}{1 - 2\alpha \cos \omega_0 e^{-j\omega} + \alpha^2 e^{-j2\omega}} \tag{161}$$

g)

$$X(\omega) = -2j(\sin \omega + 2 \sin 2\omega) \tag{162}$$

Lösning 4.10

a)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\cos(\omega n) + jX(\omega)\sin(\omega n)d\omega \tag{163}$$

$$= \left[j\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\sin(\omega n)d\omega = 0 \quad \text{ty } X(\omega) \text{ jämn och } \sin(\omega n) \text{ udda} \right] \tag{164}$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_{\omega_0}^{\pi} 1\cdot\cos(\omega n)d\omega = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega n)}{n}\right]_{\omega_0}^{\pi} \tag{165}$$

$$= \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} - \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n} = \delta(n) - \frac{\sin(\omega_0 n)}{\pi n} \tag{166}$$

b)

$$X(\omega) = \cos^2\omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2\omega \tag{167}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot e^{j\omega 2} + \frac{1}{4}\cdot e^{-j\omega 2} \tag{168}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{endast term med } n = 0, -2, 2 \text{ finns} \tag{169}$$

$$x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n+2) + \frac{1}{4}\delta(n-2) \tag{170}$$

Lösning 4.12

c) Multiplikation med $e^{j\omega_c n}$ i tidsplanet ger skift ω_c i frekvensplanet.
Låt $X_L(\omega)$ vara ett idealt lågpassfilter med gränsfrekvens $W/2$ och höjden 2.

$$\left.\begin{array}{l} x_L(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-W/2}^{W/2} 2e^{j\omega n}d\omega = 2\cdot\dfrac{\sin(\frac{W}{2}n)}{\pi n} \\ 2\cos\omega_c n = e^{j\omega_c n} + e^{-j\omega_c n} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}\{x_L(n)\cdot 2\cos\omega_c n\} = X(\omega) \tag{171}$$

Det vill säga

$$x(n) = 4\cdot\frac{\sin\left(\frac{W}{2}n\right)}{\pi n}\cdot\cos\omega_c n \tag{172}$$

Lösning 4.14

a) $X(0) = -1$

b) $\arg X(\omega) = \pi \qquad [X(\omega)$ är reell och negativ för alla $\omega]$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)d\omega = -6\pi$

d) $X(\pi) = -9$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega = 38\pi \qquad$ [se Parsevals formel]

Lösning 5.2

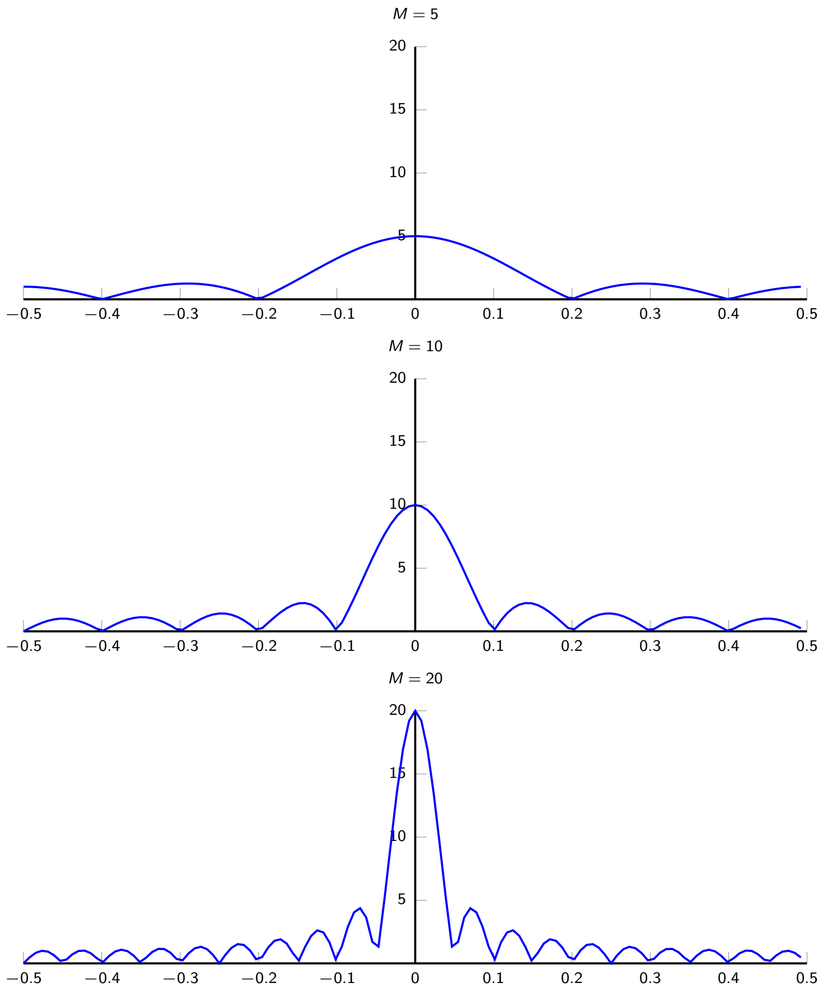
a)

$$W_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{173}$$

$$= \sum_{n=0}^{M} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}} \tag{174}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M+1)/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 1/2}} \cdot \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(M+1)/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(M+1)/2}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2}} \tag{175}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M/2} \cdot \frac{\sin \omega \frac{(M+1)}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \tag{176}$$



b)

$$w_T(n) = w_R(n) * w_R(n-1) \tag{177}$$

där

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \ldots \frac{M}{2} - 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{178}$$

$$W_T(\omega) = W_R(\omega) \cdot W_R(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega \frac{M}{2}}\ \frac{\sin^2 \omega \frac{M}{4}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \tag{179}$$

Lösning 5.17

a) Ur FS:

$$y(n) = x(n) - 2\cos\omega_0 x(n-1) + x(n-2) \tag{180}$$

ger

$$h(n) = \delta(n) - 2\cos\omega_0 \delta(n-1) + \delta(n-2) \tag{181}$$

b)

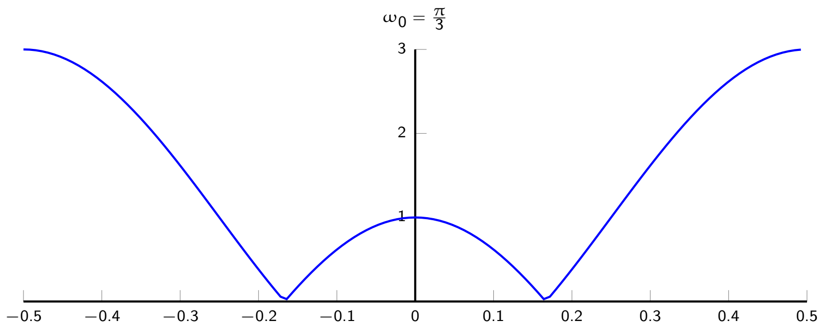
$$H(\omega) = 1 - 2\cos\omega_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega} - 2\cos\omega_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + 1\right) \tag{182}$$

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}\right)\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega}} \tag{183}$$

$$|H(\omega)| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0}\right| \cdot \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}\right| = V_1(\omega)V_2(\omega) \tag{184}$$

$$\phi(\omega) = \arg\left[1 - 2\cos\omega_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}\right] = \tag{185}$$

$$= \arg\left[2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}(\cos\omega - \cos\omega_0)\right] = \begin{cases} -\omega & \omega < \omega_0 \\ -\omega - \pi & \omega > \omega_0 \end{cases} \tag{186}$$



c)

$$x(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\, n + \frac{\pi}{6}\right) \quad -\infty < n < \infty \tag{187}$$

$$y(n) = 3 \cdot \left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \frac{\pi}{6} + \phi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad -\infty < n < \infty \tag{188}$$

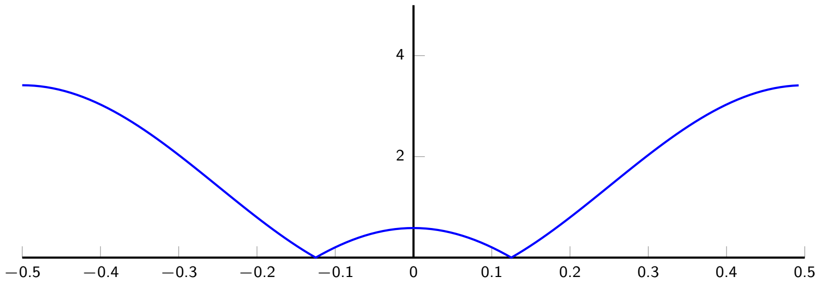
$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\ \pi/3}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \tag{189}$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad y(n) = 3\cos\left(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{6}\right) \quad -\infty < n < \infty \tag{190}$$

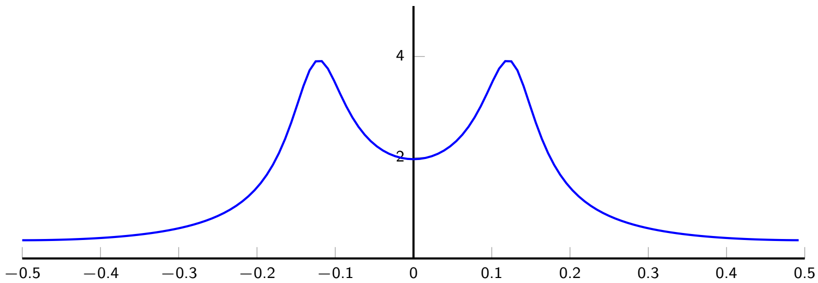
Lösning 5.25

Plotta $|X(f)|$ med hjälp av MATLAB.

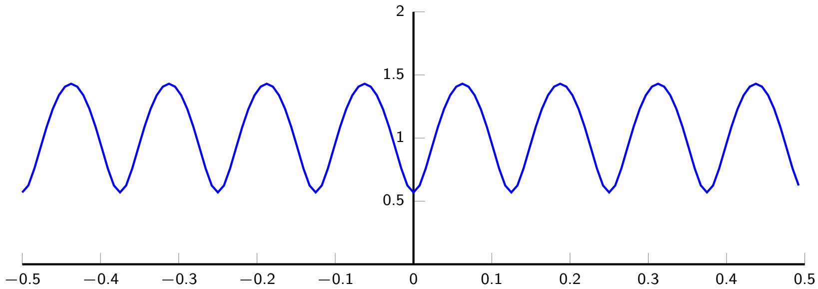
Pol-nollställe 1



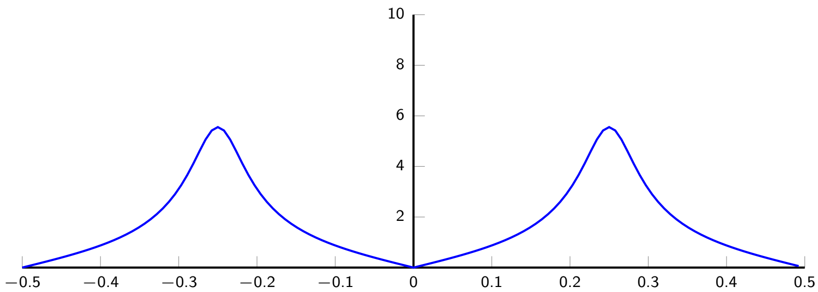
Pol-nollställe 2



Pol-nollställe 3



Pol-nollställe 4



Lösning 5.26

Välj

$$\omega_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow h(n) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{array} \right\} \tag{191}$$

$$x(n) = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \dots \end{array} \right\} \tag{192}$$

Exempelvis grafisk faltning:

$$y(n) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array} \right\} \tag{193}$$

På grund av att insignalen startar vid $n = 0$ syns en transient i utsignalen.

Lösning 5.35

$$|H(0)| = \frac{V_1 V_2}{U_1 U_2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)^2}{\cdot} \frac{1}{4} = 4(\sqrt{2} + 2) \tag{194}$$

$$G(0) = \frac{1}{|H(0)|} \tag{195}$$

Lösning 5.39

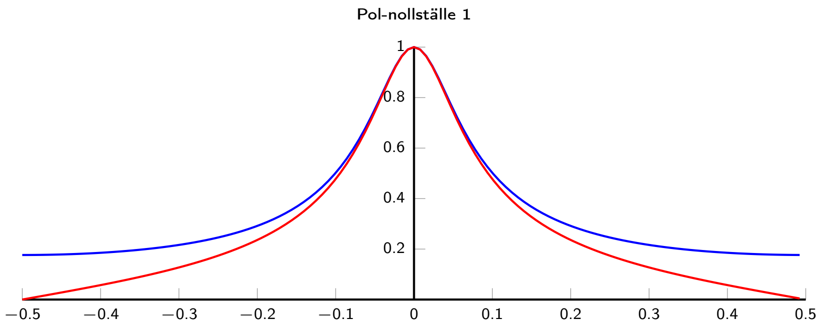
$$H_1(\omega) = \frac{1-a}{1-ae^{-j\omega}} \quad \Rightarrow \quad |H_1(0)| = \frac{1-a}{1-a} = 1 \tag{196}$$

$$|H_1(\omega_{3dB})| = |H(0)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{197}$$

$$|H_1(\omega_{3dB})|^2 = \frac{(1-a)^2}{|1 - a\cos\omega_{3dB} + aj\sin\omega_{3dB}|^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{3dB} = \arccos\frac{4a - a^2 - 1}{2a} \tag{198}$$

$$H_2(\omega) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1+e^{-j\omega}}{1-ae^{-j\omega}} \quad \Rightarrow \quad |H_2(0)| = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{2}{1-a} = 1 \tag{199}$$

$$|H_2(\omega)|^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 \cdot \frac{|1+\cos\omega - j\sin\omega|^2}{|1 - a\cos\omega + aj\sin\omega|^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega = \arccos\frac{2a}{1+a^2} \tag{200}$$



H_2 är bäst ty nollställe i $z = -1$.

Lösning E4.1

Välj nollställe $z = j$, $z = -j$ samt $z = -1$. Detta ger $H(z) = b_0(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$. Om DC-nivån är 1 erhålles $b_0 = 1/4$ och $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0.25$.

$$|H(\omega)| = \frac{1}{4} \cdot \left|\frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\cos\left(\frac{3}{2}\omega\right) + \cos\left(\frac{1}{2}\omega\right)\right| \tag{201}$$

$$\arg H(\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi \quad \text{om } \pi/2 < \omega < \pi \tag{202}$$

$H(\omega)$ periodisk.

Lösning E4.2

$$H(z) = 1 + z^{-D} + z^{-2D} = \frac{z^{2D} + z^{D} + 1}{z^{2D}} \tag{203}$$

$$|H(\omega)| = \left|1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega D} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega 2D}\right| = |1 + 2\cos\omega D| \tag{204}$$

Poler: $D = 1000$ i origo.
Nollställen: $z^{2D} + z^{D} + 1 = 0$ ger $z^{D} = 0.5\left(-1 \pm \mathrm{j}\sqrt{3}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pm 2\pi\frac{1}{3}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k}$ för $k = 0, 1, \ldots D-1$, och slutligen $z_k = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}2\pi\frac{1}{3D}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/D}$

Lösning E4.3

a) $y(n) = x(n) + 0.9x(n-D)$ ger $h(n) = \delta(n) + 0.9\delta(n-D)$

b) $H(z) = 1 + 0.9z^{-D} = \frac{z^{D}+0.9}{Z^{D}}$ med $D = 500$ ger 500 poler i origo. Nollställen:

$$z^{500} = -0.9 = 0.9\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k + \mathrm{j}\pi} \tag{205}$$

$$z_k = 0.9^{1/500}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k/500 + \mathrm{j}\pi/500} \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots, 499 \text{ (ligger på en cirkel).} \tag{206}$$

Lösning E4.4

$$|H(f)| = \left|\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega/2}\right| \tag{207}$$

Multiplikation med $\cos(2\pi n/8)$ flyttar spektrum $\pm 1/8$. $H(f)$ spärrar alla frekvenser utom $f = 0$ (rita spektra). Ger $y(t) = 4\cos(2\pi 1000t)$

Sampling

Lösning E4.5

a)

$$x_a(t) = \mathrm{e}^{-10t}u(t) \tag{208}$$

$$X_a(F) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(10+\mathrm{j}2\pi F)t}\,dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-(10+\mathrm{j}2\pi F)t}}{-(10+\mathrm{j}2\pi F)}\right]_0^{\infty} \tag{209}$$

$$= \frac{1}{10 + \mathrm{j}2\pi F} \tag{210}$$

$$|X_a(F)|^2 = \frac{1}{10^2 + (2\pi F)^2} \tag{211}$$

b) Spärrad energi:

$$E_s = \int_{-\infty}^{-50} |X_a(F)|^2\,dF + \int_{50}^{\infty} |X_a(F)|^2\,\mathrm{d}F \tag{212}$$

$$= 2\int_{50}^{\infty} \frac{1}{10^2 + (2\pi F)^2}\,\mathrm{d}F \tag{213}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{10 \cdot 2\pi}\left[\arctan 2\pi\frac{F}{10}\right]_{50}^{\infty} \tag{214}$$

$$= \frac{1}{10\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 1.539\right] \tag{215}$$

Hela energin:

$$E_{tot} = \frac{1}{10\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{spärrad andel är } \frac{\frac{\pi}{2} - 1.539}{\frac{\pi}{2}} \approx 2\% \tag{216}$$

c) Utan filter:

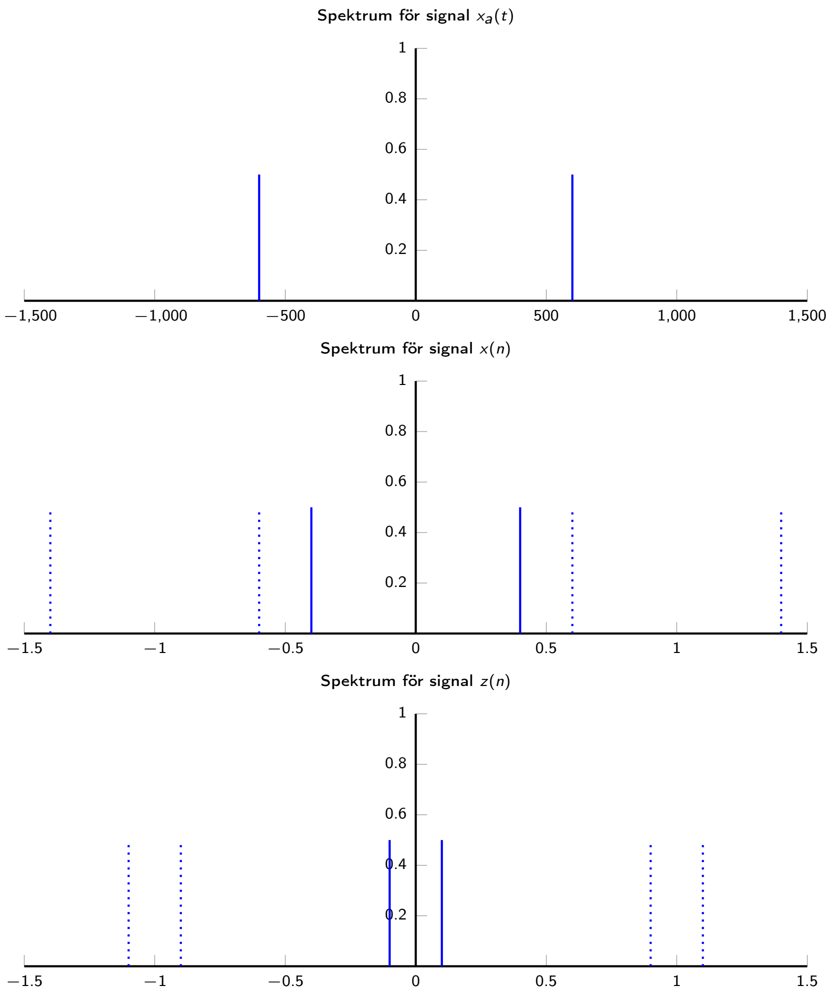
$$|Y(f)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} e^{-10n/100} e^{-j2\pi f n} \right| = \left| \frac{1}{1 - e^{-0.1} e^{-j2\pi f}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1.8187 - 1.8096 \cos 2\pi f}} \tag{217}$$

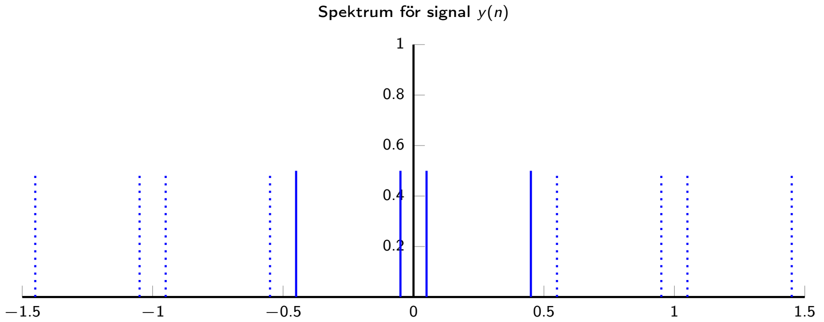
Med filter:

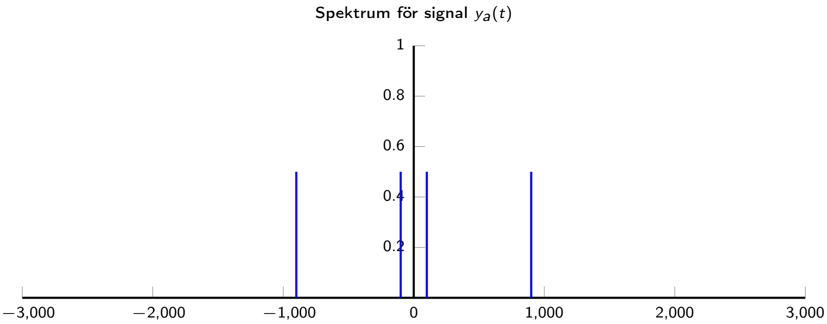
$$\left|\tilde{Y}(f)\right| = F_s |X_a(F)| = F_s \cdot \frac{1}{\sqrt{100 + (2\pi f F_s)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.01 + (2\pi f)^2}}. \tag{218}$$

	$\left\lvert\tilde{Y}(f)\right\rvert$	$\lvert Y(f)\rvert$
$f = 0$	10	10.5
$f = 0.25$	0.64	0.74
$f = 0.5$	0.32	0.53

Lösning E4.6







Således blir $y_a(t) = \cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 900t)$.

Diskreta fouriertransformen DFT, kapitel 7

Lösning 7.1

Om $x(n)$ reell så är $|X(\omega)|$ en jämn funktion, och $\arg(X(\omega))$ en udda funktion. $X(\omega)$ är alltid en periodisk funktion med perioden 2π. Dessa samband gäller även då $X(\omega)$ samplats till $X(k)$. Det betyder att då

$$X(0) = 0.25 \tag{219}$$

$$X(1) = 0.125 - \mathrm{j}0.3018 \tag{220}$$

$$X(2) = 0 \tag{221}$$

$$X(3) = 0.125 - \mathrm{j}0.0518 \tag{222}$$

$$X(4) = 0 \tag{223}$$

så är

$$X(5) = X^*(3) = 0.125 + \mathrm{j}0.0518 \tag{224}$$

$$X(6) = X^*(2) = 0 \tag{225}$$

$$X(7) = X^*(1) = 0.125 + \mathrm{j}0.3018 \tag{226}$$

Lösning 7.2

a) $y(n) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1.25 & 2.55 & 2.55 & 1.25 & 0.25 & -1.06 & -1.06 & 0.25 \end{array} \right\}.$

Lösning 7.3

$x(n)$ blir lågpassfiltrerad då vissa värden i $X(k)$ nollställs, ty k-värdena mellan k_c och $N - k_c$ representerar höga frekvenser från $\omega = \pi$ (högsta frekvensen) och neråt till $2\pi k_c/N$. Frekvenserna $\omega = \pi$ och upp till $2\pi(N - k_c)/N$ representerar periodiceringen.

Lösning 7.4

a) $\frac{N}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} n\right)$

b) $-\frac{N}{2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N} \ell\right)$

c) $\frac{N}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \ell\right)$

d) $\frac{N}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} \ell\right)$

Lösning 7.7

1) $X_c(k) = \frac{1}{2}[X((k-k_0))_N + X((k+k_0))_N]$

2) $X_s(k) = \frac{1}{2\mathrm{j}}[X((k-k_0))_N - X((k+k_0))_N]$

Lösning 7.8

Cirkulär faltning: periodisera den ena signalen och falta som vanligt.

$$x_1 = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \ldots & \underline{1} & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & \ldots \end{array} \right\} \tag{227}$$

$$x_2 = \left\{ \begin{array}{cccc} \underline{4} & 3 & 2 & 2 \end{array} \right\} \tag{228}$$

Då är $y = x_1 \odot x_2$:

$$y(0) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 17 \tag{229}$$

$$y(1) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 19 \tag{230}$$

$$y(2) = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 22 \tag{231}$$

$$y(3) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 19 \tag{232}$$

Lösning 7.9

$$x_1(n) = \left\{ \begin{array}{cccc} \underline{1} & 2 & 3 & 1 \end{array} \right\} \tag{233}$$

$$x_2(n) = \left\{ \begin{array}{cccc} \underline{4} & 3 & 2 & 2 \end{array} \right\} \tag{234}$$

$$x_3(n) = x_1(n) \odot x_2(n) \tag{235}$$

$$X(k) = \mathrm{DFT}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{3} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi nk/4} \quad k = 0 \ldots 3 \tag{236}$$

$$X_1(0) = 7 \qquad X_2(0) = 11 \tag{237}$$

$$X_1(1) = -2 - \mathrm{j} \qquad X_2(1) = 2 - \mathrm{j} \tag{238}$$

$$X_1(2) = 1 \qquad X_2(2) = 1 \tag{239}$$

$$X_1(3) = X_1^*(1) = -2 + \mathrm{j} \qquad X_2(3) = X_2^*(1) = 2 + \mathrm{j} \tag{240}$$

$$X_3(k) = X_1(k) X_2(k) \tag{241}$$

$$X_3(0) = 77 \tag{242}$$
$$X_3(1) = -5 \tag{243}$$
$$X_3(2) = 1 \tag{244}$$
$$X_3(3) = -5 \tag{245}$$

$$x(n) = \text{IDFT}\{X(k)\} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi nk/4} \quad n = 0\ldots 3 \tag{246}$$

$$x_3(0) = 17 \tag{247}$$
$$x_3(1) = 19 \tag{248}$$
$$x_3(2) = 22 \tag{249}$$
$$x_3(3) = 19 \tag{250}$$

Lösning 7.10

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \quad 0 \le n \le N-1 \tag{251}$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{N}\,n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1+\cos\left(\frac{4\pi k}{N}\,n\right)}{2} \tag{252}$$

$$\tag{253}$$

För $k = 0$ och $k = \frac{N}{2}$:

$$E_x = N \tag{254}$$

$$\tag{255}$$

För $k \neq 0$ och $k \neq \frac{N}{2}$:

$$E_x = \frac{N}{2} + \frac{1}{4}\cdot\left(\underbrace{\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi kN/N}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}4\pi k/N}}}_{=0} + \underbrace{\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi kN/N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi k/N}}}_{=0}\right) = \frac{N}{2} \tag{256}$$

Lösning 7.11

$X(k)$ för $k = 0\ldots 7$ är given.

$$\begin{cases} x_1(n) = x(n-5 \mod 8) \\ x_2(n) = x(n-2 \mod 8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1(k) = X(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{k}{8}\cdot 5} \\ X_2(k) = X(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\cdot\frac{k}{8}\cdot 2} \end{cases} \tag{257}$$

Lösning 7.18

$Y(k) = H(f)$ där $f = \frac{k}{N}$.

Lösning 7.23

a) $X(k) = 1$

b) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n-n_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn_0/N} \quad k = 0,\ldots,N-1$

c) $X(k) = \dfrac{1-a^N}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}}$

d)

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le \frac{N}{2}-1 \\ 0 & \frac{N}{2} \le n \le N-1 \end{cases} \quad N \text{ jämnt} \tag{258}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N} = \{k \ne 0\} \tag{259}$$

$$= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k\ N/2\cdot N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}} = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/2}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}} = \tag{260}$$

$$= \frac{1-(-1)^k}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi k/N}} \quad k = 1,\ldots,N-1 \tag{261}$$

$$X(0) = \frac{N}{2} \tag{262}$$

e) $x(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k_0 n}$ (obs fel i boken) $\Rightarrow$ $X(k) = N\cdot\delta(k-k_0)$

f) $X(k) = \frac{N}{2}\left(\delta(k-k_0)+\delta(k-(N-k_0))\right)$

g) $X(k) = \frac{N}{2\mathrm{j}}\left(\delta(k-k_0)-\delta(k-(N-k_0))\right)$

h) Förutsätt att N är jämnt

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ jämnt} \\ 0 & n \text{ udda} \end{cases} \tag{263}$$

$$X(k) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(1+(-1)^n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi kn/N} = \frac{N}{2}\left(\delta(k)+\delta\left(k-\frac{N}{2}\right)\right) \tag{264}$$

Lösning 7.24

$$X(k) = 1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\ \pi k/2} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\ 3\pi k/2} = \left\{\ 7 \quad -2-\mathrm{j} \quad 1 \quad -2+\mathrm{j}\ \right\} \tag{265}$$

Lösning 7.25

a)

$$x(n) = \left\{\ 1 \quad 2 \quad \underline{3} \quad 2 \quad 1 \quad 0\ \right\} \tag{266}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} + 3 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} = \tag{267}$$

$$= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega \tag{268}$$

b)

$$v(n) = \left\{ \begin{array}{cccccc} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right\} \tag{269}$$

$$V_{DFT}(k) = \sum_{n=0}^{5} v(n) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{k}{6}\, n} \tag{270}$$

$$= 3 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{3}\, k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}\, k} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{3}\, k} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5\pi}{3}\, k} \tag{271}$$

c) $V_{DFT}(k) = 3 + 4\cos\frac{\pi}{3}k + 2\cos\frac{2\pi}{3}k$ för $k = 0 \ldots 5$. Det vill säga $V_{DFT}(k) = X(\omega_k)$ där $\omega_k = 2\pi\frac{k}{6}$ för $k = 0 \ldots 5$.

Lösning E5.1

Låt $x_1(n) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$ och $x(n)$ är cirkulärt skift av $x_1(n)$. Skift påverkar endast fasen, således $|X(k)| = |X_1(k)| = \left| \frac{\sin 2\pi\frac{k}{4}}{\sin 2\pi\frac{k}{16}} \right|$.

Lösning E5.2

a) $y(n) = x(-n) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 2 & 7 & 8 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right\}$.

b) $y(n) = x(n-4 \mod 8) = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 8 & 7 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right\}$.

Lösning E5.3

$$H_{FIR}(f) = H_{IIR}(f) \quad \text{för } f = k \cdot \frac{1}{N} \text{ ty insignalen periodisk} \tag{272}$$

$$\tag{273}$$

$$h_{FIR}(n) = \mathrm{IDFT}\left\{ H_{FIR}\left(\frac{k}{N}\right) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H_{FIR}\left(\frac{k}{N}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\, kn/N} \tag{274}$$

där

$$H_{FIR}\left(\frac{k}{N}\right) = H_{IIR}\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{IIR}(m) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\, km/N} \tag{275}$$

$$\tag{276}$$

$$h_{FIR}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\infty} h_{IIR}(m) \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\, k/N\, (n-m)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} h_{IIR}(n - \ell N) \tag{277}$$

Jämför vikning

$$h_{FIR}(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{0} a^{n-\ell N} = a^n \frac{1}{1-a^N} \cdot [u(n) - u(n-N)] \tag{278}$$

Lösning E5.4

$f_0 = \pm 138 + n \cdot 400 = \{ \; 138 \quad 262 \quad \ldots \; \}$.

Lösning E5.5

1-C, 2-F, 3-G, 4-H.

Lösning E5.6

a)

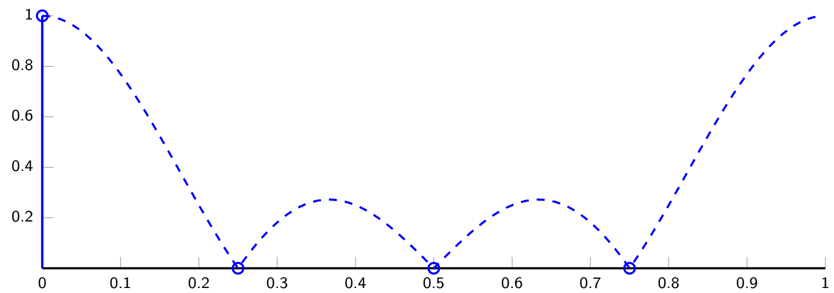
$$H(f) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2f} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 3f} \tag{279}$$

$$\tag{280}$$

$$H(k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi k/N} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 2k/N} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi 3k/N} + 0 + 0 + \ldots + 0 \tag{281}$$

för $k = 0 \ldots N-1$. $H(k)$ är sampel av $H(f)$ i punkterna $f = \frac{k}{N}$, $k = 0 \ldots N-1$.

b) $H(0) = 1$, $H(1) = 0$, $H(2) = 0$ samt $H(3) = 0$. $h_p(n) = \frac{1}{4}$ för alla värden på n.



Lösning E5.7

$Y(k/N) = X(k/N)$

Lösning E5.8

a) $y(n) = \delta(n) + 2\,\delta(n-1) + 1.5\,\delta(n-2) + 0.5\,\delta(n-3)$

b) Se ovan.

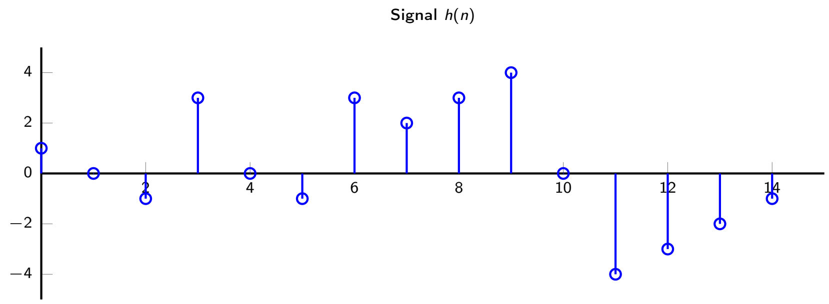
c) $M = 4$; allmänt är $M = P + Q - 1$ där P är impulssvarslängden och Q är insignallängden.

Lösning E5.9

$$y_p(n) = \sum_{l=0}^{L} b_l \quad \text{för } n = 0 \ldots N-1 \tag{282}$$

Lösning E5.10

Metoden kallas overlap-add om beräkningen av utsignalen görs med DFT.

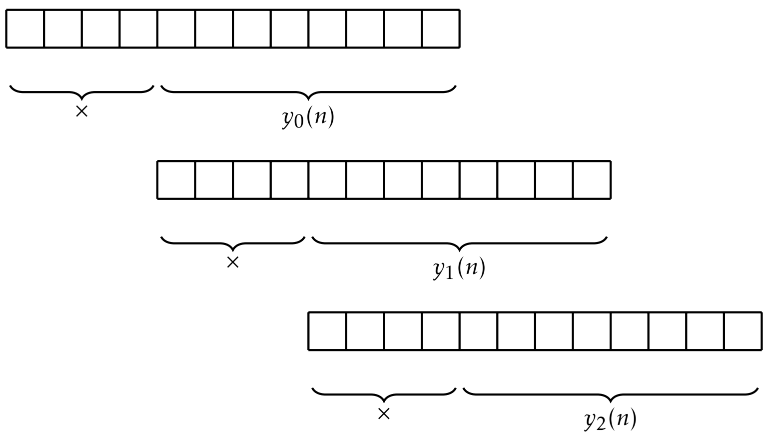


Lösning E5.11

$$y(n) = \begin{cases} \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{10}}(\frac{1}{2})^n & 0 \leq n \leq 9 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{283}$$

Lösning E5.12

Figuren illustrerar hur uppdelningen görs. Exempel med $M = 4$ och $N = 12$.



Realiseringar, kapitel 9

Lösning 9.3

Välj tillståndsvariabeln $v(n)$ efter fördröjningselementet, vilket ger

$$v(n+1) = \frac{1}{2}\,v(n) + x(n) \tag{284}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= 2[v(n+1) + 3x(n)] + 2v(n) = && (285)\\ &= v(n) + 2x(n) + 6x(n) + 2v(n) = && (286)\\ &= 3v(n) + 8x(n) && (287) \end{aligned}$$

och tillståndsmatriserna $F = \frac{1}{2}$, $q = 1$, $g^T = 3$ samt $d = 8$. Impulssvaret blir

$$h(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + 8\delta(n) \tag{288}$$

$$H(z) = \frac{3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 8 = \frac{8-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \tag{289}$$

Lösning 9.9

a)

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) \tag{290}$$

- Direkt I: ur differensekvationen
- Direkt II: ur F.S. + diff.ekv.
- Kaskad: z-trans av diff.ekv.

$$H(z) = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \tag{291}$$

- Parallell:

$$H(z) = \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \tag{292}$$

f)

$$y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2) \tag{293}$$

Systemet innehåller komplexa poler, det vill säga D.F.II, kaskad och parallell är ekvivalenta.

Lösning 9.15

OBS! Fel i Proakis upplaga 3: $a_2(2) = \frac{1}{3}$.

$$H(z) = A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \tag{294}$$

$$B_2(z) = \frac{1}{3} + 2z^{-1} + z^{-2} \quad \text{ger} \quad K_2 = \alpha_2(2) = \frac{1}{3} \tag{295}$$

$$A_1(z) = \frac{A_2(z) - K_2B_2(z)}{1-K_2^2} = \frac{1+2z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+2z^{-1}+z^{-2}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} \tag{296}$$

$$= 1 + \frac{4/3}{8/9}\,z^{-1} = 1 + \frac{3}{2}\,z^{-1} \tag{297}$$

$$B_1(z) = \frac{3}{2} + z^{-1} \quad \text{ger} \quad K_1 = \alpha_1(1) = \frac{3}{2} \tag{298}$$

$$A_0(z) = \frac{1+\frac{3}{2}z^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+z^{-1}\right)}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5/4}{5/4} = 1 \tag{299}$$

$$K_2 = \frac{1}{3} \quad K_1 = \frac{3}{2} \quad (K_0 = 1) \tag{300}$$

Lösning 9.19

a)

$$K_1 = \frac{1}{2} \quad K_2 = -\frac{1}{3} \quad K_3 = 1 \tag{301}$$

$$A_0(z) = B_0(z) = 1 \tag{302}$$

$$A_1(z) = A_0(z) + K_1(z) \cdot z^{-1} \cdot B_0(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} \tag{303}$$

$$B_1(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} \tag{304}$$

$$\begin{cases} A_2(z) & = A_1(z) + K_2(z) \cdot z^{-1} \cdot B_1(z) = 1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} + z^{-1}\right) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} \\ B_2(z) & = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + z^{-2} \end{cases} \tag{305}$$

$$\begin{cases} A_3(z) & = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} \cdot z^{-2} + z^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\, z^{-1} + z^{-2}\right) = 1 + z^{-3} \\ B_3(z) & = 1 + z^{-3} \end{cases} \tag{306}$$

Nollställen:

$$1 + z^{-3} = 0 \tag{307}$$

$$z^{-3} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi(2k+1)} \tag{308}$$

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi(2k+1)/3} \quad \text{för } k = 0, 1, 2 \quad \left(z = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\cdot\pi/3} \quad z = -1\right) \tag{309}$$

b)

$$A_3(z) = 1 + \frac{1}{3} z^{-1} - \frac{1}{3} z^{-2} + (-1) \cdot z^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} z^{-1} + z^{-2}\right) \tag{310}$$

$$= 1 + \frac{2}{3} z^{-1} - \frac{2}{3} z^{-2} - z^{-3} \tag{311}$$

$$B_3(z) = -1 - \frac{2}{3}\, z^{-1} + \frac{2}{3}\, z^{-2} + 1 \tag{312}$$

$$A_3(z) = (1 - z^{-1})\left(1 + \frac{5}{3}\, z^{-1} + z^{-2}\right) - \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - 1} = \frac{-5 \pm \mathrm{j} \cdot \sqrt{11}}{6} \tag{313}$$

c) Om sista reflektionskoefficientens belopp är lika med ett ligger alla nollställen på enhetscirkeln.

d) För a):

$$H(z) = 1 + z^{-3} \tag{314}$$

$$H(\omega) = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 3\omega} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 3\omega/2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\cdot 3\omega/2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\cdot 3\omega/2}\right) = 2 \cdot cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\, 3\omega/2} \tag{315}$$

$$0 \le \omega < \frac{\pi}{3} \quad \to \quad \theta(\omega) = -\frac{3\omega}{2} \tag{316}$$

$$\frac{\pi}{3} < \omega \le \pi \quad \to \quad \theta(\omega) = \pi - \frac{3\omega}{2} \tag{317}$$

Linjär fas (symmetriskt FIR)

För b):

$$H(z) = 1 + \frac{2}{3} z^{-1} - \frac{2}{3} z^{-2} - z^{-3} \tag{318}$$

$$H(\omega) = 1 + \frac{2}{3} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} - \frac{2}{3} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{3\omega}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot 2\left(\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right) + \frac{2}{3} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \tag{319}$$

Alla nollställen på enhetscirkeln ger linjär fas.

Exempel på design av filter

Lösning E8.1

a) $p_{1,2,3} = 0$, $n_{1,2} = \pm j$, $n_3 = -1$

b) $|H(\omega)| = 2 \cdot |\cos(3\omega/2) + \cos(\omega/2)|$

c) $\arg(H(\omega)) = -3\omega/2 +$ fashopp med π

d) $\omega = \pm\pi/2$, $\omega = \pi$

e) Lågpassfilter.

Lösning E8.2

a) $p_{1,2,3} = 0$, $n_{1,2} = \pm j$, $n_3 = 1$

b) $|H(\omega)| = 2 \cdot |\sin(3\omega/2) - \sin(\omega/2)|$

c) $\arg(H(\omega)) = \pi/2 - 3\omega/2 +$ fashopp med π

d) $\omega = \pm\pi/2$, $\omega = 0$

e) Högpassfilter.

Lösning E8.3

a) $h(n) = \frac{1}{5} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5} \cdot [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3) + \delta(n-4)]$

b) $H(z) = 1/5 \displaystyle\sum_{n=0}^{4} z^{-n} = 0.2\,\frac{1-z^{-5}}{1-z^{-1}}$

c) $H(f)$ periodisk sinc, $|H(f)| = 0$ för $f = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8$

Lösning E8.4

Prova med 1:a ordningen: $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$. $H(\omega)|_{\omega=\pi/2} = e^{j\pi/3}$ ger $b_0 = 1/2$ och $b_1 = -\sqrt{3}/2$.

Lösning E8.5

$H(2/5) = H(-2/5) = 0$ ger nollställen i $z_{1,2} = e^{\pm j4\pi/5}$. $|H(1/5)| = |H(-1/5)| = 1$ ger troligen två nollställen till. Linjär fas ger symmetriskt eller antisymmetriskt impulssvar. En test ger att 2 eller 3 nollställen inte räcker.

$$h(n) = -0.1232\delta(n) + 0.3232\delta(n-1) + 0.6\delta(n-2) + 0.3232\delta(n-3) - 0. - 0.1232\delta(n-4) \tag{320}$$

$$h(n) = 0.5236\delta(n) + 0.0764\delta(n-1) - 0.2\delta(n-2) + 0.0764\delta(n-3) + 0.5236\delta(n-4) \tag{321}$$

Lösning E8.6

$$H(z) = k \cdot \frac{(z+1)^N}{z^N} \tag{322}$$

$$H(\omega) = k \cdot \frac{(e^{j\omega}+1)^N}{e^{j\omega N}} = k \cdot e^{-j\omega\, N/2}\left(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}\right)^N = k \cdot e^{-j\omega\, N/2} \cdot 2^N \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^N \tag{323}$$

$$H(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 2^{-N} \tag{324}$$

$$|H(\omega)| = \left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^N \tag{325}$$

Vid $\omega = 2\pi \cdot 0.1$:

$$H(\omega)|_{\omega=2\pi\cdot 0.1} = \left(\cos\frac{2\pi\cdot 0.1}{2}\right)^N > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad N < 6.9 \tag{326}$$

Vid $\omega = 2\pi \cdot 0.4$:

$$\left(\cos\frac{2\pi\cdot 0.4}{2}\right)^N < 0.1 \quad \Rightarrow \quad N > 1.96 \tag{327}$$

Det vill säga $2 \leq N < 6$. Minimalt: $N = 2$

$$H(z) = 2^{-2} \cdot \left(\frac{z+1}{z}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2z^{-1} + z^{-2}) \tag{328}$$

$$h(n) = \left\{ \underline{\tfrac{1}{4}} \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \right\} \tag{329}$$

Lösning E8.7

FIR-filter för linjär fas och 50 dB dämpning innebär Hammingfönster. −6 dB vid $f = f_1 = 0.1$ vilket ger att vid −50 dB och $f = 0.15$ erhålles $(0.15 - 0.1) \cdot M = 1.62$

$$M = \frac{1.62}{0.05} = 32.4 \quad \Rightarrow \quad M = 33 \tag{330}$$

$$h(n) = \begin{cases} 2 \cdot f_1 \operatorname{sinc}(2f_1(n-16)) \cdot \left[0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-16)}{32}\right] & 0 \leq n \leq 32 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{331}$$

Lösning E8.8

$$\begin{cases} H_{dB}(0.2) = -3\,\text{dB} & \text{ger } (0.2 - f_c)\cdot M = -0.40 \\ H_{dB}(0.25) = -40\,\text{dB} & \text{ger } (0.25 - f_c)\cdot M = 1.49 \end{cases} \tag{332}$$

$$M = \frac{1.49 + 0.40}{0.25 - 0.20} = 37.8 \quad \Rightarrow \quad M = 39 \quad \text{(udda)} \tag{333}$$

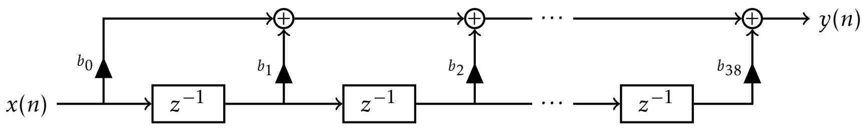
$$\begin{cases} f_c = 0.2 + \frac{0.40}{39} = 0.2103 \\ f_c = 0.25 - \frac{1.49}{39} = 0.2118 \end{cases} \tag{334}$$

Välj $f_c = 0.2103$, men något f_c i intervallet $0.2103 \leq f_c \leq 0.2118$ duger.

$$b_n = \left[h(n) = \hat{h}(n-19) = h_d(n-19)w_H(n-19)\right] \tag{335}$$

$$= \frac{\sin(2\pi\cdot 0.2103(n-19))}{\pi(n-19)} \cdot \left(0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-19)}{38}\right) \tag{336}$$

för $n = 0, \ldots, 38$.



Lösning E8.9

Ur diagram för Hammingfönster:

$$\begin{cases} -0.4 = -(0.16 - f_c)M \\ 1.49 = -(0.10 - f_c)M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 33 \\ f_c = 0.1479 \end{cases} \tag{337}$$

$$w_H(n) = 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi n}{32} \tag{338}$$

$$h_d(n) = \delta(n) - 2f_c\,\mathrm{sinc}(2f_c n) \tag{339}$$

$$\hat{h}(n) = h_d(n-16)\; w_H(n-16) \quad 0 \le n \le 32 \tag{340}$$

Lösning E8.10

Utgå från ett idealt BP-filter:

$$h_d(n) = 4f_c\,\mathrm{sinc}(2f_c n)\cdot\cos(2\pi f_0 n) \tag{341}$$

Trunkera $h_d(n)$ med hjäp av $w_H(n)$. Hammingfönster tillräckligt ty max 40 dB dämpning.

$$w_H(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi n}{M-1} & -\frac{M-1}{2} \le n \le \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{342}$$

Bilda

$$\hat{h}(n) = h_d(n)\cdot w_H(n) \tag{343}$$

Förskjut sedan $\hat{h}(n)$ tills det blir kausalt:

$$h(n) = \hat{h}\left(n - \frac{M-1}{2}\right) \tag{344}$$

Det som behövs bestämmas är alltså M, f_0 och f_1. Vi tittar först på den vänstra övergångszonen. Formelsamlingen ger

$$\begin{cases} -(0.05 - (f_0 - f_1))M = 1.49 \quad (-40\,\text{dB}) \quad (1) \\ -(0.10 - (f_0 - f_1))M = -0.4 \quad (-3\,\text{dB}) \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \quad 0.05\cdot M = 1.89 \quad \Rightarrow \quad M = 37.8 \tag{345}$$

Sedan tittar vi på den högra övergångszonen:

$$\begin{cases} (0.25 - (f_0 + f_1))M = -0.4 \quad (-3\,\text{dB}) \quad (3) \\ (0.275 - (f_0 + f_1))M = 0.91 \quad (-20\,\text{dB}) \quad (4) \end{cases} \Rightarrow \quad 0.025\cdot M = 1.31 \quad \Rightarrow \quad M = 52.4 \tag{346}$$

För att uppfylla kraven vid båda övergångszonerna krävs $M > \max(37.8,\ 52.4)$: välj $M = 53$. Vi hade dessutom kravet att vid frekvenserna 0.10 och 0.25 skall dämpningen vara 3 dB, vilket innebär att när vi löser ut f_0 och f_1 så måste vi använda ekv. (2) och (3). Det M-värde som sättes in är nu $M = 53$, i både ekv. (2) och (3).

$$\begin{cases} \text{ekv (2)} \quad \Rightarrow \quad (0.10 - (f_0 - f_1))\cdot 53 = 0.4 \\ \text{ekv (3)} \quad \Rightarrow \quad (0.25 - (f_0 + f_1))\cdot 53 = -0.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_0 = 0.175 \\ f_1 = 0.0825 \end{cases} \tag{347}$$

Alltså:

$$h_d(n) = 0.3302\cdot\mathrm{sinc}(0.1652n)\cdot\cos(2\pi\cdot 0.175n) \tag{348}$$

$$w_H(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi n}{52} & -26 \le n \le 26 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{349}$$

och

$$h(n) = h_d(n-26)\cdot w_H(n-26) \tag{350}$$

$$= \begin{cases} [0.3302\cdot\mathrm{sinc}(0.1652(n-26))\cdot\cos(2\pi\cdot 0.175(n-26))]\times\left[0.54 + 0.46\cos\frac{2\pi(n-26)}{52}\right] & 0 \le n \le 52 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \tag{351}$$

Lösning E8.11

Centerfrekvensen är $f_0 = 0.2096$, $f_c = 0.1233$ och $M = 41$ (ges ur uttrycket). Detta insättes i

$$(f_1 - (f_0 + f_c))M = -0.4 \quad \rightarrow \quad f_1 = 0.3231 \tag{352}$$

för högra sidan (lågpass) och i

$$-(f_2 - (f_0 - f_c))M = -0.4 \quad \rightarrow \quad f_2 = 0.0960 \tag{353}$$

för vänstra sidan (högpass). Bandbredden, $\Delta f = f_1 - f_2 = 0.2270$.

Lösning E8.12

$H(z)$ skall ha linjär fas. Sätt $H_2(z) = a + bz^{-1} + cz^{-2}$ ty första ordningen räcker ej. Genom att beräkna $H(f)$ ser vi att linjär fas fås om

$$a = cr^2 \tag{354}$$

$$b - 2ar\cos(\theta) = br^2 - 2cr\cos(\theta) \tag{355}$$

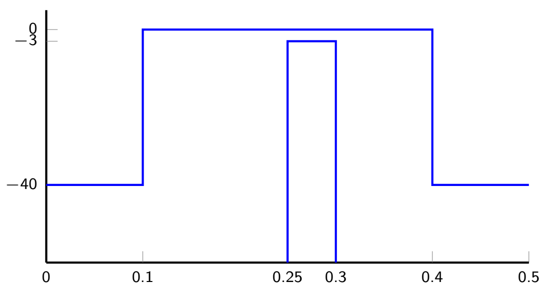
Tillsammans med kravet på likspänningsförstärkningen ger detta

$$H_2(z) = r^2 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + z^{-2} \tag{356}$$

$H(z)$ är av ordning 4 och har symmetriskt impulssvar. Detta ger $\arg(H(f)) = -4\pi f$.

Lösning E8.13

Sampling med 10 MHz ger vikning. Övertonerna viks till frekvensområdet 4 MHz to 5 MHz och störningarna viks till 0 MHz to 1 MHz. Detta ger ett bandpassfilter med följande krav.



Ett Hammingfönster ger $L = 19$, $f_0 = 0.275$ och $f_1 = 0.0461$. Impulssvaret blir

$$h(n) = \left(0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi(n-9)}{18}\right)\right)\cdot 4f_1\,\mathrm{sinc}(2f_1(n-9))\cos(2\pi f_0(n-9)) \quad 0 \le n \le 18 \tag{357}$$