LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Inst. för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2015-06-05
SIGNALBEHANDLING I MULTIMEDIA, ETI265
Tid: 14.00–19.00
Sal: MA:10, C-J

Hjälpmedel: Miniräknare, formelsamling i signalbehandling och en valfri bok i matematik.
[*Allowed items on exam: calculator, DSP and mathematical tables of formulas*]

Observandum: För att underlätta rättningen: [*In order to simplify the correction:*]
-Lös endast en uppgift per blad. [*Only solve one problem per paper sheet.*]
-Skriv namn på samtliga blad. [*Please write your name on every paper sheet.*]
Påståenden måste motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
[*Statements must be motivated by reasoning and/or equations.*]
Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
[*The points from the tasks will be added to the examination score.*]
Max Tot. poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
[*Max Tot. score (exam + 2 tasks) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0*]
Betygsgränser för kursen: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).
[*Grading; 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).*]

1. Ett hjul till en hästkärra har 4 identiska och jämnt fördelade ekrar och snurrar med varvtalet 65 varv/sek motsols. Hjulet filmas med en digital videokamera som tar 25 bilder/sekund. Den digitala signalen decimeras med en faktor 2, dvs varannan bild tas bort ur sekvensen. Vilken digital rotationsfrekvens (dvs varv/sampel) kommer hjulet att uppfattas ha, genom att betrakta den inspelade och decimerade sekvensen? Vilken verklig frekvens och rotationsriktning kommer att uppfattas, medsols eller motsols? (0.5)
[We have a rotating wheel with FOUR evenly distributed identical spokes which rotates with 65 revolutions/sec counterclockwise, . The wheel is recorded by a digital video camera using 25 frames/sec. The digital sequence is further decimated by a factor two. Determine the digitally perceived rotational frequency (i.e. in revolutions/sample). What real frequency will be observed and also determine the direction of rotation.]

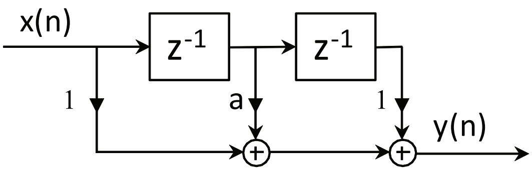
2. Följande differensekvation är given:
[*The following difference equation is given,*]

$$y(n) - y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2) = x(n) + x(n-1)$$

a) Bestäm systemfunktionen $H(z)$ samt bestäm systemets poler och nollställen och rita upp dessa i ett pol-nollställe diagram. Avgör om systemet är stabilt, motivera ditt svar. (0.2)
[*Determine the system function $H(z)$, the system poles and zeros and plot these in a pole-zero plot. Determine if the system is stable, motivate your answer!*]

b) Bestäm impulssvaret $h(n)$ till differensekvationen! (0.3)
[*Determine the impulse response $h(n)$ of the system.*]

3. En tidsdiskret LTI-krets är given av figuren med $a = -2\cos(\omega_0)$ där $\omega_0 = \pi/2$
[*An LTI-system is given by, where $a = -2\cos(\omega_0)$ and $\omega_0 = \pi/2$*]



a) Bestäm motsvarande differensekvation och impulssvar $h(n)$! (0.3)
[*Determine the corresponding difference equation and impulse response $h(n)$!*]

b) Skissa amplitudfunktionen $|H(\omega)|$ och fasfunktionen $arg(H(\omega))$! (0.3)
[*Sketch $|H(\omega)|$ and $arg(H(\omega))$!*]

c) Bestäm utsignalen $y(n)$ då insignalen är given av, (0.4)
[*Determine the output signal $y(n)$, when the input is given by!*]

$$x(n) = 3\cos(\pi/3\, n + \pi/6) \qquad -\infty < n < \infty$$

4. Följande differensekvation är given,
[*The following difference equation is given,*]

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)$$

där insignalen $x(n) = \frac{1}{3}^n u(n)$ och vi har begynnelsevärdet $y(-1) = 1$. Bestäm utsignalen! (1.0)
[*where the input signal $x(n) = \frac{1}{3}^n u(n)$ and initial condition $y(-1) = 1$. Determine the output signal!*]

5. Följande tids-diskreta signaler är givna;
[*The following discrete-time signals are given;*]

$$x_1(n) = [\,-1 \;\; \underset{\uparrow}{2} \;\; -2\,]\,, \quad x_2(n) = [\,2 \;\; \underset{\uparrow}{-1} \;\; 2 \;\; 0\,]$$

a) Bestäm resulterande modulo 3 sekvens ur faltningsuttrycket;
$y(n) = x_1(n) \circledast_3 x_2(-n)$. (0.2)
[*Determine the resulting modulo 3 sequence from; $y(n) = x_1(n) \circledast_3 x_2(-n)$*]

b) Bestäm Fouriertransformen till $x_1(n)$ och $x_2(n)$ och beräkna därefter $Y(\omega) = X_1(\omega) \cdot conj(X_2(\omega))$ (0.3)
[*Determine the Fouriertransforms of $x_1(n)$ and $x_2(n)$ and use these results to determine $Y(\omega) = X_1(\omega) \cdot conj(X_2(\omega))$*]

c) Sampla resultatet från uppgift b), $Y(\omega)$ i tre punkter, dvs $w = 2\pi k/3$ där $k = 0, 1, 2$ vilket motsvarar $Y(k)$, (DFT:n av $y(n)$). Bestäm därefter invers DFT av $Y(k)$, dvs sekvensen $y(n)$. (0.5)
[*Sample the result from subtask b), $Y(\omega)$ in three points, i.e. $w = 2\pi k/3$ wherer $k = 0, 1, 2$, this is the equivalent of $Y(k)$, (DFT:n of $y(n)$). Now determine the inverse DFT of $Y(k)$, i.e. the sequence $y(n)$.*]

6. Bestäm ett filter $g(n)$ så att det uppfyller följande egenskap: Om insignalen är stegsvaret från ett LTI-system (vilket som helst) så skall utsignalen vara impulssvaret från samma system! Motivera ditt svar! (1.0)
[*Determine a filter $g(n)$ such that it fulfills the following property: If the input signal is the step response from ANY linear and time invariant system, then the output signal should be the impulse response from the same system. Motivate your answer!*]

Lycka till!

Please remember to answer the CEQ-questionnaire!

Lösningar till Tentamen 2015-06-05

SVAR 1. Hjulet snurrar med 65 varv/sek motsols. Sampeltakten är $F_s = 25$ Hz vilket ger den normerade frekvensen inom fundamentalt frekvensområde (som i detta fallet är $-1/8 \leq f \leq 1/8$), dvs periodisk med perioden 1/4.;

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{65}{25} \pm \frac{1}{4}k \qquad k \text{ heltal} \\ &= \frac{13}{5} \pm \frac{1}{4}k \qquad k \text{ heltal} \\ &= \left(\frac{13}{5} - \frac{10}{4}\right) \pm \frac{1}{4}k \qquad k \text{ heltal} \\ &= \frac{1}{10} \pm \frac{1}{4}k' \qquad k' \text{ heltal} \end{aligned}$$

Denna decimeras med faktor 2 vilket ger,

$$\begin{aligned} f_0^d &= 2\frac{1}{10} \pm \frac{1}{4}k' \qquad k' \text{ heltal} \\ &= \frac{1}{5} \pm \frac{1}{4}k' \qquad k' \text{ heltal} \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) \pm \frac{1}{4}k' \qquad k' \text{ heltal} \\ &= -\frac{1}{20} \pm \frac{1}{4}k'' \qquad k'' \text{ heltal} \end{aligned}$$

Dvs den uppfattade decimerade digitala frekvensen är $f_0^d = -\frac{1}{20}$ varv/sampel, dvs $\frac{1}{20}$ varv/sampel medsols. Det uppfattade verkliga frekvensen blir;

$$-\frac{1}{20} * \frac{F_s}{2} = -\frac{5}{8} \text{ Hz}$$

Dvs $\frac{5}{8}$ Hz medsols.

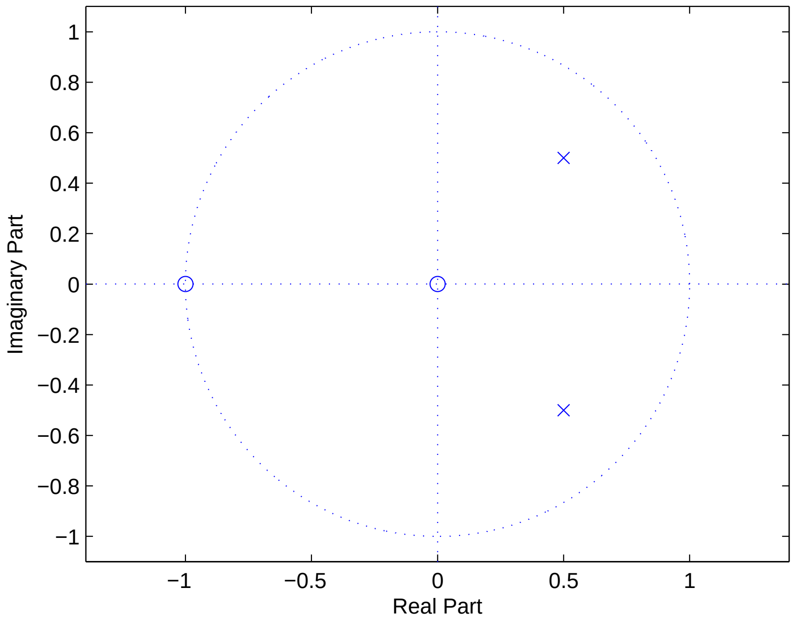
SVAR 2a. Z-transformera differens-ekvationen, det ger

$$Y(z)(1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}) = X(z)(1 + z^{-1})$$

$H(z)$ får enligt,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$H(z)$ har nollställen i $z = 0$ och $z = -1$ och poler i $z = \frac{1 \pm j}{2}$, vilket medför stabilitet (innanför enhetscirkeln). Figur pol-/nollställe diagram se figur nedan.



Pol-nollställediagram i uppgift 2a).

SVAR 2b. Genom att invers-transformera $H(Z)$ erhålls impulssvaret $h(n)$, dvs vi beräknar utsignalen då insignalen $X(z) = 1$. Då vi har komplexkonjugerande poler vet vi att vi får en linjärkombination av cosinus resp. sinus-termer. $H(z)$ skrivs då som,

$$
\begin{aligned}
Y(z) &= H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{1-0.5z^{-1}+1.5z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \\
&= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi/4)z^{-1}+3\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi/4)z^{-1}+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2z^{-2}} \\
&= \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi/4)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi/4)z^{-1}+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2z^{-2}} + 3\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\pi/4)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi/4)z^{-1}+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2z^{-2}}
\end{aligned}
$$

Från tabell (ur tex formelsamlingen) fås att impulssvaret blir;

$$h(n) = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n \left[\cos(\frac{\pi}{4}n) + 3\sin(\frac{\pi}{4}n)\right] u(n)$$

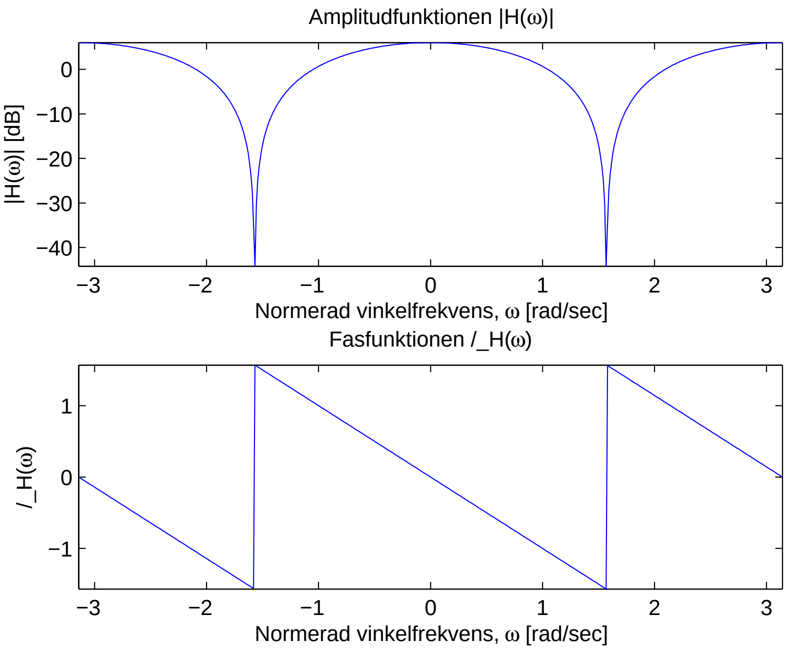
SVAR 3. a) T.ex. ur Formelsamling, direktform ger

$$
\begin{aligned}
y(n) &= x(n) - 2\cos\omega_0 x(n-1) + x(n-2) = x(n) + x(n-2) \Rightarrow \\
h(n) &= \delta(n) - 2\cos\omega_0 \delta(n-1) + \delta(n-2) = \delta(n) + \delta(n-2)
\end{aligned}
$$

b) För allmänt ω_0 gäller,

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= 1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = e^{-j2\omega}\left(e^{j2\omega} - 2\cos\omega_0 e^{j\omega} + 1\right) = \\
&= \frac{(e^{j\omega} - e^{j\omega_0})(e^{j\omega} - e^{-j\omega_0})}{e^{j2\omega}} \\
|H(\omega)| &= \left|e^{j\omega} - e^{j\omega_0}\right| \left|e^{j\omega} - e^{-j\omega_0}\right| = V_1(\omega)V_2(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\omega) &= \arg[1 - 2\cos\omega_0 e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}] = \\
&= \arg[2e^{-j\omega}(\cos\omega - \cos\omega_0)] = \begin{cases} -\omega & \omega < \omega_0 \\ -\omega - \pi & \omega > \omega_0 \end{cases}
\end{aligned}$$



Amplitudfunktion och fasfunktion för $\omega_0 = \pi/2$, i uppgift 3b).

c)

$$
\begin{aligned}
x(n) &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\,n+\frac{\pi}{6}\right) \quad -\infty < n < \infty \Rightarrow \\
y(n) &= 3\left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right|\cos\left(\frac{\pi}{3}\,n+\frac{\pi}{6}+\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad -\infty < n < \infty \\
\omega_0 &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|H\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = \left|1+e^{j2\,\pi/3}\right| \\
&= \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\
\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \\
y(n) &= 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\,n-\frac{\pi}{6}\right) \quad -\infty < n < \infty
\end{aligned}
$$

SVAR 4. Då vi har begynnelsevärden använder vi Z^+-transformen, som applicerad på differensekvationen och insättning av insignalens Z-transform (OBS insignalen är kausal ger Z-transform = Z^+-transform) ger,

$$
Y^+(z) = \frac{1}{2}\,Y^+(z)z^{-1} + \frac{1}{2}\,y(-1) + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}
$$

$$
Y^+(z) = \frac{1}{2}\,z^{-1}Y^+(z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}
$$

$$
Y^+(z) = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)}
$$

Gör högerledet liknämnigt och partialbråksuppdela,

$$
Y^+(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}+2}{2\left(1-\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{7/2}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}} + \frac{-2}{1-\frac{1}{3}\,z^{-1}}
$$

$$
\xrightarrow{Z^{-1}} y(n) = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)
$$

SVAR 5. a)

$$
y(n) = x_1(n) \circledast_3 x_2(-n) \quad = \quad [\,-\underset{\uparrow}{8} \quad 4 \quad 1\,]
$$

b)

$$\begin{aligned}
X_1(\omega) &= -e^{j\omega} + 2 - 2e^{-j\omega} \\
X_2(\omega) &= 2e^{j\omega} - 1 + 2e^{-j\omega} = X_2^*(\omega) \\
Y(\omega) = X_1(\omega)X_2^*(\omega) &= -2e^{j2\omega} + 1e^{j\omega} - 2 \\
&+ \quad 4e^{j\omega} \quad - 2 \; + \; 4e^{-j\omega} \\
&+ \; -4 \; + \; 2e^{-j\omega} - 4e^{-j2\omega} \\
&= -2e^{j2\omega} + 5e^{j\omega} - 8 + 6e^{-j\omega} - 4e^{-j2\omega}
\end{aligned}$$

OBS! Här ser vi att koefficienterna i resultatet motsvarar summan av antidiagonalerna i ovanstående led, dvs detta visar faltningstabellens konstruktion eftersom invers Fouriertransform motsvarar $y(n) = x_1(n) * x_2(-n) = \left[-2, 5, \underset{\uparrow}{-8}, 6 - 4\right]$

c) Vi samplar $Y(\omega)$, dvs byter ut $\omega- > 2\pi k/3$ vilket ger,

$$\begin{aligned}
Y(k) &= -2e^{j2\cdot 2\pi k/3} + 5e^{j2\pi k/3} - 8 + 6e^{-j2\pi k/3} - 4e^{-j2\cdot 2\pi k/3} \\
&= (5-4)e^{j2\pi k/3} - 8 + (6-2)e^{-j2\pi k/3} \\
&= -8 + (6-2)e^{-j2\pi k/3} + (5-4)e^{-j2\pi 2k/3} \\
&= -8 + 4e^{-j2\pi k/3} + e^{-j2\pi 2k/3}
\end{aligned}$$

Eftersom $e^{j2\cdot 2\pi k/3} = e^{j2\pi k\cdot 2/3} = e^{j2\pi k\cdot(-1/3)}$, dvs $+2/3$ varv är lika med $-1/3$ varv i vinkel (och pss är $-2/3$ varv lika med $1/3$).

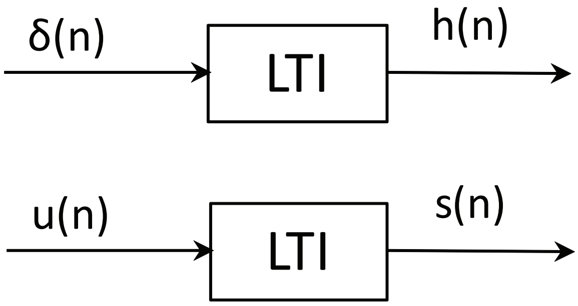
Enligt definitionen av Diskret Fouriertransform (då $N = 3$) har vi,

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{2} y(n)e^{-j2\pi kn/3}$$

Genom indentifiering av $y(n)$ med uttrycket för $Y(k)$ fås att $y(n)$ blir som i uppgift a), dvs

$$\underline{\underline{y(n) \;=\; [\,-\underset{\uparrow}{8} \quad 4 \quad 1\,]}}$$

SVAR 6. Definitionen av impulssvaret för ett LTI-system är ”om insignalen är impulsen, $\delta(n)$, så är utsignalen impulssvaret, $h(n)$,” och på samma sätt är definitionen av ett stegsvar, ”om insignalen är ett steg så är utsignalen stegsvaret”, dvs



Eftersom ett LTI-system entydigt beskrivs av impulssvaret, och utsignalen ges av faltningen mellan impulsvaret och insignalen, har vi,

$$\begin{aligned} h(n) &= h(n) * \delta(n) \\ s(n) &= h(n) * u(n) \end{aligned}$$

Bestäm nu sambandet mellan $h(n)$ och $s(n)$, dvs

$$\begin{aligned} h(n) &= h(n) * \delta(n) = \{\delta(n) = u(n) - u(n-1)\} = \\ &= \underbrace{h(n) * u(n)}_{s(n)} - \underbrace{h(n) * u(n-1)}_{s(n-1)} = \\ &= s(n) - s(n-1) \\ &= s(n) * g(n) \end{aligned}$$

Där $g(0) = 1$ och $g(1) = -1$, dvs

$$\underline{\underline{g(n) \;=\; [\,\underset{\uparrow}{1} \quad -1\,]\,.}}$$