Övningsuppgifter

Digital Signal Processing

Övningar med svar och lösningar

Mikael Swartling   Nedelko Grbic   Bengt Mandersson

rev. 2017

Department of Electrical and Information Technology
Lund University

Introduktion

Uppgift 1.2

Bestäm vilka av följande signaler som är periodiska och bestäm periodtiden.

a) $\cos(0.01\pi n)$

b) $\cos(\pi \frac{30}{105} n)$

c) $\cos(3\pi n)$

d) $\sin(3n)$

e) $\sin(\pi \frac{62n}{10})$.

Uppgift 1.5

Den analoga signalen $x_a(t)$ är $x_a(t) = 3\sin(100\pi t)$.

a) Skissa $x_a(t)$ för $0\,\text{ms} \leq t \leq 30\,\text{ms}$.

b) Sampla med $F_s = 300$ sampel/s. Bestäm $x(n) = x_a(nT)$ där $T = 1/F_s$. Bestäm frekvensen f hos $x(n)$ och visa att $x(n)$ är periodisk.

c) Skissa $x(n)$. Vad är perioden och vad motsvarar det i ms?

d) Bestäm minsta F_s så att när $x_a(t)$ samplas så antar max av $x(n)$ värdet 3 vid $0 \leq n < N$ där N är periodtiden för $x(n)$.

Uppgift 1.7

En analog signal innehåller frekvenser upp till 10 kHz.

a) Vilka sampelfrekvenser kan användas om vi vill kunna rekonstruera signalen exakt?

b) Antag att sampelfrekvensen $F_s = 8\,\text{kHz}$. Vad händer med frekvenskomponenten $F_1 = 5\,\text{kHz}$?

c) Antag att sampelfrekvensen $F_s = 8\,\text{kHz}$. Vad händer med frekvenskomponenten $F_1 = 9\,\text{kHz}$?

Uppgift 1.8

Ett analogt elektrokardiogram (EKG) innehåller frekvenser upp till 100 Hz.

a) Vad är Nyquist rate för signalen?

b) Vilken är den högsta frekvenskomponent som kan representeras unikt med sampelfrekvensen $F_s = 250\,\text{Hz}$?

Kommentar: Högsta frekvenskomponenten hos signalen kallas Nyquist frequency och den dubbla frekvensen kallas Nyquist rate. Samplingsfrekvensen måste alltså väljas högre än Nyquist rate för att undvika vikningsdistorsion.

Uppgift 1.11

För att visa effekten av vikning gör vi följande. Vi samplar in signalen $x(t) = 3\cos(100\pi t) + 2\sin(250\pi t)$ med sampelfrekvensen $F_s = 200\,\text{Hz}$ utan att ha något analogt filter före samplingen. Vi lyssnar sedan på signalen med sampelfrekvensen $F_s = 1000\,\text{Hz}$ (ideal rekonstruktion). Hur ser signalen ut efter rekonstruktionen?

Matlab: Vid inspelning med ljudkort i PC filtreras den analoga signalen automatiskt med ett analogt filter med brytfrekvens $F_s/2$ före samplingen för att undvika vikningsdistorsion. Vill vi illustrera exemplet ovan kan vi exempelvis sampla med $F_s = 1000\,\text{Hz}$ vilket ställer gränsfrekvensen i ljudkortets filter till 500 Hz. Nu behåller vi bara vart femte sampel och har då reducerat sampeltakten till 200 Hz och detta motsvarar att vi samplat med 200 Hz men med det analoga filtret inställt på 500 Hz.

Uppgift 1.13

Den diskreta signalen $x(n) = 6.35\cos((\pi/10)n)$ kvantiseras med upplösningen

a) $\Delta = 0.1$, och

b) $\Delta = 0.02$.

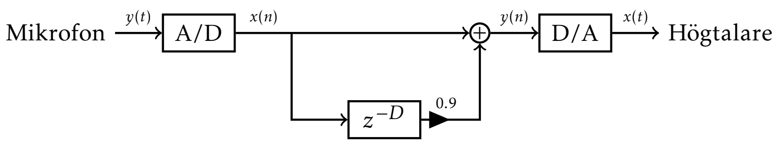
Hur många bitar behövs i A/D-omvandlaren?

Uppgift 1.14

Bestäm bithastighet (bitar/s) och upplösning om en seismisk signal med dynamik 1 volt samplas med $F_s = 20\,\text{Hz}$ med en 8-bitars A/D-omvandlare. Vilken maximal frekvens kan representeras i den digitala signalen?

Uppgift E1.1

MATLAB: För att åstadkomma ekoeffekt använder vi oss av nedanstående koppling (z^{-D} fördröjer signalen D sampel).



Simulera detta i MATLAB och lyssna på effekten.

```
>> Fs = 10000;
>> t = (0:2*Fs-1)/Fs;            % generera 2s lång tidsvektor, FS=1/10000
>> x = chirp(t, 300, 2, 800);    % generera svept sinus mellan 300 och 800 Hz
>> z = zeros(1, 500);            % generera 500 nollor
>> x1 = [x, z];
>> x2 = [z, 0.9*x];
>> y = x1+x2;                    % generera ekot
```

Lyssna på signalerna.

```
>> soundsc(x, Fs)
>> soundsc(y, Fs)
```

Välj nytt x (samplat tal och lyssna på ekoeffekten).

Impulssvar och faltning, kapitel 2

Uppgift 2.1

En tidsdiskret signal $x(n)$ definieras av

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \frac{n}{3} & -3 \le n \le -1 \\ 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & n < -3 \text{ och } n > 3 \end{cases} \tag{1}$$

a) Skissa signalen $x(n)$.

b) Skissa signalen för följande alternativ.

   i) Vik (spegla i origo) $x(n)$ och fördröj c.

   ii) Fördröj $x(n)$ 4 sampel och vik (spegla i origo).

c) Skissa $x(-n+4)$.

d) Vilket alternativ i b) svarar mot $x(-n+k)$?

e) Uttryck $x(n)$ i $\delta(n)$ och $u(n)$.

Uppgift 2.7

Avgör om nedanstående system är

1) Statiskt eller dynamiskt.

2) Linjärt eller olinjärt.

3) Tidsinvariant eller tidsvariabelt.

4) Kausalt eller icke-kausalt.

5) Stabilt eller instabilt.

a) $y(n) = \cos(x(n))$.

b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$.

c) $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$.

e) $y(n) = \mathrm{trunc}(x(n))$, trunkering till heltal.

h) $y(n) = x(n)u(n)$.

j) $y(n) = x(2n)$.

n) Ideal sampling, $x(n) = x_a(t)$ där $t = nT$ och $-\infty < n < \infty$.

Uppgift 2.13

Visa att ett nödvändigt och tillräckligt villkor för BIBO-stabilitet är $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \leq M_h < \infty$.

Uppgift 2.16

a) Visa att $\sum_n y(n) = \sum_k x(k) \sum_l h(l)$ då $y(n) = x(n) * h(n)$.

b) Beräkna faltningen $y(n) = x(n) * h(n)$ för följande signaler.

1) $x(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad 4 \right\}$ och $h(n) = \left\{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right\}$.

2) $x(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad -1 \right\}$ och $h(n) = x(n)$.

4) $x(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \right\}$ och $h(n) = \left\{ 1 \right\}$.

9) $x(n) = \left\{ 1 \quad 1 \quad \underline{0} \quad 1 \quad 1 \right\}$ och $h(n) = \left\{ 1 \quad -2 \quad -3 \quad \underline{4} \right\}$.

11) $x(n) = 0.5^n u(n)$ och $h(n) = 0.25^n u(n)$.

Uppgift 2.17

Beräkna faltningen $x(n) * h(n)$ för nedanstående signaler.

a) $x(n) = \left\{ \underline{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right\}$ och $h(n) = \left\{ \underline{6} \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right\}$

b) $x(n) = \left\{ \underline{1} \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right\}$ och $h(n) = \left\{ 6 \quad 5 \quad 4 \quad \underline{3} \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right\}$

c) $x(n) = \left\{ \underline{0} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right\}$ och $h(n) = \left\{ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \underline{0} \right\}$

d) $x(n) = \left\{ \underline{0} \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right\}$ och $h(n) = \left\{ 1 \quad 1 \quad \underline{0} \right\}$

MATLAB: Lös ovanstående faltningar i MATLAB (conv.m).

Uppgift 2.21

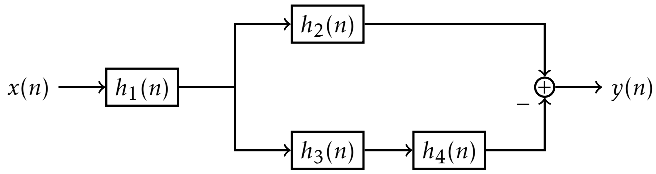
Beräkna faltningen $y(n) = x(n) * h(n)$ för nedanstående signaler.

a) $x(n) = a^n u(n)$ och $h(n) = b^n u(n)$ för både $a \neq b$ och $a = b$.

b) $x(n) = \left\{ 1 \quad 2 \quad \underline{1} \quad 1 \right\}$ och $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$.

Uppgift 2.35

Bestäm $h(n)$ för systemet nedan då $h_1(n) = \left\{ 0.5 \quad 0.25 \quad 0.5 \right\}$, $h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$ och $h_4(n) = \delta(n-2)$. Bestäm utsignalen då $x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$



Uppgift 2.61

Beräkna korrelationsfunktionen $r_{xx}(l)$ och korskorrelationsfunktionen $r_{xy}(l)$ för följande sekvenser.

$$x(n) = 1 \quad \text{för } n_0 - N \le n \le n_0 + N, \text{ noll för övrigt, och} \tag{2}$$

$$y(n) = 1 \quad \text{för } -N \le n \le N, \text{ noll för övrigt.} \tag{3}$$

Uppgift 2.62

Beräkna korrelationsfunktionen $r_{xx}(l)$ för följande sekvenser.

a) $x(n) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{matrix} \right\}$.

b) $y(n) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \right\}$.

Vad är slutsatsen av a) och b) ovan?

MATLAB: Lös a) och b) ovan i MATLAB.

Uppgift 2.64

En ljudsignal från en högtalare reflekteras av två olika väggar med reflexionskoefficienterna r_1 och r_2. Signalen tas upp av en mikrofon nära högtalaren och har utseendet $x(n) = s(n) + r_1 s(n-k_1) + r_2 s(n-k_2)$ där k_1 och k_2 är fördröjningarna hos ekona. Bestäm och skissa autokorrelationsfunktionen $r_{xx}(l)$ för $x(n)$.

z-transform, kapitel 3

Uppgift 3.1

Bestäm z-transformen för

a) $x(n) = \left\{ \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{6} & 1 & -4 \end{matrix} \right\}$

b) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \ge 5 \\ 0 & n \le 4 \end{cases}$

Uppgift 3.2

Bestäm z-transformen för nedanstående signaler och skissa pol-nollställesdiagram.

a) $x(n) = (1+n)u(n)$.

c) $x(n) = (-1)^n \cdot 2^{-n} \cdot u(n)$.

f) $x(n) = Ar^n \cos(\omega_0 n + \phi)u(n) \quad 0 < r < 1$.

h) $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot [u(n) - u(n-10)]$.

Uppgift 3.8

Använd faltning för att bestämma nedanstående transformer.

a) Bestäm $Y(z)$ uttryckt i $X(z)$ för $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$.

b) Bestäm $X(z)$ för $x(n) = (n+1)u(n)$. Tips: Visa att $x(n) = u(n) * u(n)$.

Uppgift 3.9

z-transformen $X(z)$ av den reella signalen $x(n)$ innehåller ett komplexkonjugerat par av poler och ett komplexkonjugerat par av nollställen. Vad händer med dessa om vi multiplicerar $x(n)$ med $\mathrm{e}^{j\omega_0 n}$?
Tips: Använd skalningsteoremet för z-transform.

Uppgift 3.14

Bestäm invers z-transform $x(n)$, $x(n)$ kausal, av följande signaler.

a) $X(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

b) $X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$

c) $X(z) = \dfrac{z^{-6}+z^{-7}}{1-z^{-1}}$

d) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-2}}{1+z^{-2}}$

g) $X(z) = \dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$

MATLAB: Plotta några av dessa funktioner för $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$med hjälp av MATLAB.

Uppgift 3.16

Bestäm faltningen mellan $x_1(n)$ och $x_2(n)$ nedan med hjälp av z-transformen.

a) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u(n-1)$ och $x_2(n) = \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$.

c) $x_1(n) = 0.5^n u(n)$ och $x_2(n) = \cos(\pi n)u(n)$.

Uppgift 3.35

Bestäm utsignalen $y(n) = x(n) * h(n)$ för

a) $h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$ och $x(n) = (1/2)^n \cdot \cos(\pi/3n)u(n)$.

d) $y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-1)$ och $x(n) = 10\cos(\pi/2\ n)\ u(n)$.

Uppgift 3.40

In och utsignal för ett LTI-system är givet av $x(n) = 0.5^n u(n) - 0.25(0.5)^{n-1} \cdot u(n-1)$ och $y(n) = (\frac{1}{3})^n u(n)$.

a) Bestäm kretsens impulssvar $h(n)$ och systemfunktion $H(z)$.

b) Bestäm kretsens differensekvation.

c) Bestäm en realisering av minimal ordning.

d) Är systemet stabilt?

Uppgift 3.49

Använd den enkelsidiga z-transformen för att beräkna $y(n)$ där $n \geq 0$ för följande fall.

b) $y(n) - 1.5y(n-1) + 0.5y(n-2) = 0$, $y(-1) = 1$, $y(-2) = 0$.

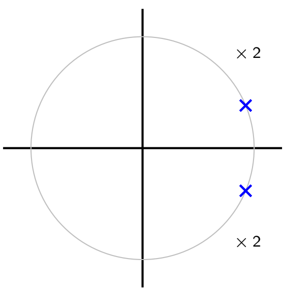
c) $y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$, $x(n) = (1/3)^n u(n)$, $y(-1) = 1$.

d) $y(n) = 0.25(y(n-2) + x(n)$, $x(n) = u(n)$, $y(-1) = 0$, $y(-2) = 1$.

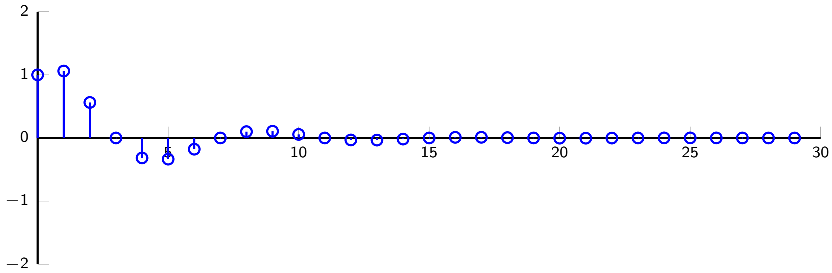
Uppgift E3.1

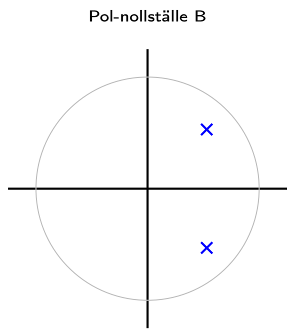
Kombinera varje pol-nollställe-konfiguration med det impulssvar den motsvarar. Hur påverkar polens avstånd till enhetscirkeln impulssvarets utseende? Hur påverkas impulssvaret av dubbelpoler?

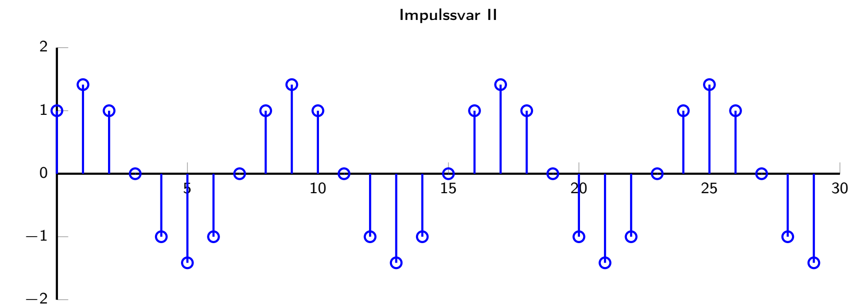
Pol-nollställe A

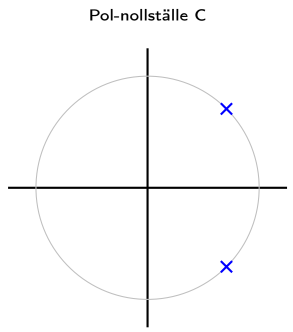


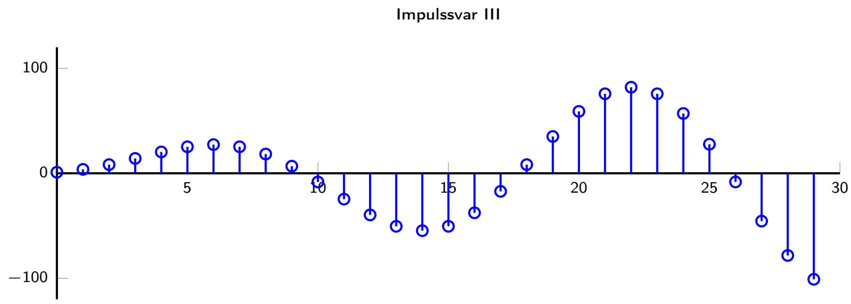
Impulssvar I











Uppgift E3.2

Ett andra ordningens linjärt och tidsinvariant system är definierat av

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \tag{4}$$

a) Bestäm utsignalen $y(n)$ då insignalen $x(n) = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$ där

$$y(-1) = 1/3 \tag{5}$$

och

$$b_0 = 0 \quad b_1 = 1/5 \quad b_2 = 0 \tag{6}$$

$$a_1 = 1/2 \quad a_2 = 0 \tag{7}$$

b) Låt insignalen till systemet ovan vara $x(n) = \sin(2\pi f_0 n)$ för $-\infty < n < \infty$. Koefficienter ställs så att utsignalen $y(n) = 0$ för $-\infty < n < \infty$. Detta inträffar då

$$b_0 = b_1 = b_2 = 2 \tag{8}$$

och

$$a_1 = -\sqrt{2} \quad a_2 = 1/4 \tag{9}$$

Vad är frekvensen f_0 i insignalen?

c) Insignalen till systemet är återigen $x(n) = \sin(2\pi f_0 n)$, $-\infty < n < \infty$. Då koefficienterna är

$$b_0 = 1 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = 1/4 \tag{10}$$

och

$$a_1 = -1 \quad a_2 = 1 \tag{11}$$

erhålles utsignalen $y(n) = A_0 \sin(2\pi f_0 n + \theta_0) + A_1 \sin(2\pi f_1 n + \theta_1)$ för $-\infty < n < \infty$. Vad är frekvensen f_1?

Uppgift E3.3

En linjär tidsinvariant krets beskrivs med differensekvationen

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\, y(n-2) = x(n) \tag{12}$$

Bestäm utsignalen $y(n)$ då

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u(n) + \sin\left(2\pi \frac{1}{4} n\right) \qquad -\infty < n < \infty \tag{13}$$

Uppgift E3.4

En krets är given av differensekvationen $y(n)-y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)$. Kretsen har begynnelsevärdena $y(-1)=0$ och $y(-2)=2$, och insignalen är $x(n)=u(n)$. Bestäm för $n \geq 0$

a) zero-input-lösningen, $y_{zi}(n)$.

b) zero-state-lösningen, $y_{zs}(n)$.

c) transienta lösningen, $y_{tr}(n)$.

d) stationära lösningen, $y_{ss}(n)$.

Uppgift E3.5

En linjär tidsinvariant krets beskrivs av differensekvationen

$$y(n)-\frac{1}{4}\,y(n-1)=x(n) \tag{14}$$

Bestäm utsignalen $y(n)$ då

$$x(n)=\begin{cases}\sin\left(2\pi\frac{1}{4}\,n\right) & n<0\\ 0 & n\geq 0\end{cases} \tag{15}$$

Fouriertransform, signaler genom LTI-system och sampling, kapitel 4, 5 och 6

Uppgift 4.8

Två diskreta signaler $s_k(n)$ och $s_l(n)$ är ortogonala över ett intevall $[N_1,N_2]$ om

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} s_k(n)s_l^*(n)=\begin{cases}A_k & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases} \tag{16}$$

Om $A_k=1$ är signalerna ortonormala.

a) Visa relationen

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}=\begin{cases}N & k=0 \quad k=\pm N \quad k=\pm 2N \quad \ldots\\ 0 & \text{annars}\end{cases} \tag{17}$$

b) Illustrera a) för $N=6$ genom att för $k=1,2,3,4,5,6$ rita $s_k(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}$ för $n=0,1,2,3,4,5$.

c) Visa att harmoniska signaler $s(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\frac{kn}{N}}$ är ortogonala över varje intervall av längd N.

Uppgift 4.9

Bestäm fouriertransformen av följande signaler.

a) $x(n)=u(n)-u(n-6)$.

b) $x(n)=2^n u(-n)$.

c) $x(n)=(0.25)^n u(n+4)$.

d) $x(n)=(\alpha^n \sin(\omega_0 n))\,u(n)$ för $|\alpha|<1$.

g) $x(n)=\left\{\begin{array}{ccccc} -2 & -1 & \underline{0} & 1 & 2\end{array}\right\}$.

Uppgift 4.10

Bestäm tidssignalen vars fouriertransform är

a) $X(\omega)=\begin{cases}0 & 0\leq\omega\leq\omega_0\\ 1 & \omega_0<\omega\leq\pi\end{cases}$

b) $X(\omega)=\cos^2\omega$

Fouriertransformerna antas vara symmetriska för de negativa frekvenserna så tidssignalerna är reellvärda.

Uppgift 4.12

Bestäm signalen vars fouriertransform är

c) $X(\omega) = \begin{cases} 2 & \omega_c - W/2 \leq |\omega| \leq \omega_c + W/2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

Uppgift 4.14

Sekvensen $x(n)$ är given av $x(n) = \left\{ \begin{array}{ccccc} -1 & 2 & \underline{-3} & 2 & -1 \end{array} \right\}$ och dess fouriertransform är $X(\omega)$. Bestäm, utan att explicit bestämma $X(\omega)$, följande

a) $X(0)$

b) $\arg X(\omega)$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) d\omega$

d) $X(\pi)$

e) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega$

MATLAB: Beräkna $X(\omega)$ och plotta $|X(\omega)|$ och $\arg X(\omega)$.

Uppgift 5.2

a) Bestäm och skissa fouriertransformen $W_R(\omega)$ för ett rektangelfönster

$$w_R(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{18}$$

b) Bestäm och skissa fouriertransformen av ett triangelfönster $w_T(n)$

$$w_T(n) = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq M/2 \\ M - n & M/2 < n \leq M \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \tag{19}$$

genom att utnyttja faltning av två rektangelfönster enligt a.

MATLAB: Plotta $W_R(\omega)$ för $M = 2$, $M = 4$ och $M = 5$.

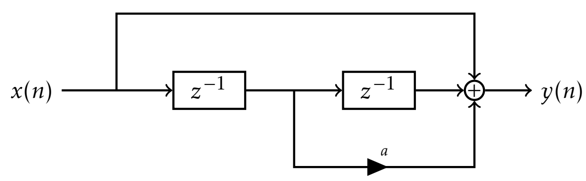
Uppgift 5.17

En tidsdiskret krets är given av figuren med $a = -2\cos(\omega_0)$

a) Bestäm in-utsignalrelation och impulssvar $h(n)$.

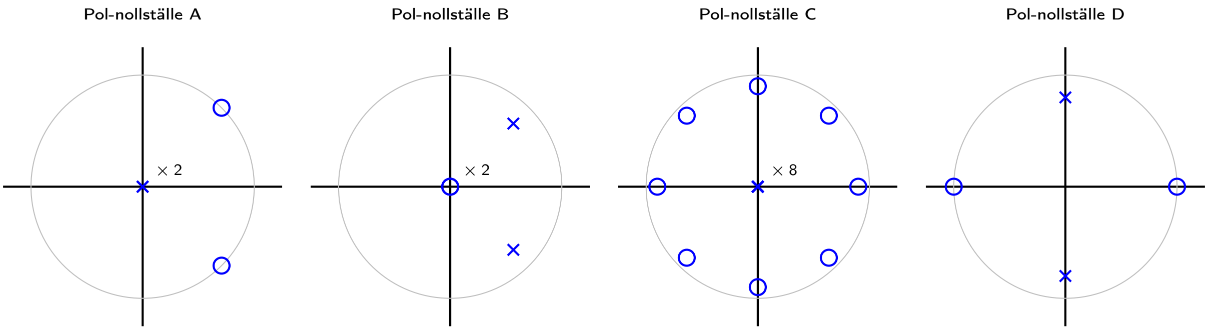
b) Skissa $|H(\omega)|$ och $\arg H(\omega)$.

c) Bestäm $y(n)$ då $x(n) = 3\cos(\pi/3\, n + \pi/6)$ för $-\infty < n < \infty$ och $\omega_0 = \pi/2$.



Uppgift 5.25

Skissa $|X(f)|$ svarande mot följande pol-nollställeskonfigurationer.



Uppgift 5.26

Bestäm ett filter som helt spärrar frekvensen $\omega_0 = \pi/4$ och beräkna utsignalen då insignalen $x(n) = \sin(\pi/4\, n)u(n)$ för $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Uppgift 5.35

Ett andra ordningens system har en dubbelpol för $p_{1,2} = 0.5$ och två nollställen $z_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}3\pi/4}$. Bestäm förstärkningsfaktorn G så att $|H(0)| = 1$.

Uppgift 5.39

Bestäm 3-dB bandbredden för filtren där $0 < a < 1$.

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}} \tag{20}$$

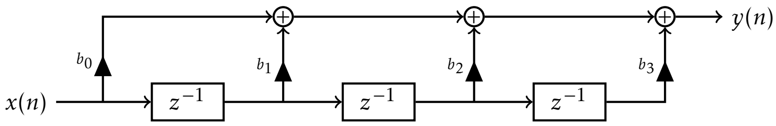
$$H_2(z) = \frac{1-a}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}} \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

MATLAB: Plotta amplitudfunktionerna i MATLAB och uppskatta därur bandbredderna.

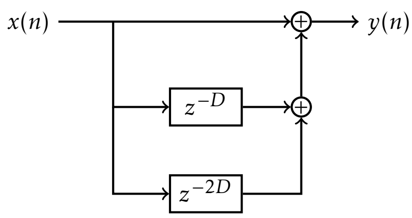
Uppgift E4.1

Dimensionera nedanstående krets så att likspänningsförstärkningen blir 1 och så att frekvenserna $\omega = \pi/2$ och $\omega = \pi$ spärras. Bestäm också kretsens amplitudfunktion och fasfunktion.



Uppgift E4.2

Vi vill skapa ekoeffekt och använder oss av nedanstående koppling.

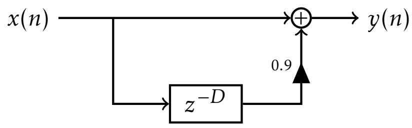


a) Bestäm den digitala kretsens poler och nollställen för $D = 500$.

b) Bestäm och skissa den digitala kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

Uppgift E4.3

Vi använder oss av nedanstående koppling för att få en ekoeffekt.



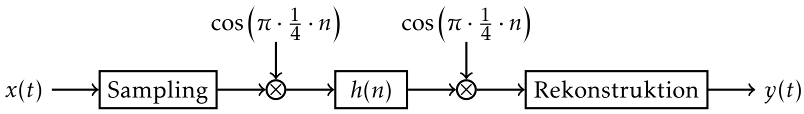
a) Bestäm den digitala kretsens impulssvar.

b) Bestäm den digitala kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Bestäm den digitala kretsens poler och nollställen för $D = 500$.

Uppgift E4.4

Insignalen till nedanstående system är $x(t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 6000t)$. Filtrets impulssvar $h(n) = u(n) - u(n-8)$. Sampeltakten är 8 kHz.



Bestäm utsignalen $y(t)$ då rekonstruktionen är ideal.

MATLAB: Simulera systemet i MATLAB. Välj gärna ljud som insignal.

Sampling

Uppgift E4.5

Antag att vi har en tidskontinuerlig signal $x_a(t) = \mathrm{e}^{-10 \cdot t} \cdot u(t)$, t i sekunder.

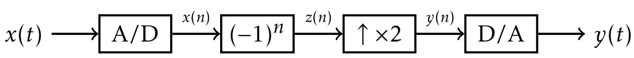
a) Bestäm signalens fouriertransform $X_a(F)$ samt $|X_a(F)|^2$.

b) Vi vill sampla signalen med $F_s = 100\,\text{Hz}$. Vi förfiltrerar den därför med ett antivikningsfilter. Detta antas vara ett idealt lågpassfilter med gränsfrekvens $F_s/2 = 50\,\text{Hz}$. Hur stor del av energin i signalen $x_a(t)$ spärras av antivikningsfiltret?

c) Den filtrerade signalen samplas med samplingsfrekvensen F_s. Beräkna beloppet av Fouriertransformen av den samplade signalen $y(n)$. Beräkna också Fouriertransformen av den samplade signalen om antivikningsfiltret tas bort.

Uppgift E4.6

Bestäm utsignalen från nedanstående krets då insignalen är $x_a(t) = 2 \cdot \cos(2\pi \cdot F_0 t)$ då $F_0 = 600\,\text{Hz}$ och $F_s = 1000\,\text{Hz}$.



Teckenskiftaren utför operationen $x_1(n) = (-1)^n x(n)$ och uppsamplaren

$$y(n) = \begin{cases} z\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ jämn} \\ 0 & n \text{ udda} \end{cases} \tag{23}$$

Rekonstruktionen är ideal och sker med samplingstakten $2F_s$.

Diskreta fouriertransformen DFT, kapitel 7

Uppgift 7.1

De fem första värdena av en 8-punkters DFT av en reell sekvens ges av

$$\left\{\ 0.25 \quad 0.125 - \mathrm{j}0.3018 \quad 0 \quad 0.125 - \mathrm{j}0.0518 \quad 0\ \right\} \tag{24}$$

Bestäm de övriga 3 punkterna.

MATLAB: Kolla resultatet i MATLAB.

Uppgift 7.2

Bestäm den cirkulära faltningen mellan följande signaler ($N = 8$)

a) $x_1 = \{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}$ och $x_2 = \sin(\frac{3\pi}{8} n)$ för $0 \le n \le N-1$.

Uppgift 7.3

Givet N-punkts DFT $X(k)$, $0 \le k \le N-1$ av $x(n)$, $\le n \le N-1$. Definiera

$$X_0(k) = \begin{cases} X(k) & 0 \le k \le k_c \quad N-k_c \le k \le N-1 \\ 0 & k_c < k < N-k_c \end{cases} \tag{25}$$

Jämför $x_0(n) = \text{IDFT}\{X_0(k)\}$ med $x(n)$. Vad händer?

Uppgift 7.4

Sekvenserna $x_1(n) = \cos\frac{2\pi}{N} n$ och $x_2(n) = \sin\frac{2\pi}{N} n$ är givna för $0 \le n \le N-1$.

a) Bestäm den cirkulära faltningen mellan $x_1(n)$ och $x_2(n)$.

b) Bestäm den cirkulära korrelationen mellan $x_1(n)$ och $x_2(n)$.

c) Bestäm den cirkulära autokorrelationen för $x_1(n)$.

d) Bestäm den cirkulära autokorrelationen för $x_2(n)$.

Uppgift 7.7

Sekvensen $x(n)$, $0 \le n \le N-1$, har DFT:n $X(k)$. Bestäm nu DFT:erna av sekvenserna nedan i termer av $X(k)$

1) $x_c(n) = x(n)\cos\left(2\pi \cdot \frac{k_0}{N} \cdot n\right)$.

2) $x_s(n) = x(n)\sin\left(2\pi \cdot \frac{k_0}{N} \cdot n\right)$.

Uppgift 7.8

Bestäm den cirkulära faltningen mellan $x_1(n) = \{ \underline{1} \quad 2 \quad 3 \quad 1 \}$ och $x_2(n) = \{ \underline{4} \quad 3 \quad 2 \quad 2 \}$. Jämför med den icke-cirkulära faltningen.

Uppgift 7.9

Bestäm den cirkulära faltningen mellan $x_1(n) = \{ \underline{1} \quad 2 \quad 3 \quad 1 \}$ och $x_2(n) = \{ \underline{4} \quad 3 \quad 2 \quad 2 \}$ genom att använda DFT och IDFT.

Uppgift 7.10

Bestäm energin för sekvensen $x(n) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{k}{N} \cdot n\right)$ för $0 \le n \le N-1$.

MATLAB: Bestäm energin i MATLAB med hjälp av `fft`.

Uppgift 7.11

Sekvensen $x(n) = \{ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}$ har DFT:n $X(k)$. Bestäm nu DFT:erna av sekvenserna

a) $\{ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \}$.

b) $\{ 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \}$.

Uppgift 7.18

Insignalen till ett linjärt tidsinvariant system $H(\omega)$ är $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$. Antag att vi beräknar N-punkters DFT av utsignalen $y(n)$ för punkterna $0 \le n \le N-1$. Beräkna sambandet mellan $Y(k)$ och $H(\omega)$.

Uppgift 7.23

Beräkna N-punkters DFT av

a) $x(n) = \delta(n)$

b) $x(n) = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$

c) $x(n) = a^n$, $0 \le n \le N - 1$

d) $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N/2 - 1 \quad N \text{ even} \\ 0 & N/2 \le n \le N - 1 \end{cases}$

e) $x(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/N\,k_0 n}$, $0 \le n \le N - 1$

f) $x(n) = \cos(2\pi/N\;k_0\;n)$, $0 \le n \le N - 1$

g) $x(n) = \sin(2\pi/N\;k_0\;n)$, $0 \le n \le N - 1$

h) $x(n) = \begin{cases} 1 & n \quad \text{even} \\ 0 & n \quad \text{odd} \quad 0 \le n \le N - 1 \end{cases}$

Uppgift 7.24

Givet $x(n) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \right\}$. Beräkna 4-punkters DFT av $x(n)$ genom att lösa 4:e ordningens ekvationssystem för invers DFT.

Uppgift 7.25

a) Bestäm fouriertransformen av $x(n) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & \underline{3} & 2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\}$.

b) Bestäm 6-punkters DFT av $v(n) = \left\{ \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \right\}$.

c) Jämför $X(k)$ och $V(k)$ i a) och b).

Uppgift E5.1

Beräkna och skissa $|X(k)|$ där $X(k)$ är 8-punkters DFT av $x(n)$ med $x(n) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$

Uppgift E5.2

Låt $X(k)$ vara 8-punkters DFT av $x(n) = \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 8 & 7 & 2 & 2 \end{matrix} \right\}$.

a) Beräkna $y(n) = \text{IDFT}\{X^*(k)\}$.

b) Beräkna $y(n) = \text{IDFT}\left\{(-1)^k \cdot X(k)\right\}$.

MATLAB: Kolla räkningarna i MATLAB med `fft` och `ifft`. Låt $x(n)$ vara en ljudsignal och lyssna på $y(n)$ i a) respektive b).

Uppgift E5.3

Insignalen $x(n)$ till systemet $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ där $0 < a < 1$ är periodisk med perioden N. Bestäm impulssvaret till ett FIR-filter som ger samma stationära lösning som systemet ovan för insignalen $x(n)$.

Uppgift E5.4

Den signalbehandlingsintresserade eleven Hans hittar en stämgaffel. Tyvärr framgår det ej vilken resonansfrekvens stämgaffeln har. Han kommer då på den lysande idén att utnyttja en spektrumanalysator. Spektrumanalysatorn är digital och gör en DFT av insignalen. Med spektrumanalysatorn inställd på 0 Hz till 200 Hz (sampeltakt 400 Hz) avläser han en topp i spektrum vid frekvensen 138 Hz. Vilka värden på resonansfrekvensen kan stämgaffeln ha? Motivera svaret.

Uppgift E5.5

Nedan ges fyra sekvenser $x_i(n)$ (1–4) och åtta sekvenser $X_j(k)$ (a–h). Välj ut de fyra rätta DFT paren $x(n) \longleftrightarrow X(k)$.

1 $\left\{ 1+j \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right\}$	a $\left\{ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right\}$	e $\left\{ 1 \quad -j \quad j \quad 1 \right\}$
2 $\left\{ 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad -0.5 \right\}$	b $\left\{ j \quad 0 \quad j \quad 0 \right\}$	f $\left\{ 1 \quad -j \quad 1 \quad j \right\}$
3 $\left\{ 1+j \quad j \quad 0 \quad 1 \right\}$	c $\left\{ 1+j \quad 1+j \quad 1+j \quad 1+j \right\}$	g $\left\{ 2+2j \quad 2+2j \quad 0 \quad 0 \right\}$
4 $\left\{ 0.75 \quad 0.25 \quad -0.25 \quad 0.25 \right\}$	d $\left\{ j \quad 0 \quad -j \quad 0 \right\}$	h $\left\{ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \right\}$

MATLAB: Tag eventuellt hjälp av MATLAB för att kolla resultatet.

Uppgift E5.6

Betrakta impulssvaret

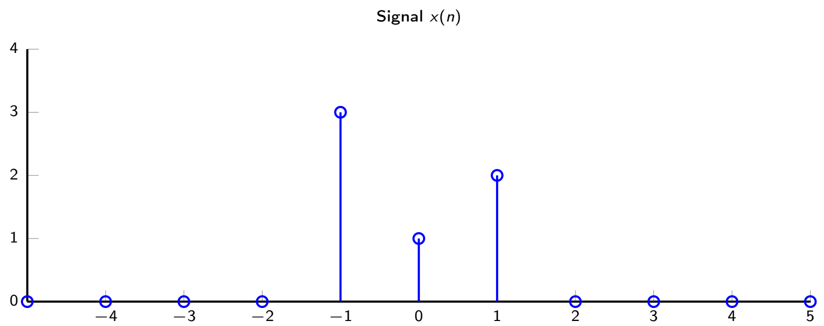
$$h(n) = \frac{1}{4}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{4}\delta(n-2) + \frac{1}{4}\delta(n-3) \tag{26}$$

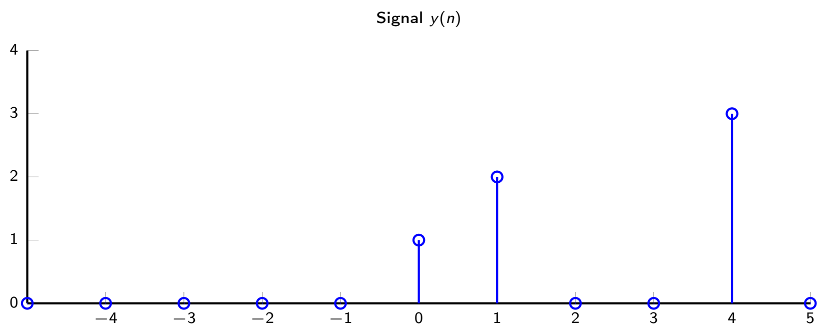
a) Beräkna Fouriertransformen. Beräkna DFT:n för $N \geq 4$. Samband?

b) Vad blir $H(k)$ för $k = 0 \ldots 3$ när $N = 4$? Vad blir $h_p(n) = \mathrm{IDFT}\{H(k)\}$?

Uppgift E5.7

Följande två tidsdiskreta signaler är givna





Signalernas Fouriertransformer samplas i punkterna $f = k/N$ för $k = 0 \ldots N-1$ där $N = 5$. Hur är $Y(k/N)$ relaterad till $X(k/N)$?

Uppgift E5.8

Impulssvaret till en kausal tidsdiskret krets är

$$h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2) \tag{27}$$

och insignalen är

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n-1) \tag{28}$$

a) Beräkna utsignalen med hjälp av faltningsformeln.

b) Beräkna utsignalen med hjälp av Fouriertransformen.

c) Sätt in $f = k/N$ för $k = 0 \ldots N-1$ i uttrycket för $Y(f)$. Om N är mindre än ett visst tal M uppstår "vikning" i tidsplanet. Slutsats? Hur stort är M? Hur stort är M i ett allmänt fall då impulssvaret har längden P och insignalen längden Q ?

Uppgift E5.9

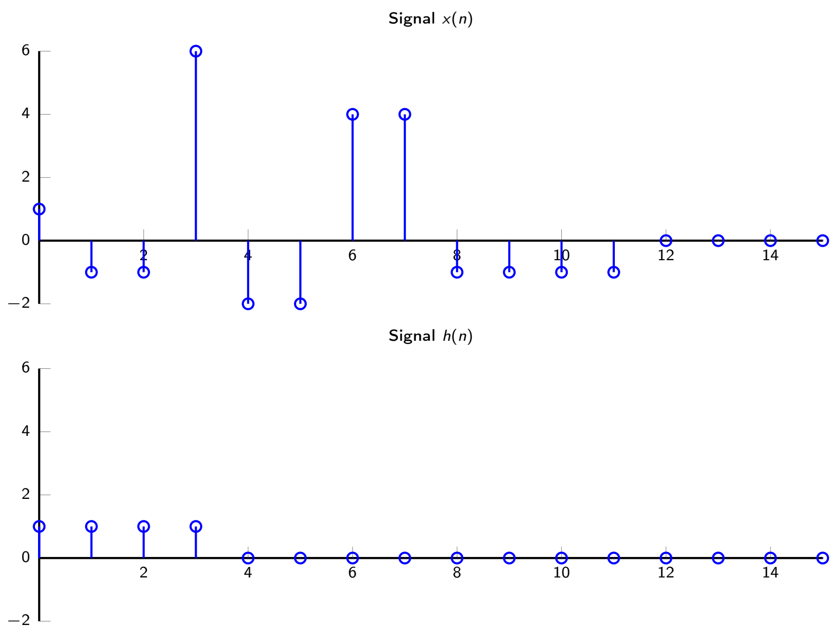
Sekvensen $h(n)$ är impulssvar till ett transversalfilter av ordning L med koefficienter b_k, $k = 0 \ldots L$. Signalen $x(n)$ är en trunkerad stegfunktion med längden Q, dvs

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \ldots Q-1 \quad Q > L+1 \\ 0 & \text{övrigt} \end{cases} \tag{29}$$

Man önskar beräkna utsignalen från transversalfiltret med hjälp av DFT, men gör misstaget att välja DFT-längden $N = Q$ istället för $N \geq Q + P - 1 = Q + L$, där P betecknar längden av $h(n)$). Beräkna för detta val av N "utsignalen" $y_p(n)$, $n = 0 \ldots N-1$.

Uppgift E5.10

Signalerna $x(n)$ och $h(n)$ enligt figur är insignal respektive impulssvar till en tidsdiskret krets. Man vill beräkna utsignalen $y(n) = h(n) * x(n)$ med hjälp av 8-punkters DFT. Detta kan man göra genom att dela upp insignalen i segment om t.ex. 4 punkter. Gör detta och beräkna respektive utsignal-segment med hjälp av faltningssumman.



Uppgift E5.11

Man har givet en oändlig sekvens $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$ med Fouriertransformen $X(f)$. Av denna bildar man en ändlig sekvens $y(n)$ sådan att $y(n) = 0$ då $k < 0$ och $k > 9$ genom att beräkna

$$y(n) = \text{IDFT}\{Y(k)\} \quad n = 0 \ldots 9 \tag{30}$$

där

$$Y(k) = X(f)|_{f=\frac{k}{10}} \quad k = 0 \ldots 9 \tag{31}$$

Bestäm $y(n)$.

Uppgift E5.12

Man kan utföra filtrering med hjälp av overlap-save-metoden. Då delas insignalen $x(n)$ upp i segment av längden N

$$x_i(n) = x(n + i(N - M + 1)) \quad 0 \leq n \leq N-1 \tag{32}$$

där M är längden på filtrets impulssvar. För varje segment bildas

$$X_i(k) = \text{DFT}\{x_i(n)\} \tag{33}$$

och

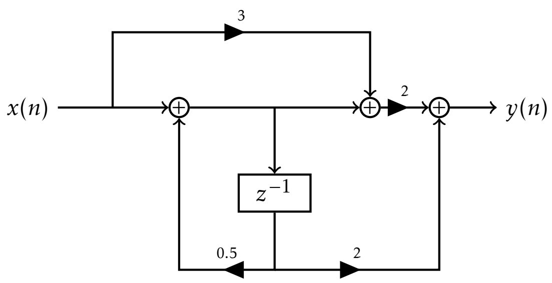
$$y_i(n) = \text{IDFT}\{X_i(k)\,H(k)\} \tag{34}$$

där $H(k)$ är DFT$\{h(n)\}$. Bestäm hur $y_i(n)$, $i = 0,1,2\ldots$ skall kombineras för att ge $y(n) = x(n) * h(n)$. Illustrera med figur.

Realiseringar, kapitel 9

Uppgift 9.3

Bestäm systemfunktionen och impulssvaret till nedanstående krets.



Uppgift 9.9

Bestäm realisering enligt direktform I, direktform II, kaskadform och parallellform för nedanstående system.

a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{3}x(n-1)$.

f) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-1) + x(n-2)$.

Uppgift 9.15

Bestäm parametrarna K_m till ett lattice FIR-filter bestämt av ekvationen

$$H(z) = A_2(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \tag{35}$$

MATLAB: Lös också parametrarna med hjälp av MATLAB.

Uppgift 9.19

a) Bestäm och skissa nollställen till lattice FIR-filtret med parametrarna $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_2 = -\frac{1}{3}$ samt $K_3 = 1$.

b) Samma som i a) men med $K_3 = -1$

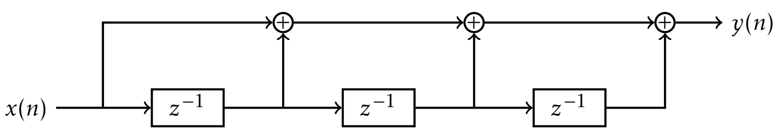
c) I a) ocb b) visar det sig att alla nollställen ligger på enhetscirkeln. Kan detta resultat generaliseras? Och hur?

d) Bestäm fasfunktionen för filtren i a) och b). Slutsats?

Exempel på design av filter

Uppgift E8.1

Givet nedanstående digitala FIR-filter.



a) Bestäm kretsens poler och nollställen.

b) Bestäm och rita kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

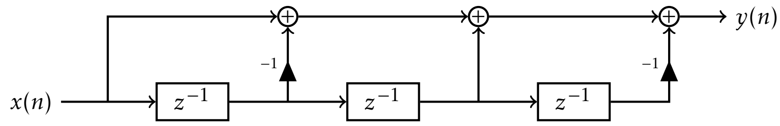
c) Bestäm och rita kretsens fasfunktion.

d) Vid vilka frekvenser blir $|H(f)| = 0$?

e) Vilken typ (LP, BP, HP) är det?

Uppgift E8.2

Givet nedanstående digitala FIR-filter.



a) Bestäm kretsens poler och nollställen.

b) Bestäm och rita kretsens amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Bestäm och rita kretsens fasfunktion.

d) Vid vilka frekvenser blir $|H(f)| = 0$?

e) Vilken typ (LP, BP, HP) är det?

Uppgift E8.3

Vi vill filtrera en uppmätt signal genom att bilda utsignalen $y(n)$ som medelvärdet av de fem senaste insignalvärdena enligt

$$y(n) = \frac{1}{5}\sum x(k) = 0.2\,[x(n-4) + x(n-3) + x(n-2) + x(n-1) + x(n)] \tag{36}$$

a) Bestäm filtrets impulssvar $h(n)$.

b) Bestäm filtrets amplitudfunktion $|H(f)|$.

c) Skissa $|H(f)|$ för $0 \le f \le 1$.

Uppgift E8.4

Utgående från signalen $x(n) = \sin(\pi/2n)$ önskar man åstadkomma signalen $y(n) = \sin(\pi/2n + \pi/3)$. Bestäm en krets som gör detta. Försök med ett FIR-filter.

Uppgift E8.5

Bestäm impulssvaret $h(n)$ till en tidsdiskret krets så att följande krav på $H(f)$ är uppfyllda:

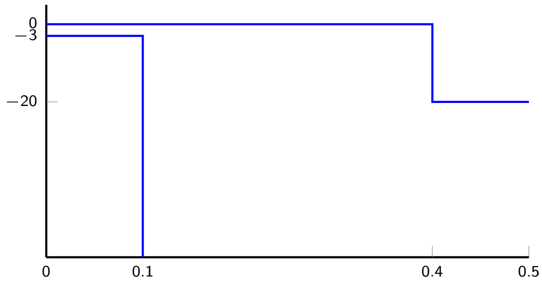
- $|H(0)| = |H(-1/5)| = |H(1/5)| = 1$
- $H(2/5) = H(-2/5) = 0$
- $h(n)$ är reell
- $h(n)$ är kausal
- kretsen har linjär fas

MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.

Uppgift E8.6

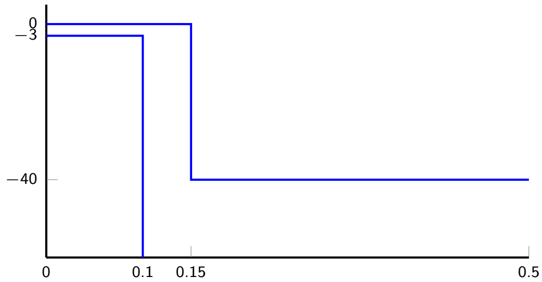
Ett filter $H(z)$ är givet genom N st poler i origo och N st nollställen i $z = -1$. Likspänningsförstärkningen är 1 (0 dB). Bestäm för vilka värden på N som dämpningskraven enligt figuren är uppfyllda och bestäm impulssvaret för minimalt värde på N.

MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.



Ett löst exempel på FIR-filter med fönstermetoden

Bestäm ett FIR-filter som uppfyller dämpningskravet nedan dels med fönstermetoden och dels med ekvirippleme-toden.



Först väljer vi fönsterfunktion för FIR-filtret. Hamming har största sidlob −55 dB. Vi väljer därför Hammingfön-ster. Ett ungefärligt värde på gradtalet M fås ur FS tabell 5.2:

$$\frac{1.7}{M} \approx 0.15 - 0.1 \quad \Rightarrow \quad M = 34 \tag{37}$$

Observera dock att tabell 5.2 har definierat övergångszonens undre punkt vid −6 dB, så det rätta M bör vara något större.
Bättre värde på M fås ur figur FS sid 36. Vid undre gränsen $f = 0.1$, $|H(f)| = -3\,\text{dB}$, erhålles

$$x = -0.4 = (f - f_c) \cdot M = (0.1 - f_c) \cdot M \tag{38}$$

och vid $f = 0.15$, $|H(f)| = -40\,\text{dB}$ erhålles

$$x = 1.5 = (f - f_c) \cdot M = (0.15 - f_c) \cdot M \tag{39}$$

Löser vi ut f_c och M ur ovanstående ekvationer erhåller vi

$$f_c = 0.110 \tag{40}$$

$$M = 38 \tag{41}$$

Låt oss nu se vilket gradtal ekviripplemetoden ger. Passbandsripplet är

$$20\log\frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1+\delta_p}{1-\delta_p} = 10^{0.15} = 1.41 \quad \Rightarrow \quad \delta_p = \frac{0.41}{2.41} = 0.17 \tag{42}$$

och

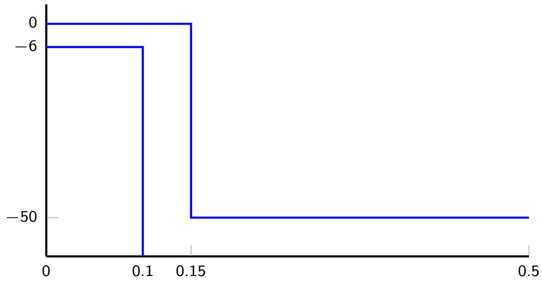
$$20\log\delta_s = -40 \quad \Rightarrow \quad \delta_s = 0.01 \tag{43}$$

$$\begin{cases} D_\infty = \dfrac{-20log\sqrt{0.17\cdot 0.01} - 13}{14.6} = 1.0 \\ \Delta f = 0.15 - 0.1 = 0.05 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1.0}{0.05} + 1 = 21 \tag{44}$$

Ekvirippleflitret ger alltså lägst gradtal men har bestämts så att spärrbandsdämpningen är 40 dB i hela spärrbandet medan FIR-filtret med Hammingfönster har största sidloben med dämpningen ca 55 dB.

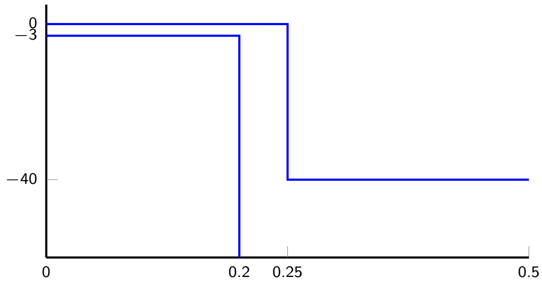
Uppgift E8.7

Bestäm impulssvaret till ett realiserbart filter som uppfyller kravspecifikationen nedan. Filtret skall ha så låg ordning som möjligt och exakt linjär fas.



Uppgift E8.8

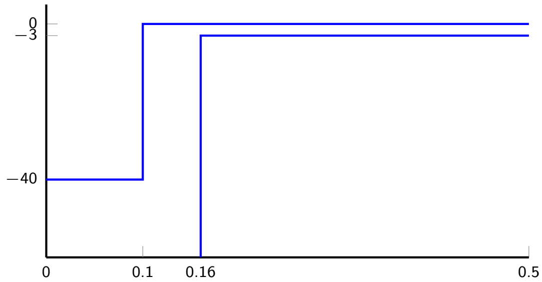
Ett FIR-lågpassfilter, som uppfyller de i figuren givna kraven, skall realiseras. Man utgår från ett idealt lågpassfilter $H_d(f)$ med gränsfrekvensen f_c och använder ett Hammingfönster, vilket ger minst en spärrbandsdämpning, på 40 dB. Beräkna f_c så att de givna kraven uppfylles för minimalt M (udda). Realisera filtret.



MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.

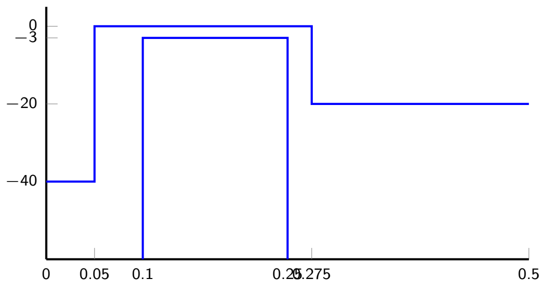
Uppgift E8.9

Kravspecifikationen för ett tidsdiskret HP-filter är givet enligt figuren nedan. Vid frekvensen 0.16 **skall** dämpningen vara 3dB. Bestäm pulssvaret till ett FIR-filter av minimal ordning som uppfyller givna krav.



Uppgift E8.10

Kravspecifikationen för ett tidsdiskret BP-filter är given enligt figuren nedan. Vid frekvenserna 0.1 och 0.25 **skall** dämpningen vara 3 dB. Bestäm impulssvaret till ett FIR-filter av minimal ordning som uppfyller givna krav.



MATLAB: Plotta spektrum i MATLAB och se om det uppfyller kraven.

Uppgift E8.11

Bandbredden för ett BP-filter definieras som skillnaden i frekvens mellan de två punkter där amplituden är $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$. Bestäm bandbredden för ett FIR BP-filter som har impulssvaret

$$h(n) = \left(0.4933 \cdot \frac{\sin(0.2466\pi(n-20))}{0.2466\pi(n-20)} \cdot \cos(\pi 0.4192(n-20))\right) \tag{45}$$

$$\cdot \left(0.54 + 0.46 \cdot \cos\left(\frac{2\pi(n-20)}{40}\right)\right) \tag{46}$$

för $0 \leq n \leq 40$.

Uppgift E8.12

Två FIR-filter kaskadkopplas $H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$ där

$$H_1(z) = 1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2 z^{-2} \tag{47}$$

Bestäm $H_2(z)$ så att kaskadkopplingen får linjär fas och likspänningsförstärkningen $|H(0)| = (1 - 2r\cos(\theta) + r^2)^2$. Ange $\arg H(f)$ för $0 \leq f \leq 1/2$.

Uppgift E8.13

En bandpass-signal som man önskar studera har komponenter i området 2.5 MHz–3 MHz. Signalen samplas med sampelfrekvensen $F_s = 10$ MHz och A/D-omvandlas. Signalen har dock genererat övertoner i området 5 MHz–6 MHz och dessutom har till den önskade signalen störningar i området 9 MHz–10 MHz adderats. Man vill nu med ett digitalt FIR-filter undertrycka störning och övertoner minst 40 dB. Filtret får påverka den önskade signalen med maximalt 3 dB.