



LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Lunds universitet

Formler och Tabeller

Digital Signalbehandling

Institutionen för Elektro- och informationsteknik

Nedelko Grbić

Lund 2014

Innehåll

1	Grundläggande samband	5
1.1	Trigonometriska formler	5
1.2	Matristeori	6
1.3	Kurvformer	7
1.4	Några ofta förekommande samband	7
1.5	Korrelation	8
1.6	Kretsmodeller (en insignal, en utsignal)	8
1.7	Några beräkningsmetoder	9
1.8	Analog sinussignal genom linjärt, kausalt filter	10
1.9	Tidsdiskret sinussignal genom linjärt, kausalt filter	11
2	Transformer	12
2.1	Laplacetransform	12
2.1.1	Laplacetransform av kausala signaler	12
2.1.2	Enkelsidig Laplacetransform av icke-kausala signaler	13
2.2	Fouriertransform för tidskontinuerlig signal	14
2.3	Z-transformen	16
2.3.1	Z-transform av kausala signaler	16
2.3.2	Enkelsidig Z-transform av icke kausala signaler	17
2.4	Fouriertransform för tidsdiskret signal	18
2.5	Fourierserietveckling	20
2.5.1	Kontinuerlig tid	20
2.5.2	Diskret tid	20
2.6	Diskreta Fouriertransformen (DFT)	21
2.6.1	Definition	21
2.6.2	Cirkulär faltning	21
2.6.3	Icke-cirkulär faltning med DFT	22
2.6.4	Relation till Fouriertransformen $X(f)$:	22
2.6.5	Relation till Fourierserier	22
2.6.6	Parsevals teorem	22
2.6.7	Några egenskaper hos DFT	23
2.7	Några fönsterfunktioner och deras Fouriertransform	23
3	Sampling av analoga signaler	25
3.1	Sampling och rekonstruktion	25
3.2	Distorsionsmått	27
3.2.1	Vikningsdistorsion vid sampling	27
3.2.2	Periodiseringsdistorsion vid rekonstruktion	27
3.3	Kvantiseringsdistorsion	28
3.4	Decimering och interpolering	28
4	Analog filter	29
4.1	Filterapproximationer av ideala LP-filter	29
4.1.1	Butterworthfilter	29
4.1.2	Chebyshevfilter	30

4.1.3	Besselfilter	34
4.2	Frekvenstransformationer av analoga filter	35
5	Tidsdiskreta filter	36
5.1	FIR-filter och IIR-filter	36
5.2	FIR-filter med fönstermetoden	36
5.3	Ekvirippel FIR-filter	39
5.4	FIR-filter med minstakvadratmetoden	39
5.5	IIR-filter	40
5.5.1	Impulsinvarians	40
5.5.2	Bilinjär transformation	40
5.5.3	Koefficientkvantisering	41
5.6	Latticefilter	41
6	Spektralskattning	43

1 Grundläggande samband

1.1 Trigonometriska formler

$$\begin{array}{ll}
 \sin \alpha = \cos(\alpha - \pi/2) & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos \alpha = \sin(\alpha + \pi/2) & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 & 2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\
 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha & 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\
 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha & 2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\
 \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos(-\alpha) = \cos \alpha & \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) &
 \end{array}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}), \quad \sin \alpha = \frac{1}{2j} (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}), \quad e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha - \beta)$$

$$\text{där } \cos \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{och } \beta = \begin{cases} \arctan \frac{B}{A} & \text{om } A \geq 0 \\ \arctan \frac{B}{A} + \pi & \text{om } A < 0 \end{cases}$$

$$A \cos \alpha + B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{där } \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\text{och } \beta = \begin{cases} \arctan \frac{A}{B} & \text{om } B \geq 0 \\ \arctan \frac{A}{B} + \pi & \text{om } B < 0 \end{cases}$$

Grader	Rad	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	$\pm\infty$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0

1.2 Matristeori

Beteckning av matris \mathbf{A} och vektor \mathbf{x}

En matris \mathbf{A} av ordningen $m \times n$ och en vektor \mathbf{x} med dimensionen n definieras av

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matrisen \mathbf{A} är symmetrisk om $a_{ij} = a_{ji} \forall ij$.

\mathbf{I} betecknar enhetsmatrisen.

Transponering av matris \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \text{ d\u00e4r } b_{ij} = a_{ji}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

Determinant av matris \mathbf{A}

$$\det \mathbf{A} = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det \mathbf{M}_{ij}$$

d\u00e4r \mathbf{M}_{ij} \u00e4r den matris som erh\u00e5lles om rad i och kolumn j i matrisen \mathbf{A} strykes.

$$\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Speciellt g\u00e4ller f\u00f6r en 2×2 matris:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Invers av matris \mathbf{A}

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad (\text{om } \det \mathbf{A} \neq 0)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathbf{C}^T$$

d\u00e4r \mathbf{C} definieras av

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \mathbf{M}_{ij}$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

Speciellt g\u00e4ller f\u00f6r en 2×2 matris:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Eigenvärden och egenvektorer

Eigenvärdena (λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$) och egenvektorerna (\mathbf{q}_i , $i = 1, 2, \dots, n$) är lösningar till ekvationssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q} \text{ eller } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{q} = 0$$

Eigenvärdena kan beräknas som lösningar till karakteristiska ekvationen (sekulärekvationen) till \mathbf{A}

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ kallas karakteristiska polynomet (sekularpolynomet) till \mathbf{A} .

1.3 Kurvformer

Enhetssteg $u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Impulsfunktion $\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

Rektangelfunktion $p(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$

Sinc-funktion $\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

Periodisk sinc-funktion $\text{diric}(x, N) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{N \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Komplex sinus $e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\Omega t}$

Komplex odämpad sinus $e^{j\Omega t} = \cos \Omega t + j \sin \Omega t$

1.4 Några ofta förekommande samband

Summa av geometrisk serie

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & \text{om } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{om } a \neq 1 \end{cases}$$

Summation av sinussignal över jämnt antal perioder

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N & \text{om } k = 0, \pm N, \dots \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

1.5 Korrelation

Korrelation, korskorrelation, spektrum, korspektrum och koherens mellan in- och utsignal

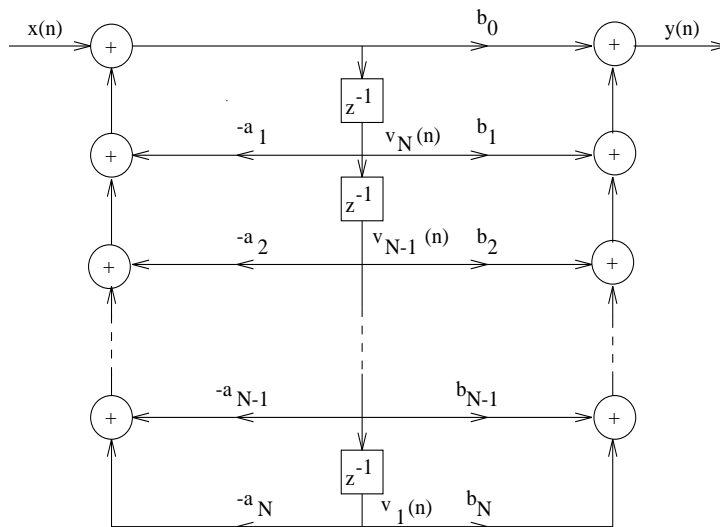
$$\begin{array}{ll} y(t) &= h(t) * x(t) & y(n) &= h(n) * x(n) \\ Y(F) &= H(F) \cdot X(F) & Y(f) &= H(f) \cdot X(f) \\ r_{yy}(\tau) &= r_{hh}(\tau) * r_{xx}(\tau) & r_{yy}(n) &= r_{hh}(n) * r_{xx}(n) \\ R_{yy}(F) &= |H(F)|^2 R_{xx}(F) & R_{yy}(f) &= |H(f)|^2 \cdot R_{xx}(f) \\ r_{yx}(\tau) &= h(\tau) * r_{xx}(\tau) & r_{yx}(n) &= h(n) * r_{xx}(n) \\ R_{yx}(F) &= H(F) \cdot R_{xx}(F) & R_{yx}(f) &= H(f) \cdot R_{xx}(f) \\ r_{xx}(\tau) &= \int_t x(t)x(t-\tau)dt & r_{xx}(n) &= \sum_\ell x(\ell)x(\ell-n) \\ r_{yx}(\tau) &= \int_t y(t)x(t-\tau)dt & r_{yx}(n) &= \sum_\ell y(\ell)x(\ell-n) \\ \gamma_{xx}(\tau) &= E\{x(t)x(t-\tau)\} & \gamma_{xx}(n) &= E\{x(\ell)x(\ell-n)\} \\ \gamma_{yx}(\tau) &= E\{y(t)x(t-\tau)\} & \gamma_{yx}(n) &= E\{y(\ell)x(\ell-n)\} \end{array}$$

Normalfördelade stok.var. $X_i \in N(m_i, \sigma_i)$

$$\begin{aligned} E\{X_1 X_2 X_3 X_4\} &= E\{X_1 X_2\} E\{X_3 X_4\} + E\{X_1 X_3\} E\{X_2 X_4\} + \\ &+ E\{X_1 X_4\} E\{X_2 X_3\} - 2m_1 m_2 m_3 m_4 \end{aligned}$$

1.6 Kretsmodeller (en insignal, en utsignal)

1) Kanonisk form (direkt form II)



2) Differensekvation

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

3) Tillståndsbeskrivning

$$\begin{cases} \mathbf{v}(n+1) = \mathbf{F}\mathbf{v}(n) + \mathbf{q} \cdot x(n) \\ y(n) = \mathbf{g}^T \mathbf{v}(n) + d \cdot x(n) \end{cases}$$

där

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{g}^T = (b_k, \dots, b_2, b_1) - b_0(a_k, \dots, a_2, a_1) ; \quad d = b_0$$

4) Systemfunktion

$$\mathcal{H}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

1.7 Några beräkningsmetoder

1) Faltning

$$y(n) = h * x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k)$$

2) Tillståndsekvation

a) Direkt lösning

$$y(n) = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{F}^n \mathbf{v}(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{F}^{n-1-k} \mathbf{q} x(k) + dx(n)$$

b) Impulssvar

$$h(n) = \mathbf{g}^T \cdot \mathbf{F}^{n-1} \mathbf{q} + d\delta(n)$$

c) Systemfunktion

$$\mathcal{H}(z) = \mathbf{g}^T [z\mathbf{I} - \mathbf{F}]^{-1} \mathbf{q} + d$$

1.8 Analog sinussignal genom linjärt, kausalt filter

1) Komplex, icke-kausalt insignal

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t} = (\cos(\Omega_0 t) + j \sin(\Omega_0 t)) \quad -\infty < t < \infty$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)e^{j\Omega_0(t-\tau)}d\tau = \underbrace{H(s)|_{s=j\Omega_0}}_{\text{stationär}} e^{j\Omega_0 t}$$

2) Komplex, kausalt insignal

$$x(t) = e^{j\Omega_0 t}u(t) = (\cos(\Omega_0 t) + j \sin(\Omega_0 t))u(t); \quad X(s) = \frac{1}{s - j\Omega_0}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{T(s)}{N(s)} \frac{1}{s - j\Omega_0} = \underbrace{\frac{T_1(s)}{N(s)}}_{\text{transient}} + \underbrace{H(s)|_{s=j\Omega_0}}_{\text{stationär}} \frac{1}{s - j\Omega_0}$$

$$y(t) = \text{transient} + \underbrace{H(s)|_{s=j\Omega_0} e^{j\Omega_0 t}}_{\text{stationär}}$$

3) Reell, icke-kausalt insignal

$$x(t) = \text{Re}\{e^{j\Omega_0 t}\} = \cos(\Omega_0 t) \quad -\infty < t < \infty$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)\frac{1}{2}(e^{j\Omega_0(t-\tau)} + e^{-j\Omega_0(t-\tau)})d\tau =$$

$$= \underbrace{|H(s)|_{s=j\Omega_0} \cos(\Omega_0 t + \arg\{H(s)|_{s=j\Omega_0}\})}_{\text{stationär}}$$

4) Reell, kausalt insignal

$$x(t) = \text{Re}\{e^{j\Omega_0 t}\}u(t) = \cos(\Omega_0 t)u(t); \quad X(s) = \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{T(s)}{N(s)} \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2} = \underbrace{\frac{T_1(s)}{N(s)}}_{\text{transient}} + \underbrace{\frac{C_1 s + C_0}{s^2 + \Omega_0^2}}_{\text{stationär}}$$

$$H(s)|_{s=j\Omega_0} = A e^{j\theta}; \quad C_1 = A \cos(\theta); \quad C_0 = -A\Omega_0 \sin \theta$$

$$y(t) = \text{transient} + \underbrace{C_1 \cos(\Omega_0 t) + \frac{C_0}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t)}_{\text{stationär}} =$$

$$= \text{transient} + \underbrace{|H(s)|_{s=j\Omega_0} \cos(\Omega_0 t + \arg\{H(s)|_{s=j\Omega_0}\})}_{\text{stationär}}$$

1.9 Tidsdiskret sinussignal genom linjärt, kausalt filter

1) Komplex, icke-kausalt insignal

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} = (\cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)) \quad -\infty < n < \infty$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{j\omega_0(n-k)} = \underbrace{H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} e^{j\omega_0 n}}_{\text{stationär}}$$

2) Komplex, kausalt insignal

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} u(n) = (\cos(\omega_0 n) + j \sin(\omega_0 n)) u(n); \quad X(z) = \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{T(z)}{N(z)} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} = \underbrace{\frac{T_1(z)}{N(z)}}_{\text{transient}} + \underbrace{H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}}}_{\text{stationär}}$$

$$y(n) = \text{transient} + \underbrace{H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} e^{j\omega_0 n}}_{\text{stationär}}$$

3) Reell, icke-kausalt insignal

$$x(n) = \text{Re}\{e^{j\omega_0 n}\} = \cos(\omega_0 n) \quad -\infty < n < \infty$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) \frac{1}{2} (e^{j\omega_0(n-k)} + e^{-j\omega_0(n-k)}) =$$

$$= \underbrace{|H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} \cos(\omega_0 n + \arg\{H(z)|_{z=e^{j\omega_0}}\})}_{\text{stationär}}$$

4) Reell, kausalt insignal

$$x(n) = \text{Re}\{e^{j\omega_0 n}\} u(n) = \cos(\omega_0 n) u(n); \quad X(z) = \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{T(z)}{N(z)} \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}} = \underbrace{\frac{T_1(z)}{N(z)}}_{\text{transient}} + \underbrace{\frac{C_0 + C_1 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}}_{\text{stationär}}$$

$$H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} = A e^{j\theta}; \quad C_0 = A \cos(\theta); \quad C_1 = -A(\sin \omega_0 \sin \theta + \cos \omega_0 \cos \theta)$$

$$y(n) = \text{transient} + \underbrace{C_0 \cos(\omega_0 n) + \frac{C_1 + C_0 \cos(\omega_0)}{\sin(\omega_0)} \sin(\omega_0 n)}_{\text{stationär}} =$$

$$= \text{transient} + \underbrace{|H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} \cos(\omega_0 n + \arg\{H(z)|_{z=e^{j\omega_0}}\})}_{\text{stationär}}$$

2 Transformer

2.1 Laplacetransform

2.1.1 Laplacetransform av kausala signaler

I nedanstående tabell är $f(t) = 0$ för $t < 0$ (dvs $f(t) \cdot u(t) = f(t)$).

1.	$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \mathcal{F}(s)e^{st} ds$	\longleftrightarrow	$\mathcal{F}(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$
2.	$\sum_{\nu} a_{\nu} f_{\nu}(t)$	\longleftrightarrow	$\sum_{\nu} a_{\nu} \mathcal{F}_{\nu}(s)$ Linjäritet
3.	$f(at)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{a} \mathcal{F}\left(\frac{s}{a}\right)$ Skalning
4.	$\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$	\longleftrightarrow	$\mathcal{F}(as)$ $a > 0$ Skalning
5.	$f(t - t_0); t \geq t_0$	\longleftrightarrow	$\mathcal{F}(s) e^{-st_0}$ Tidsförskjutning
6.	$f(t) \cdot e^{-at}$	\longleftrightarrow	$\mathcal{F}(s + a)$ Frekvensförskjutning
7.	$\frac{d^n f}{dt^n}$	\longleftrightarrow	$s^n \mathcal{F}(s)$ Derivering
8.	$\int_{0-}^t f(\tau) d\tau$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s} \mathcal{F}(s)$ Integrering
9.	$(-t)^n f(t)$	\longleftrightarrow	$\frac{d^n \mathcal{F}(s)}{ds^n}$ Derivation i frekvensplanet
10.	$\frac{f(t)}{t}$	\longleftrightarrow	$\int_s^{\infty} \mathcal{F}(z) dz$ Integration i frekvensplanet
11.	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{F}(s)$		Begynnelsevärdesteoremet
12.	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \mathcal{F}(s)$		Slutvärdesteoremet
13.	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$	\longleftrightarrow	$\mathcal{F}_1(s) \cdot \mathcal{F}_2(s)$ Faltning i tidsplanet
14.	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{2\pi j} \mathcal{F}_1(s) * \mathcal{F}_2(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \mathcal{F}_1(z) \cdot \mathcal{F}_2(s - z) \cdot dz$ Faltning i frekvensplanet
15.	$\int_{0-}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \mathcal{F}_1(s) \cdot \mathcal{F}_2(-s) ds$		Parsevals relation

16.	$\delta(t)$	\longleftrightarrow	1
17.	$\delta^n(t)$	\longleftrightarrow	s^n
18.	1	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s}$
19.	$\frac{1}{n!} t^n$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s^{n+1}}$
20.	$e^{-\sigma_0 t}$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s + \sigma_0}$
21.	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\sigma_0 t}$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{(s + \sigma_0)^n}$
22.	$\sin \Omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$
23.	$\cos \Omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}$
24.	$t \cdot \sin \Omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\frac{2\Omega_0 s}{(s^2 + \Omega_0^2)^2}$
25.	$t \cdot \cos \Omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\frac{s^2 - \Omega_0^2}{(s^2 + \Omega_0^2)^2}$
26.	$e^{-\sigma_0 t} \sin \Omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\frac{\Omega_0}{(s + \sigma_0)^2 + \Omega_0^2}$
27.	$e^{-\sigma_0 t} \cos \Omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\frac{s + \sigma_0}{(s + \sigma_0)^2 + \Omega_0^2}$
28.	$e^{-\sigma_0 t} \sin(\Omega_0 t + \phi)$	\longleftrightarrow	$\frac{(s + \sigma_0) \sin \phi + \Omega_0 \cos \phi}{(s + \sigma_0)^2 + \Omega_0^2}$

2.1.2 Enkelsidig Laplacetransform av icke-kausala signaler

Beteckning

$$\mathcal{F}^+(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad \begin{array}{l} \text{Enkelsidig Laplacetransform,} \\ f(t) \text{ ej nödvändigtvis kausal.} \\ \text{För kausala signaler} \end{array}$$

$$\mathcal{F}(s) = \mathcal{F}^+(s)$$

Vid derivering av $f(t)$ erhålles

$$\frac{d}{dt} f(t) \longleftrightarrow s \cdot \mathcal{F}^+(s) - f(0-) \quad \text{Derivering en gång}$$

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) \longleftrightarrow s^n \mathcal{F}^+(s) - s^{n-1} f(0-) - s^{n-2} f^{(1)}(0-) - \dots - f^{(n-1)}(0-) \quad \text{Derivering } n \text{ gånger}$$

2.2 Fouriertransform för tidskontinuerlig signal

$$\Omega = 2\pi F$$

1. $w(t) = \mathcal{F}^{-1}\{W(F)\} = \int_{-\infty}^{\infty} W(F)e^{j2\pi Ft}dF \longleftrightarrow W(F) = \mathcal{F}\{w(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)e^{-j2\pi Ft}dt$
2. $\sum_{\nu} a_{\nu}w_{\nu}(t) \longleftrightarrow \sum_{\nu} a_{\nu}W_{\nu}(F)$
3. $w^*(-t) \longleftrightarrow W^*(F)$
4. $W(t) \longleftrightarrow w(-F)$
5. $w(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} W\left(\frac{F}{a}\right)$
6. $w(t - t_0) \longleftrightarrow W(F) \cdot e^{-j2\pi Ft_0}$
7. $w(t) \cdot e^{j2\pi F_0 t} \longleftrightarrow W(F - F_0)$
8. $w^*(t) \longleftrightarrow W^*(-F)$
9. $\frac{d^n w(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j2\pi F)^n W(F)$
10. $\int_{-\infty}^t w(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi F} W(F)$ om $W(F) = 0$ för $F = 0$
11. $-j2\pi t w(t) \longleftrightarrow \frac{dw}{dF}$
12. $w_1(t) * w_2(t) \longleftrightarrow W_1(F) \cdot W_2(F)$
13. $w_1(t) \cdot w_2(t) \longleftrightarrow W_1(F) * W_2(F)$
14. $\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |W(F)|^2 dF$ Parsevals relation
15. $\int_{-\infty}^{\infty} w_1(t) \cdot w_2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W_1(F) \cdot W_2^*(F) dF$ $w_1(t), w_2(t)$ reella
16. $\delta(t) \longleftrightarrow 1$
17. $1 \longleftrightarrow \delta(F)$
18. $u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j2\pi F} + \frac{1}{2} \delta(F)$
19. $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{a+j\Omega}$

20. $e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2 + \Omega^2}$
21. $e^{j2\pi F_0 t} \longleftrightarrow \delta(F - F_0)$
22. $\sin 2\pi F_0 t \longleftrightarrow j \frac{1}{2} \{\delta(F + F_0) - \delta(F - F_0)\}$
23. $\sin 2\pi F_0 t \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{\Omega_0}{\Omega_0^2 - \Omega^2} + j \frac{1}{4} \{\delta(F + F_0) - \delta(F - F_0)\}$
24. $\cos 2\pi F_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2} \{\delta(F + F_0) + \delta(F - F_0)\}$
25. $\cos 2\pi F_0 t \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{j\Omega}{\Omega_0^2 - \Omega^2} + \frac{1}{4} \{\delta(F + F_0) + \delta(F - F_0)\}$
26. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-t^2/2\sigma^2} \longleftrightarrow e^{-(\Omega\sigma)^2/2}$
27. $e^{-at} \sin 2\pi F_0 t \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{\Omega_0}{(j\Omega + a)^2 + (\Omega_0)^2}$
28. $e^{-a|t|} \sin 2\pi F_0 |t| \longleftrightarrow \frac{2\Omega_0(\Omega_0^2 + a^2 - \Omega^2)}{(\Omega^2 + a^2 - \Omega_0^2)^2 + 4a^2\Omega_0^2}$
29. $e^{-at} \cos 2\pi F_0 t \cdot u(t) \longleftrightarrow \frac{j\Omega + a}{(j\Omega + a)^2 + (\Omega_0)^2}$
30. $e^{-a|t|} \cos 2\pi F_0 t \longleftrightarrow \frac{2a(\Omega_0^2 + a^2 + \Omega^2)}{(\Omega^2 + a^2 - \Omega_0^2)^2 + 4a^2\Omega_0^2}$
31. $rect(at) = \begin{cases} 1 & \text{f\"or } |t| < \frac{1}{2a} \\ 0 & \text{f\"or f.} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{1}{a} sinc\left(\frac{F}{a}\right) \quad a > 0$
32. $sinc(at) = \frac{\sin(\pi at)}{\pi at} \longleftrightarrow \frac{1}{a} rect\left(\frac{F}{a}\right) \quad a > 0$
33. $rep_T(w(t)) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(t - mT) \longleftrightarrow \frac{1}{|T|} comb_{1/T}(W(F))$
34. $|T| comb_T(w(t)) = |T| \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(mT) \delta(t - mT) \longleftrightarrow rep_{1/T}(W(F))$
35. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(t - nT) \longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} c_n \delta\left(F - \frac{n}{T}\right) = \sum c_n e^{-j2\pi nTF}$

2.3 Z-transformen

2.3.1 Z-transform av kausala signaler

- | | | |
|-----|--|---|
| 1. | $\mathcal{X}(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ | Transform |
| 2. | $x(n) = Z^{-1}[\mathcal{X}(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \mathcal{X}(z)z^{n-1}dz$ | Inverstransform |
| 3. | $\sum_{\nu} a_{\nu}x_{\nu}(n) \longleftrightarrow \sum_{\nu} a_{\nu}\mathcal{X}_{\nu}(z)$ | Linjäritet |
| 4. | $x(n - n_0) \longleftrightarrow z^{-n_0}\mathcal{X}(z)$ | Skift (n_0 positivt eller negativt heltal) |
| 5. | $nx(n) \longleftrightarrow -z \frac{d}{dz} \mathcal{X}(z)$ | Multiplikation med n |
| 6. | $a^n x(n) \longleftrightarrow \mathcal{X}\left(\frac{z}{a}\right)$ | Skalning |
| 7. | $x(-n) \longleftrightarrow \mathcal{X}\left(\frac{1}{z}\right)$ | Spegling av tidsföljden |
| 8. | $\left[\sum_{\ell=-\infty}^n x(\ell)\right] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1} \mathcal{X}(z)$ | Summering |
| 9. | $x * y \longleftrightarrow \mathcal{X}(z) \cdot \mathcal{Y}(z)$ | Faltning |
| 10. | $x(n) \cdot y(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \mathcal{Y}(\xi)\mathcal{X}\left(\frac{z}{\xi}\right)\xi^{-1}d\xi$ | Produkt |
| 11. | $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{X}(z)$ (om gränsvärdet existerar) | Begynnelsevärdesteoremet |
| 12. | $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)\mathcal{X}(z)$
(om ROC inkluderar enhetscirkeln) | Slutvärdesteoremet |
| 13. | $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)y(\ell) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \mathcal{X}(z)\mathcal{Y}\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}dz$ | Parsevals teorem för reellvärda tidsföljder |
| 14. | $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x^2(\ell) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \mathcal{X}(z)\mathcal{X}(z^{-1})z^{-1}dz$ | -- |

Talföljd	\longleftrightarrow	Transform
$x(n)$	\longleftrightarrow	$\mathcal{X}(z)$
15. $\delta(n)$	\longleftrightarrow	1
16. $u(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
17. $nu(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
18. $\alpha^n u(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$
19. $(n + 1)\alpha^n u(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$
20. $\frac{(n + 1)(n + 2) \dots (n + r - 1)}{(r - 1)!} \alpha^n u(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{(1 - \alpha z^{-1})^r}$
21. $\alpha^n \cos \beta n u(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{1 - z^{-1} \alpha \cos \beta}{1 - z^{-1} 2\alpha \cos \beta + \alpha^2 z^{-2}}$
22. $\alpha^n \sin \beta n u(n)$	\longleftrightarrow	$\frac{z^{-1} \alpha \sin \beta}{1 - z^{-1} 2\alpha \cos \beta + \alpha^2 z^{-2}}$
23. $\mathbf{F}^n u(n)$	\longleftrightarrow	$(\mathbf{I} - z^{-1} \mathbf{F})^{-1}$

2.3.2 Enkelsidig Z-transform av icke kausala signaler

Beteckning

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^+(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} && \text{Enkelsidig Z-transform, } x(n) \text{ ej} \\ &&& \text{nödvändigtvis kausal} \\ \mathcal{X}(z) &= \mathcal{X}^+(z) && \text{För kausala signaler} \end{aligned}$$

Vid skift av $x(n)$ erhålles:

i) skift ett steg

$$\begin{aligned} x(n - 1) &\longleftrightarrow z^{-1} \mathcal{X}^+(z) + x(-1) \\ x(n + 1) &\longleftrightarrow z \mathcal{X}^+(z) - x(0) \cdot z \end{aligned}$$

ii) skift n_0 steg ($n_0 \geq 0$)

$$\begin{aligned} x(n - n_0) &\longleftrightarrow z^{-n_0} \mathcal{X}^+(z) + x(-1)z^{-n_0+1} + \\ &\quad + x(-2)z^{-n_0+2} + \dots + x(-n_0) \\ x(n + n_0) &\longleftrightarrow z^{n_0} \mathcal{X}^+(z) - x(0)z^{n_0} - x(1)z^{n_0-1} - \dots - x(n_0 - 1)z \end{aligned}$$

2.4 Fouriertransform för tidsdiskret signal

1. $X(f) = \mathcal{F}(x(n)) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)e^{-j2\pi f\ell} \quad \omega = 2\pi f$ Transform
2. $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{j2\pi fn}df = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$ Inverstransform
3. $\sum a_{\nu}x_{\nu}(n) \longleftrightarrow \sum_{\nu} a_{\nu}X_{\nu}(f)$ Linjäritet
4. $x(n - n_0) \longleftrightarrow X(f) \cdot e^{-j2\pi fn_0}$ Skift
5. $x(n)e^{j2\pi f_0 n} \longleftrightarrow X(f - f_0)$ Frekvenstranslation
6. $x(n) \cdot \cos 2\pi f_0 n \longleftrightarrow \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$
Modulation
7. $x(n) \cdot \sin 2\pi f_0 n \longleftrightarrow \frac{1}{2j} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]$
Modulation
8. $x * y \longleftrightarrow X(f) \cdot Y(f)$ Faltning
9. $x \cdot y \longleftrightarrow \int_{-1/2}^{1/2} X(\lambda) \cdot Y(f - \lambda)d\lambda$ Produkt
10. $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell)y(\ell) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)Y^*(f)df$ Parsevals teorem
för reellvärda tidsföljder
11. $X(f) = \mathcal{X}(e^{j\omega})$ Om $x(n) = 0$ för $n < n_0$ och
 $\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |x(\ell)|^2 < \infty$
(Gäller t.ex.: 18,19,20,21 och 22
i Z-transformtabellen för $|\alpha| < 1$)
12. $\delta(n) \longleftrightarrow 1$
13. $\delta(n - n_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}$
14. $1 \forall n \longleftrightarrow \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(f - p)$
15. $u(n) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(f - p) + \frac{1}{2} + \frac{1}{j \cdot 2 \cdot \tan(\pi f)}$

$$16. \quad 2f_1 \cdot \text{sinc}(2f_1 \cdot n) = 2f_1 \frac{\sin(2\pi f_1 n)}{2\pi f_1 n}$$

$$\longleftrightarrow \text{rect}_p\left(\frac{f}{2f_1}\right) = \begin{cases} 1 & |f - n| < f_1 < 1/2, \quad n \text{ heltal} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Idealt LP-filter

$$17. \quad 4f_1 \text{sinc}(2f_1 n) \cos(2\pi f_0 n)$$

$$\longleftrightarrow \text{rect}_p\left(\frac{f - f_0}{2f_1}\right) + \text{rect}_p\left(\frac{f + f_0}{2f_1}\right) \quad \text{Idealt BP-filter}$$

$$18. \quad \frac{2\pi f_1 n \cos 2\pi f_1 n - \sin 2\pi f_1 n}{\pi n^2}$$

$$\longleftrightarrow (j2\pi f)_p = \begin{cases} j2\pi(f - n) & |f - n| < f_1 < 1/2, \quad n \text{ heltal} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Deriverande krets

$$19. \quad \cos(2\pi f_0 n) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} [\delta(f - f_0 - p) + \delta(f + f_0 - p)]$$

$$20. \quad \alpha^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\pi f}$$

$$21. \quad \alpha^{|n|} \cos(2\pi f_0 n)$$

$$\longleftrightarrow \frac{1 - \alpha^2}{2} \left[\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\pi(f + f_0)} + \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos 2\pi(f - f_0)} \right]$$

$$22. \quad p_r(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq \frac{M-1}{2} \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases} \quad M \text{ udda}$$

$$\longleftrightarrow P_r(f) = \frac{\sin(\pi f M)}{\sin(\pi f)} \quad \text{Rektangulärt fönster}$$

2.5 Fourierserietveckling

2.5.1 Kontinuerlig tid

En periodisk funktion med perioden T_0 , dvs $f(t) = f(t - T_0)$, kan uttryckas i en serietveckling enligt

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

där

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt ; F_0 = \frac{1}{T_0}$$

Om $f(t)$ reell kan detta också uttryckas

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \sin 2\pi k F_0 t \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) dt \\ a_k &= 2|c_k| \cos \theta_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cos(2\pi k F_0 t) dt \\ b_k &= 2|c_k| \sin \theta_k = \frac{-2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \sin(2\pi k F_0 t) dt \end{aligned}$$

Effekten ges av (Parsevals relation)

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

För reella signaler gäller också att

$$P = c_0^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

2.5.2 Diskret tid

En periodisk funktion med perioden N , dvs $f(n) = f(n - N)$, kan uttryckas i en serietveckling enligt

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k n/N}$$

där

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi k n/N}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

Serietvecklingen betecknas ofta med DTFS (discrete-time Fourier series).

Om $f(n)$ reell kan detta också uttryckas

$$\begin{aligned} f(n) &= c_0 + 2 \sum_{k=1}^L |c_k| \cos\left(2\pi \frac{kn}{N} + \theta_k\right) = \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^L \left(a_k \cos\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) - b_k \sin\left(2\pi \frac{kn}{N}\right) \right) \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_k &= 2|c_k| \cos(\theta_k) \\ b_k &= 2|c_k| \sin(\theta_k) \\ L &= \begin{cases} \frac{N}{2} & \text{om } N \text{ jämn} \\ \frac{N-1}{2} & \text{om } N \text{ udda} \end{cases} \end{aligned}$$

Effekten ges av

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

och energin över en period ges av

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |f(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2$$

2.6 Diskreta Fouriertransformen (DFT)

2.6.1 Definition

$$\begin{aligned} X_k = DFT(x_n) &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{Transform} \\ x_n = IDFT(X_k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{Inversion} \end{aligned}$$

OBS:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{k-k_0}{N} \cdot n} = N \cdot \delta(k - k_0, (\text{modulo } N))$$

2.6.2 Cirkulär faltning

$$x_n \circledast y_n = \sum_{\ell=0}^{N-1} x_\ell y_{n-\ell, \text{modulo } N} \xleftrightarrow{\text{DFT}} X_k Y_k \quad \text{Cirkulär faltning}$$

Detta betyder att x_n - och y_n -sekvenserna skall upprepas periodiskt före summationen, dvs utanför intervallet $n = 0, 1, \dots, N-1$ gäller vid summationen att $x_{n-\ell N} = x_n$ och $y_{n-\ell N} = y_n$ ($\ell =$ heltal) dvs index beräknas modulo N . Cirkulär faltning betecknas också $x(n) \circledast y(n)$.

2.6.3 Icke-cirkulär faltning med DFT

Om $x(n) = 0$ för $n \notin [0, L - 1]$ och $y(n) = 0$ för $n \notin [0, M - 1]$ så är $x * y = 0$ för $n \notin [0, N - 1]$ där $N \geq L + M - 1$.

Faltningen kan beräknas ur

$$x * y = \begin{cases} x \circledast y = \text{IDFT}(X_k Y_k) & n = 0, 1, \dots, N - 1 \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

där

$$\begin{aligned} X_k &= \text{DFT}(x(n)) \\ Y_k &= \text{DFT}(y(n)) \end{aligned}$$

2.6.4 Relation till Fouriertransformen $X(f)$:

$$X(k/N) = X_k = \text{DFT}(x(n)) \text{ om } x(n) = 0 \text{ för } n \notin [0, N - 1]$$

$$X(k/N) = X_k = \text{DFT}(x_p(n)) \text{ allmänt } x(n) \text{ där } x_p(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(n - \ell N)$$

2.6.5 Relation till Fourierserier

$$X\left(\frac{k}{N}\right) = X_k = \text{DFT}(x(n)) = N \cdot c_k$$

om

$$x(n) = x_p(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

där

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{nk}{N}} \quad -\infty < n < \infty$$

och

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

2.6.6 Parsevals teorem

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k Y^*(k)$$

2.6.7 Några egenskaper hos DFT

Tid	Frekvens
$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
$x(n) = x(n + N)$	$X(k) = X(k + N)$
$x(N - n)$	$X(N - k)$
$x((n - l))_N$	$X(k)e^{-j2\pi kl/N}$
$x(n)e^{j2\pi ln/N}$	$X((k - l))_N$
$x^*(n)$	$X^*(N - k)$
$x_1(n) \textcircled{N} x_2(n)$	$X_1(k)X_2(k)$
$x(n) \textcircled{N} y^*(-n)$	$X(k)Y^*(k)$
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$
$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$

2.7 Några fönsterfunktioner och deras Fouriertransform

- i) Fönsterfunktionerna centrerade kring origo (M udda) dvs funktionerna är skilda från 0 bara för $-(M - 1)/2 \leq n \leq (M - 1)/2$

Rektangelfönster:

$$w_{rect}(n) = 1$$

$$W_{rect}(f) = M \cdot \frac{\sin(\pi f M)}{M \sin(\pi f)}$$

Hanningfönster:

$$w_{hanning}(n) = 0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{M - 1}\right)$$

$$\begin{aligned} W_{hanning}(f) &= 0.5 W_{rect}(f) + \\ &+ 0.25 W_{rect}\left(f - \frac{1}{M - 1}\right) + \\ &+ 0.25 W_{rect}\left(f + \frac{1}{M - 1}\right) \end{aligned}$$

Hammingfönster:

$$w_{hamming}(n) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M - 1}\right)$$

$$\begin{aligned} W_{hamming}(f) &= 0.54 W_{rect}(f) + \\ &+ 0.23 W_{rect}\left(f - \frac{1}{M - 1}\right) + \\ &+ 0.23 W_{rect}\left(f + \frac{1}{M - 1}\right) \end{aligned}$$

Blackmanfönster:

$$w_{blackman}(n) = 0.42 + 0.5 \cos\frac{2\pi n}{M - 1} + 0.08 \cos\frac{4\pi n}{M - 1}$$

$$\begin{aligned}
W_{blackman}(f) &= 0.42 W_{rect}(f) + \\
&+ 0.25 W_{rect}\left(f - \frac{1}{M-1}\right) + \\
&+ 0.25 W_{rect}\left(f + \frac{1}{M-1}\right) + \\
&+ 0.04 W_{rect}\left(f - \frac{2}{M-1}\right) + \\
&+ 0.04 W_{rect}\left(f + \frac{2}{M-1}\right)
\end{aligned}$$

Bartlett-fönster (triangelfönster):

$$\begin{aligned}
w_{triangel}(n) &= 1 - \frac{|n|}{(M-1)/2} \\
W_{triangel}(f) &= \frac{M}{2} \left(\frac{\sin \frac{\pi f M}{2}}{\frac{M}{2} \sin(\pi f)} \right)^2 \approx \frac{2}{M} W_{rect}^2\left(\frac{f}{2}\right) \text{ för små } f
\end{aligned}$$

ii) Fönsterfunktioner definierade för $0 \leq n \leq M-1$ (M udda)

Hanning

$$\begin{aligned}
w_{hanning}(n) &= 0.5 \left(1 + \cos \frac{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{M-1} \right) = \\
&= 0.5 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{n}{M-1} \right) \right)
\end{aligned}$$

Hamming

$$\begin{aligned}
w_{hamming}(n) &= 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{M-1} = \\
&= 0.54 - 0.46 \cos \frac{2\pi n}{M-1}
\end{aligned}$$

Blackman

$$\begin{aligned}
w_{blackman}(n) &= 0.42 + 0.5 \cos \frac{2\pi \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{M-1} + \\
&+ 0.08 \cos \frac{4\pi \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{M-1} = \\
&= 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{M-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{M-1}
\end{aligned}$$

Triangelfönster (Bartlett)

$$w_{triangel}(n) = 1 - \frac{\left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\frac{M-1}{2}}$$

3 Sampling av analoga signaler

3.1 Sampling och rekonstruktion

Fouriertransformer

Tidskontinuerlig signal:

$$\begin{cases} X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt \\ x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF \end{cases}$$

Tidsdiskret signal:

$$\begin{cases} X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \\ x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2\pi fn} df \end{cases}$$

Samplingsteoremet

För bandbegränsad $x_a(t)$, dvs $X_a(F) = 0$ för $|F| \geq 1/2T$ gäller

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)}$$

Samplingsfrekvens $F_s = 1/T$.

Sampling

$$\begin{aligned} x(n) &= x_a(nT); \quad T = \frac{1}{F_s} \\ X(f) &= X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s) \\ \Gamma(f) &= \Gamma\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Gamma_a(F - kF_s) \end{aligned}$$

Rekonstruktion (idealt)

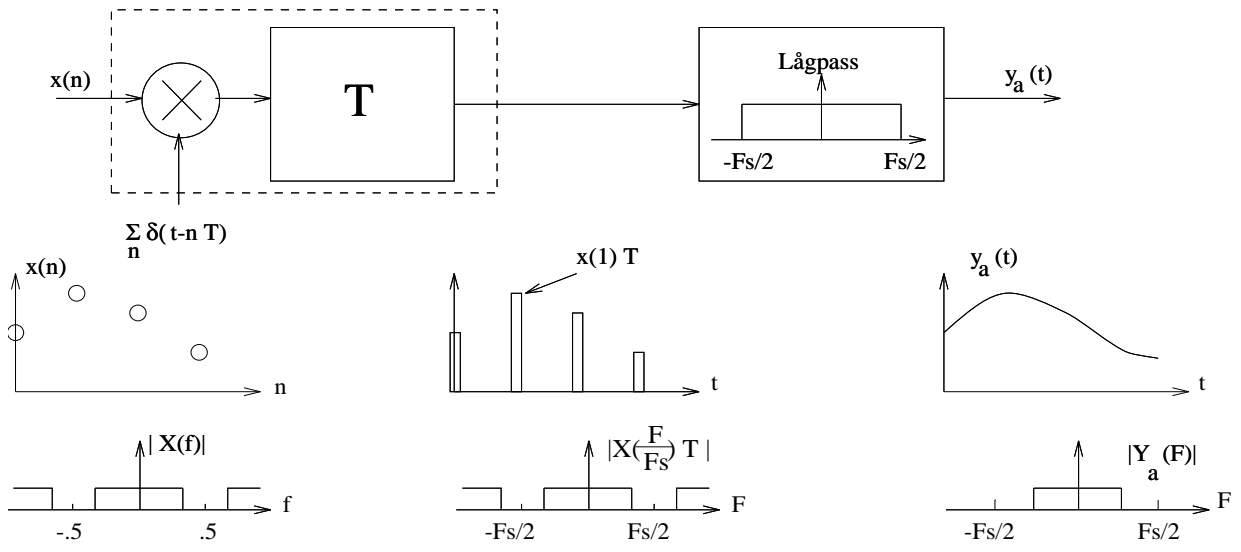
$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)} \\ X_a(F) &= \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2} \\ \Gamma_a(F) &= \frac{1}{F_s} \Gamma\left(\frac{F}{F_s}\right) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2} \end{aligned}$$

Rekonstruktion med sample-and-hold

$$\begin{aligned} X_a(F) &= \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) \cdot \frac{\sin(\pi FT)}{\pi FT} e^{-j2\pi F \frac{T}{2}} \cdot H_{LP}(F) \\ \Gamma_a(F) &= \frac{1}{F_s} \Gamma\left(\frac{F}{F_s}\right) \left| \frac{\sin(\pi FT)}{\pi FT} \right|^2 \cdot |H_{LP}(F)|^2 \end{aligned}$$

Blockschema över D/A omvandling

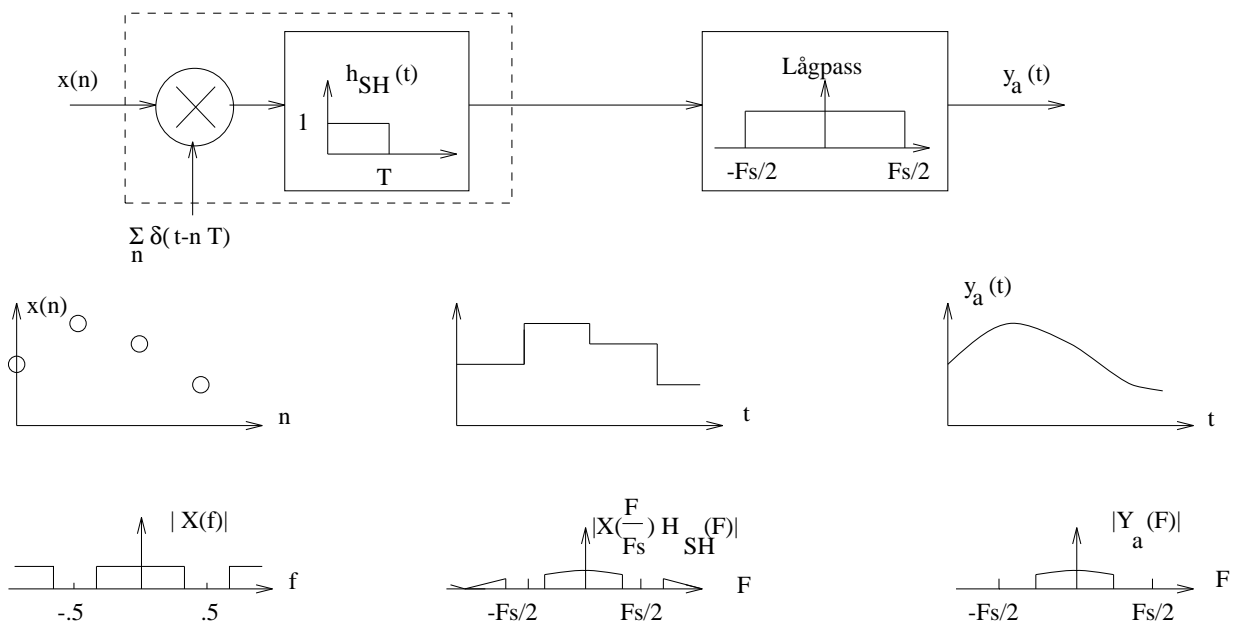
Ideal rekonstruktion



$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{\sin \frac{\pi}{T} (t - nT)}{\frac{\pi}{T} (t - nT)}$$

$$Y_a(F) = \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) \quad |F| \leq \frac{F_s}{2}$$

Rekonstruktion med sample-and-hold



$$Y_a(F) = \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right) \cdot \frac{\sin(\pi FT)}{\pi FT} e^{-j2\pi F \frac{T}{2}} \cdot H_{LP}(F)$$

3.2 Distorsionsmått

3.2.1 Vikningsdistorsion vid sampling

Spektrum efter antivikningsfilter:

$$\Gamma_{in}(F)$$

Vikningsdistorsion:

$$D_A = 2 \cdot \int_{F_s - F_p}^{\infty} \Gamma_{in}(F) dF$$

Nyttig signaleffekt:

$$D_s = 2 \int_0^{F_p} \Gamma_{in}(F) dF$$

där $0 \leq F_p \leq F_s/2$

Signaldistorsionsförhållande:

$$\text{A: } SDR_A = \frac{D_s}{D_A} = \frac{\int_0^{F_p} \Gamma_{in}(F) dF}{\int_{F_s - F_p}^{\infty} \Gamma_{in}(F) dF}$$

$$\text{B: } SDR_A^0 = \min_{|F| \leq F_p} \frac{\Gamma_{in}(F)}{\Gamma_{in}(F_s - F)}$$

Vid monotont avtagande spektrum blir

$$SDR_A^0 = \frac{\Gamma_{in}(F_p)}{\Gamma_{in}(F_s - F_p)}$$

3.2.2 Periodiseringsdistorsion vid rekonstruktion

Periodiseringsdistorsion:

$$D_P = 2 \cdot \int_{F_s/2}^{\infty} \Gamma_{ut}(F) dF$$

Nyttig signaleffekt:

$$D_s = 2 \cdot \int_0^{F_s/2} \Gamma_{ut}(F) dF$$

Signaldistorsionsförhållande:

$$\text{A: } SDR_P = \frac{D_s}{D_P} = \frac{\int_0^{F_s/2} \Gamma_{ut}(F) dF}{\int_{F_s/2}^{\infty} \Gamma_{ut}(F) dF}$$

$$\text{B: } SDR_P^0 = \min_{|F| < F_s/2} \frac{\Gamma_{ut}(F)}{\Gamma_{ut}(F_s - F)}$$

Ett bra mått ges ofta av

$$SDR_P^0 = \frac{\Gamma_{ut}(F_p)}{\Gamma_{ut}(F_s - F_p)}$$

där F_p svarar mot högsta frekvenskomponenten hos den samplade signalen.

3.3 Kvantiseringdistorsion

$$D_Q \simeq \frac{\Delta^2}{12} \text{ linjär kvantisering, } \Delta \text{ litet}$$

$$SDR_Q = \frac{\text{Signaleffekt}}{D_q}$$

Kvantiseringdistorsion vid sinussignal, maximal utstyrning, r bitar

$$SDR_Q = 1.76 + 6 \cdot r [\text{dB}]$$

Kvantiseringdistorsion, utstyrning uttryckt i topp- och RMS-värde, r bitar

$$SDR_Q = 6 \cdot r + 1.76 - 10^{10} \log \left(\frac{A_{peak}}{A_{RMS} \cdot \sqrt{2}} \right)^2 - 10^{10} \log \left(\frac{V}{A_{peak}} \right)^2$$

där $[-V, V]$ är kvantiserarens utstyrningsområde.

3.4 Decimering och interpolering

Nedsampling med en faktor M

$$\downarrow M \quad y(n) = \{ \dots u(0), u(M), u(2M) \dots \}$$

$$Y(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} U \left(\frac{f-i}{M} \right)$$

Uppsampling med en faktor L

$$\uparrow L \quad w(n) = \{ \dots x(0), \underbrace{0, 0, \dots}_{L-1 \text{ st}}, x(1), \underbrace{0, 0, \dots}_{L-1 \text{ st}}, x(2) \dots \}$$

$$W(f) = X(fL)$$

4 Analoga filter

4.1 Filterapproximationer av ideala LP-filter

Allmän form på approximationens amplitudfunktion

$$|H(\Omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + g_N \left(\left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)^2 \right)}} \quad \Omega = 2\pi F$$

där

$$g_N \left(\left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)^2 \right) \begin{cases} \ll 1 & \left| \frac{\Omega}{\Omega_p} \right| < 1 \\ \gg 1 & \left| \frac{\Omega}{\Omega_p} \right| > 1 \end{cases}$$

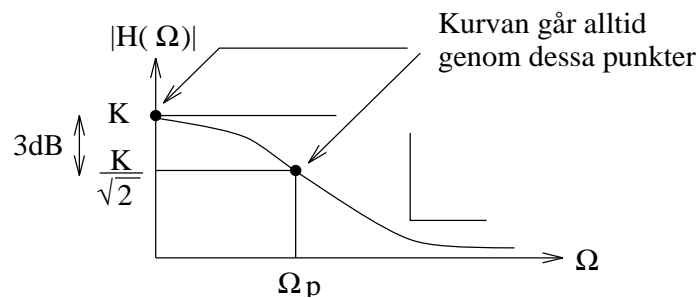
och Ω_p är filtrets gränsvinkelfrekvens.

Ibland kan det vara lämpligt att normera vinkelfrekvensen med Ω_p .

Detta svarar mot att man sätter $\Omega_p = 1$ i detta avsnitt.

4.1.1 Butterworthfilter

$$|H(\Omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)^{2N}}}$$



K = amplitudfunktionens maximivärde.

K = amplitudfunktionens värde för $\Omega = 0$.

Systemfunktionens nämnare är Butterworthpolynom om $\Omega_p = 1$. Dessa polynom finns i Tabell 2.1. För allmänt Ω_p gäller

$$\mathcal{H}(s) = \frac{K}{\left(\frac{s}{\Omega_p} \right)^N + a_{N-1} \left(\frac{s}{\Omega_p} \right)^{N-1} + \dots + a_1 \left(\frac{s}{\Omega_p} \right) + 1}$$

där a_1, \dots, a_{N-1} erhålles ur Tabell 4.1.

Tabell 4.1

Koefficienter a_ν i Butterworthpolynom $s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \dots + a_1s + 1$

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1							
2	$\sqrt{2}$						
3	2	2					
4	2.613	3.414	2.613				
5	3.236	5.236	5.236	3.236			
6	3.864	7.464	9.141	7.464	3.864		
7	4.494	10.103	14.606	14.606	10.103	4.494	
8	5.126	13.138	21.848	25.691	21.848	13.138	5.126

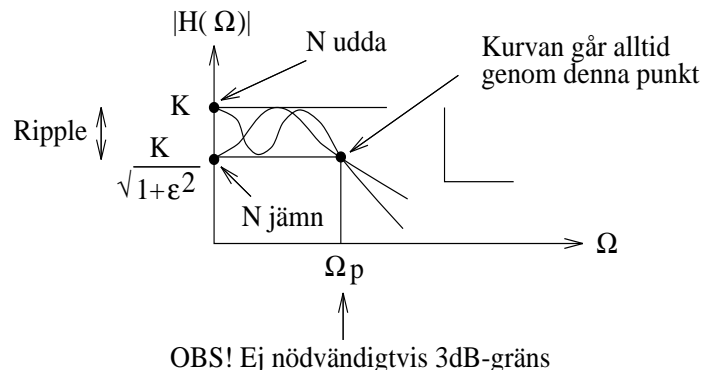
Tabell 4.2

Faktorerade Butterworthpolynom för $\Omega_p = 1$. För $\Omega_p \neq 1$ lät $s \rightarrow s/\Omega_p$.

N	
1	$(s + 1)$
2	$(s^2 + \sqrt{2}s + 1)$
3	$(s^2 + s + 1)(s + 1)$
4	$(s^2 + 0.76536s + 1)(s^2 + 1.84776s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + \sqrt{2}s + 1)(s^2 + 1.9318s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.4450s + 1)(s^2 + 1.2465s + 1)(s^2 + 1.8022s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3896s + 1)(s^2 + 1.1110s + 1)(s^2 + 1.6630s + 1)(s^2 + 1.9622s + 1)$

4.1.2 Chebyshevfilter

$$|H(\Omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}}$$



Ripple = $10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2)$ dB.

K = amplitudfunktionens maximivärde.

$K \neq$ amplitudfunktionens värde för $\Omega = 0$ då N är jämn.

$T_N(\frac{\Omega}{\Omega_p})$ är Chebyshevpolyinom. (Betecknas även med $C_N(\frac{\Omega}{\Omega_p})$). Dessa finns i Tabell 4.3 för $\Omega_p = 1$. För $\Omega_p \neq 1$ låt $\Omega \rightarrow \frac{\Omega}{\Omega_p}$ i Tabell 4.3.

Systemfunktionen

$$\mathcal{H}(s) = \frac{K \cdot a_0 \cdot \begin{cases} 1 & N \text{ udda} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} & N \text{ jämn} \end{cases}}{\left(\frac{s}{\Omega_p}\right)^N + a_{N-1} \left(\frac{s}{\Omega_p}\right)^{N-1} + \dots + a_0}$$

där $\varepsilon, a_0, \dots, a_{N-1}$ erhålles ur Tabell 4.4.

Pollägena till $\mathcal{H}(s)$ finns i Tabell 4.5 för $\Omega_p = 1$. För $\Omega_p \neq 1$ multipliceras pollägena med Ω_p .

Tabell 4.3

Chebyshevpolyinom.

$$T_N(\Omega) = \begin{cases} \cos(N \arccos \Omega) & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \operatorname{arccosh} \Omega) & |\Omega| \geq 1 \end{cases} \quad \Omega = 2\pi F$$

eller

$$T_N(\Omega) = \frac{(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1})^N + (\Omega - \sqrt{\Omega^2 - 1})^{-N}}{2} \quad |\Omega| \geq 1$$

Rekursiv beräkning

$$T_{N+1}(\Omega) = 2\Omega T_N(\Omega) - T_{N-1}(\Omega)$$

N	$T_N(\Omega)$
0	1
1	Ω
2	$2\Omega^2 - 1$
3	$4\Omega^3 - 3\Omega$
4	$8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$
5	$16\Omega^5 - 20\Omega^3 + 5\Omega$
6	$32\Omega^6 - 48\Omega^4 + 18\Omega^2 - 1$
7	$64\Omega^7 - 112\Omega^5 + 56\Omega^3 - 7\Omega$
8	$128\Omega^8 - 256\Omega^6 + 160\Omega^4 - 32\Omega^2 + 1$
9	$256\Omega^9 - 576\Omega^7 + 432\Omega^5 - 120\Omega^3 + 9\Omega$
10	$512\Omega^{10} - 1280\Omega^8 + 1120\Omega^6 - 400\Omega^4 + 50\Omega^2 - 1$

Tabell 4.4. Koefficienterna a_ν i Chebyshefilter.

0.5dB ripple ($\varepsilon = 0.349$, $\varepsilon^2 = 0.122$).

N	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1								2.863
2							1.426	1.516
3						1.253	1.535	0.716
4					1.197	1.717	1.025	0.379
5				1.172	1.937	1.309	0.752	0.179
6			1.159	2.172	1.589	1.172	0.432	0.095
7		1.151	2.413	1.869	1.648	0.756	0.282	0.045
8	1.146	2.657	2.149	2.184	1.148	0.573	0.152	0.024

1-dB ripple ($\varepsilon = 0.509$, $\varepsilon^2 = 0.259$).

N	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1								1.965
2							1.098	1.102
3						0.989	1.238	0.491
4					0.953	1.454	0.743	0.276
5				0.937	1.689	0.974	0.580	0.123
6			0.928	1.931	1.202	0.939	0.307	0.069
7		0.923	2.176	1.429	1.357	0.549	0.214	0.031
8	0.920	2.423	1.655	1.837	0.447	0.448	0.107	0.017

2-dB ripple ($\varepsilon = 0.765$, $\varepsilon^2 = 0.585$).

N	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1								1.307
2							0.804	0.823
3						0.738	1.022	0.327
4					0.716	1.256	0.517	0.206
5				0.705	1.499	0.693	0.459	0.082
6			0.701	1.745	0.867	0.771	0.210	0.051
7		0.698	1.994	1.039	1.144	0.383	0.166	0.020
8	0.696	2.242	1.212	1.579	0.598	0.359	0.073	0.013

3-dB*) ripple ($\varepsilon = 0.998$, $\varepsilon^2 = 0.995$).

N	a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1								1.002
2							0.645	0.708
3						0.597	0.928	0.251
4					0.581	1.169	0.405	0.177
5				0.575	1.415	0.549	0.408	0.063
6			0.571	1.663	0.691	0.699	0.163	0.044
7		0.568	1.911	0.831	1.052	0.300	0.146	0.016
8	0.567	2.161	0.972	1.467	0.472	0.321	0.056	0.011

*) Tabellen är uträknad för "exakt" 3dB, ej för $20 \cdot \log \sqrt{2} \approx 3.01$ dB.
Därför $\varepsilon \neq 1$ och $a_0 \neq 1$ för $N = 1$.

Tabell 4.5. Pollägen för Chebyshevfilter.

0.5dB ripple ($\varepsilon = 0.349$, $\varepsilon^2 = 0.122$).

$N = 1$	2	3	4	5	6	7	8
-2.863	-0.713	-0.626	-0.175	-0.362	-0.078	-0.256	-0.044
	$\pm j1.004$		$\pm j1.016$		$\pm j1.008$		$\pm j1.005$
		-0.313	-0.423	-0.112	-0.212	-0.057	-0.124
		$\pm j1.022$	$\pm j0.421$	$\pm j1.011$	$\pm j0.738$	$\pm j1.006$	$\pm j0.852$
				-0.293	-0.290	± 0.160	-0.186
				$\pm j0.625$	$\pm j0.270$	$\pm j0.807$	$\pm j0.570$
						-0.231	-0.220
						$\pm j0.448$	$\pm j0.200$

1-dB ripple ($\varepsilon = 0.509$, $\varepsilon^2 = 0.259$).

$N = 1$	2	3	4	5	6	7	8
-1.965	-0.549	-0.494	-0.139	-0.289	-0.062	-0.205	-0.035
	$\pm j0.895$		$\pm j0.983$		$\pm j0.993$		$\pm j0.996$
		-0.247	-0.337	-0.089	-0.170	-0.046	-0.100
		$\pm j0.966$	$\pm j0.407$	$\pm j0.990$	$\pm j0.727$	$\pm j0.995$	$\pm j0.845$
				-0.234	-0.232	-0.128	-0.149
				$\pm j0.612$	$\pm j0.266$	$\pm j0.798$	$\pm j0.564$
						-0.185	-0.176
						$\pm j0.443$	$\pm j0.198$

2-dB ripple ($\varepsilon = 0.765$, $\varepsilon^2 = 0.585$).

$N = 1$	2	3	4	5	6	7	8
-1.307	-0.402	-0.369	-0.105	-0.218	-0.047	-0.155	-0.026
	$\pm j0.813$		$\pm j0.958$		$\pm j0.982$		$\pm j0.990$
		-0.184	-0.253	-0.067	-0.128	-0.034	-0.075
		$\pm j0.923$	± 0.397	$\pm j0.973$	± 0.719	$\pm j0.987$	$\pm j0.839$
				-0.177	-0.175	-0.097	-0.113
				$\pm j0.602$	$\pm j0.263$	$\pm j0.791$	$\pm j0.561$
						-0.140	-0.133
						$\pm j0.439$	$\pm j0.197$

3-dB*) ripple ($\varepsilon = 0.998$, $\varepsilon^2 = 0.995$).

$N = 1$	2	3	4	5	6	7	8
-1.002	-0.322	-0.299	-0.085	-0.177	-0.038	-0.126	-0.021
	$\pm j0.777$		$\pm j0.946$		$\pm j0.976$		± 0.987
		-0.1493	-0.206	-0.055	-0.104	-0.028	-0.061
		$\pm j0.904$	$\pm j0.392$	$\pm j0.966$	± 0.715	$\pm j0.983$	$\pm j0.836$
				-0.144	-0.143	-0.079	-0.092
				$\pm j0.597$	$\pm j0.262$	$\pm j0.789$	$\pm j0.559$
						-0.114	-0.108
						$\pm j0.437$	$\pm j0.196$

*) Se anmärkning Tabell 4.4.

4.1.3 Besselfilter

Besselfilter ger en maximalt flat grupplöptid.
Koefficienter till Besselpolynom.

n	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	1					
2	3	3				
3	15	15	6			
4	105	105	45	10		
5	945	945	420	105	15	
6	10395	10395	4725	1260	210	21

Rötter till Besselpolynom.

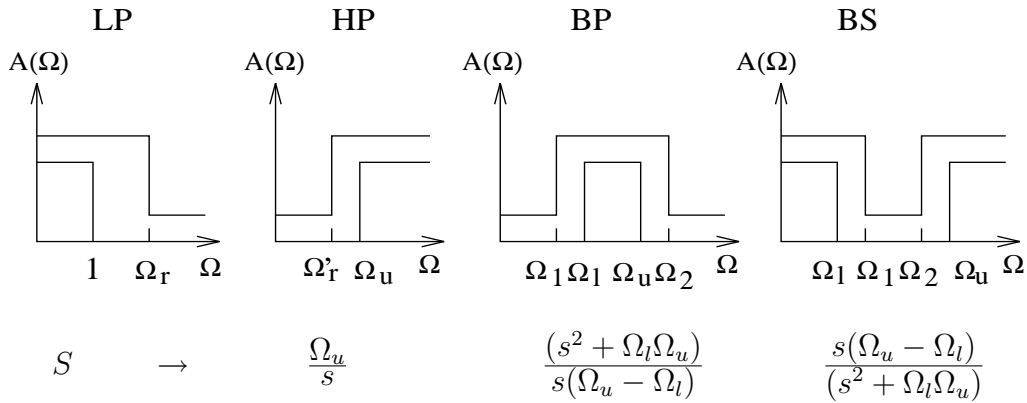
n						
1	-1.0000					
2	-1.5000	$\pm j0.8660$				
3	-2.3222	-1.8389	$\pm j1.7544$			
4	-2.8962	$\pm j0.8672$	-2.1038	$\pm j2.6574$		
5	-3.6467	-3.3520	$\pm j1.7427$	-2.3247	$\pm j3.5710$	
6	-4.2484	$\pm j0.8675$	-3.7357	$\pm j2.6263$	-2.5159	$\pm j4.4927$

Faktorerade Besselpolynom

n		
1	$s + 1$	1
2	$s^2 + 3s + 3$	3
3	$(s^2 + 3.67782s + 6.45944)(s + 2.32219)$	15
4	$(s^2 + 5.79242s + 9.14013)(s^2 + 4.20758s + 11.4878)$	105
5	$(s^2 + 6.70391s + 14.2725)(s^2 + 4.64934s + 18.15631)(s + 3.64674)$	945
6	$(s^2 + 8.49672s + 18.80113)(s^2 + 7.47142s + 20.85282)$ $(s^2 + 5.03186s + 26.51402)$	10395

4.2 Frekvenstransformationer av analoga filter

1. Utgå från frekvenserna för kravspecifikationen i det analoga högpas-, bandpass- eller bandspärrfiltret. I det färdiga filtret blir $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_l\Omega_u$.
2. Transformera till LP-filtrets frekvenser $\Omega_p = 1, \Omega_r$.
3. Sök LP-filtrets koefficienter.
4. Transformera tillbaka till ursprungsfiltret (HP, BP, BS) genom att byta s i $H(s)$ enligt nedan. För BP, BS transformeras lämpligen polerna direkt om $H(s)$ ska ges faktoriserad i 2:a-gradspolynom. Beräkna eventuellt nytt värde på Ω_1 eller Ω_2 (om $A \neq B$).



Framåt

Bakåt

LP-HP $\Omega'_r = \Omega_u/\Omega_r$

$\Omega_r = \Omega_u/\Omega'_r$

LP-BP $\Omega_{av} = (\Omega_u - \Omega_l)/2$
 $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_r^2\Omega_{av}^2 + \Omega_l\Omega_u - \Omega_{av}\Omega_r}$
 $\Omega_2 = \sqrt{\Omega_r^2\Omega_{av}^2 + \Omega_l\Omega_u + \Omega_{av}\Omega_r}$
 $s_{BP} = S_{LP}\Omega_{av} \pm \sqrt{(S_{LP}\Omega_{av})^2 - \Omega_u\Omega_l}$

$\Omega_r = \min(|A|, |B|)$
 $A = (-\Omega_1^2 + \Omega_l\Omega_u)/[\Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)]$
 $B = (+\Omega_2^2 - \Omega_l\Omega_u)/[\Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)]$

LP-BS $\Omega_{av} = (\Omega_u - \Omega_l)/2$
 $\Omega_1 = \sqrt{\Omega_{av}^2/\Omega_r^2 + \Omega_l\Omega_u - \Omega_{av}/\Omega_r}$
 $\Omega_2 = \sqrt{\Omega_{av}^2/\Omega_r^2 + \Omega_l\Omega_u + \Omega_{av}/\Omega_r}$
 $s_{BP} = \Omega_{av}/S_{LP} \pm \sqrt{(\Omega_{av}/S_{LP})^2 - \Omega_u\Omega_l}$

$\Omega_r = \min(|A|, |B|)$
 $A = \Omega_1(\Omega_u - \Omega_l)/(-\Omega_1^2 + \Omega_l\Omega_u)$
 $B = \Omega_2(\Omega_u - \Omega_l)/(-\Omega_2^2 + \Omega_l\Omega_u)$

5 Tidsdiskreta filter

5.1 FIR-filter och IIR-filter

FIR-filter

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M} \\ h(n) &= \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}\end{aligned}$$

IIR-filter

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \\ h(n) &= Z^{-1}\{\mathcal{H}(z)\}\end{aligned}$$

5.2 FIR-filter med fönstermetoden

Impulssvar

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

med önskad impulssvar $h_d(n)$ och spektrum $H_d(\omega)$ (i $0 \leq \omega \leq \pi$) och tidsfönster $w(n)$

Lågpass:

$$\begin{aligned}h_d(n) &= \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \\ H_d(\omega) &= \begin{cases} e^{-j\omega (M-1)/2} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}\end{aligned}$$

Bandpass:

$$\begin{aligned}h_d(n) &= 2 \cos \left(\omega_0 \left(n - \frac{M-1}{2}\right)\right) \cdot \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \\ H_d(\omega) &= \begin{cases} e^{-j\omega (M-1)/2} & \omega_0 - \omega_c < |\omega| < \omega_0 + \omega_c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}\end{aligned}$$

Högpass:

$$\begin{aligned}h_d(n) &= \delta \left(n - \frac{M-1}{2}\right) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)}{\omega_c \left(n - \frac{M-1}{2}\right)} \\ H_d(\omega) &= \begin{cases} e^{-j\omega (M-1)/2} & |\omega| > \omega_c \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}\end{aligned}$$

Filtrets spektrum $H(\omega) = H_d(\omega) * W(\omega)$ och vid gränshfrekvensen ω_c är dämpningen 6dB.

Vid dimensionering av filter ger nedanstående tabeller en grov approximation av erforderlig längd M .

Tabell 5.1

Storlek på huvudlob och sidolob för några vanliga fönsterfunktioner.

Fönster	Approximativ bredd av huvudlob	Största sidolob (dB)
Rectangular	$4\pi/M$	-13
Bartlett	$8\pi/M$	-27
Hanning	$8\pi/M$	-32
Hamming	$8\pi/M$	-43
Blackman	$12\pi/M$	-58

Tabell 5.2

Storlek på övergångszon och sidolob för några fönsterfunktioner.

Fönster	Övergångszonens bredd (Hz)	Största sidolob (dB)
Rektangulärt	$0.6/M$	-21
Hamming	$1.7/M$	-55
Blackman	$3/M$	-75

En bättre approximation erhålles med utnyttjande av sambandet (f litet, M stort)

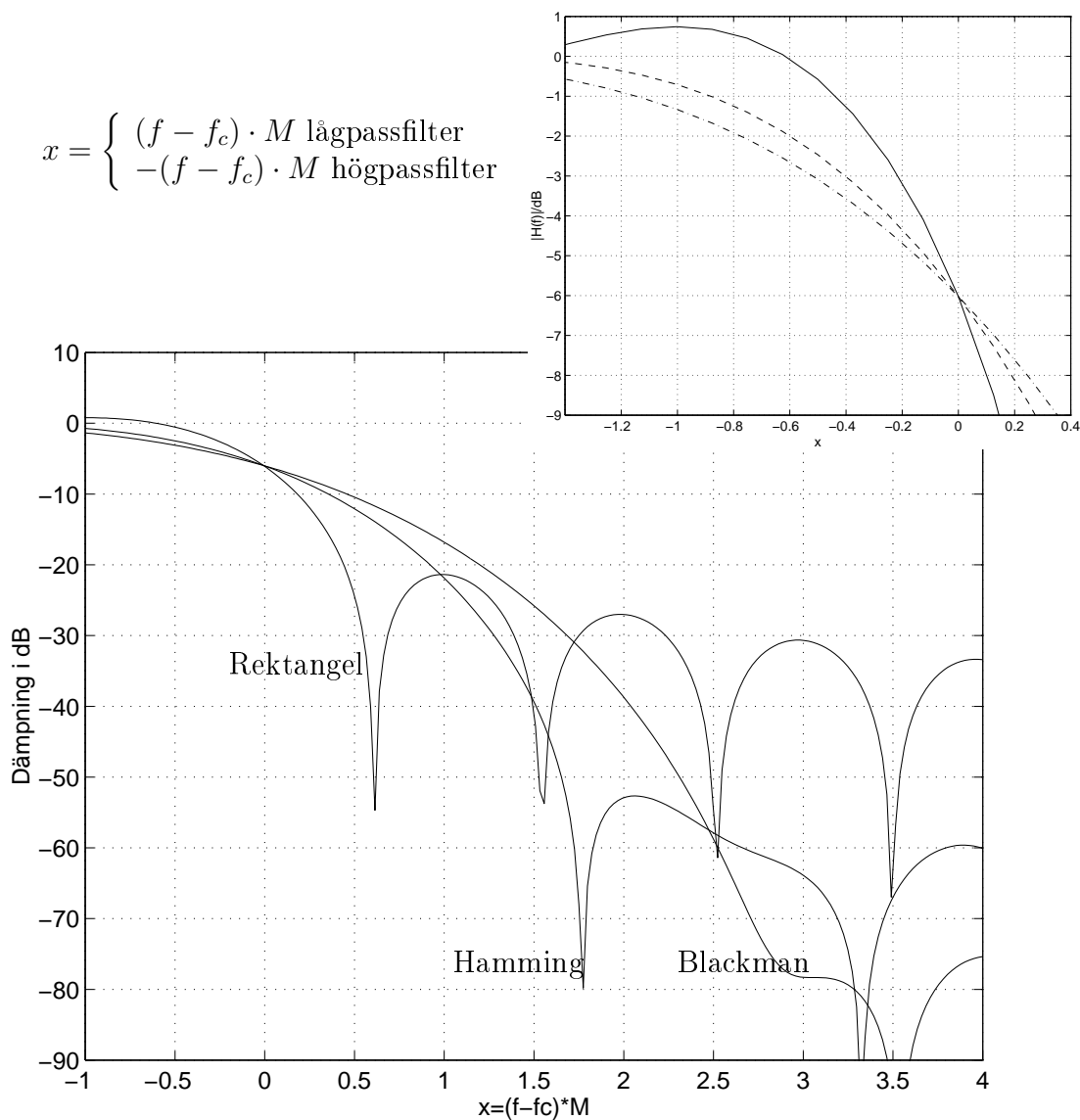
$$\frac{\sin(\pi f M)}{M \sin(\pi f)} \approx \frac{\sin(\pi f M)}{\pi f M}$$

(f litet, M stort.)

$H(f)$ som funktion av $x = (f - f_c) \cdot M$ med $M = 99$, $f_c = 0.1$ för rektangelfönster, hammingfönster och blackmanfönster ges i figuren på nästa sida.

Dämpningskurvor för fönsterfilter

$$x = \begin{cases} (f - f_c) \cdot M & \text{lågpassfilter} \\ -(f - f_c) \cdot M & \text{högpassfilter} \end{cases}$$

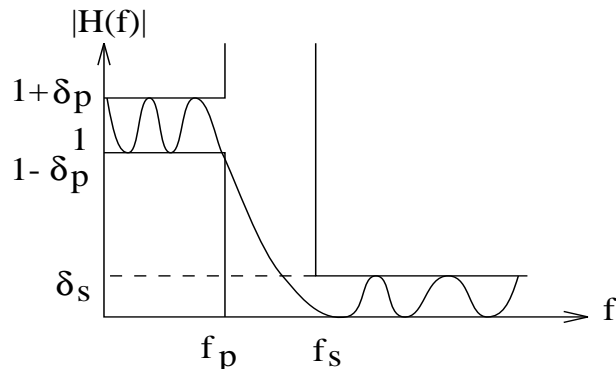


Övergångszon för FIR-filter, konstruerade med fönstermetoden, $M = 99$ och $f_c = 0.1$. x-axel graderad med $x = (f - f_c)M$. För högpassfilter använd $x = -(f - f_c)M$. Ger en användbar approximation för $M > 10$. Bättre approximation för stora M . Den lilla figuren visar området runt $x = 0$.

Filtren konstruerade med
 Rektangelfönster
 Hammingfönster
 Blackmanfönster

5.3 Ekvirippel FIR-filter

Dimensionering av ekvirippelfilter enligt Remez algoritmen. Approximativt enligt Kaiser.



$$N = \frac{D_{\infty}(\delta_p, \delta_s)}{\Delta f} + 1$$

$$\Delta f = f_s - f_p$$

$$D_{\infty}(\delta_p, \delta_s) = \frac{-20 \log \sqrt{\delta_p \delta_s} - 13}{14.6}$$

5.4 FIR-filter med minstakvadratmetoden

Minimering av

$$\mathcal{E} = \sum_n [x(n) * h(n) - d(n)]^2$$

ger

$$\sum_{n=0}^{M-1} h(n) r_{xx}(n - \ell) = r_{dx}(\ell) \quad \ell = 0, \dots, M - 1$$

och

$$\mathcal{E}_{\min} = r_{dd}(0) - \sum_{k=0}^{M-1} h(k) r_{dx}(k)$$

där $r_{xx}(\ell)$ är korrelationsfunktionen för $x(n)$ och $r_{dx}(\ell)$ är korskorrelationen mellan $d(n)$ och $x(n)$.

I matrisform kan detta skrivas

$$\mathbf{R}_{xx} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{r}_{dx}$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{dx}$$

$$\mathcal{E}_{\min} = r_{dd}(0) - \mathbf{h}^T \cdot \mathbf{r}_{dx}$$

5.5 IIR-filter

Bestämning av IIR-filter utgående från analoga filter.

5.5.1 Impulsinvarians

$$h(n) = h_a(nT)$$

1.

$$h_a(t) = e^{-\sigma_0 t} \longleftrightarrow \mathcal{H}_a(s) = \frac{1}{s + \sigma_0}$$
$$\Rightarrow \mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 - e^{-\sigma_0 T} z^{-1}}$$

2.

$$h_a(t) = e^{-\sigma_0 t} \cos \Omega_0 t \longleftrightarrow \mathcal{H}_a(s) = \frac{s + \sigma_0}{(s + \sigma_0)^2 + \Omega_0^2}$$
$$\Rightarrow \mathcal{H}(z) = \frac{1 - z^{-1} e^{-\sigma_0 T} \cos \Omega_0 T}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_0 T} \cos \Omega_0 T + z^{-2} e^{-2\sigma_0 T}}$$

3.

$$h_a(t) = e^{-\sigma_0 t} \sin \Omega_0 t \longleftrightarrow \mathcal{H}_a(s) = \frac{\Omega_0}{(s + \sigma_0)^2 + \Omega_0^2}$$
$$\Rightarrow \mathcal{H}(z) = \frac{z^{-1} e^{-\sigma_0 T} \sin \Omega_0 T}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma_0 T} \cos \Omega_0 T + z^{-2} e^{-2\sigma_0 T}}$$

5.5.2 Bilinjär transformation

Frekvenstransformation (prewarp")

$$F_{\text{prewarp}} = \frac{1}{T} \frac{\tan(\pi f)}{\pi}$$

Analog filterkonstruktion i variabeln Ω_{prewarp} .

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{H}_a(s) \text{ där } s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

T är en normeringsfaktor (kan oftast väljas =1).

5.5.3 Koefficientkvantisering

Polförflyttning då koefficienterna a_1, \dots, a_k ändras $\Delta a_1, \dots, \Delta a_k$

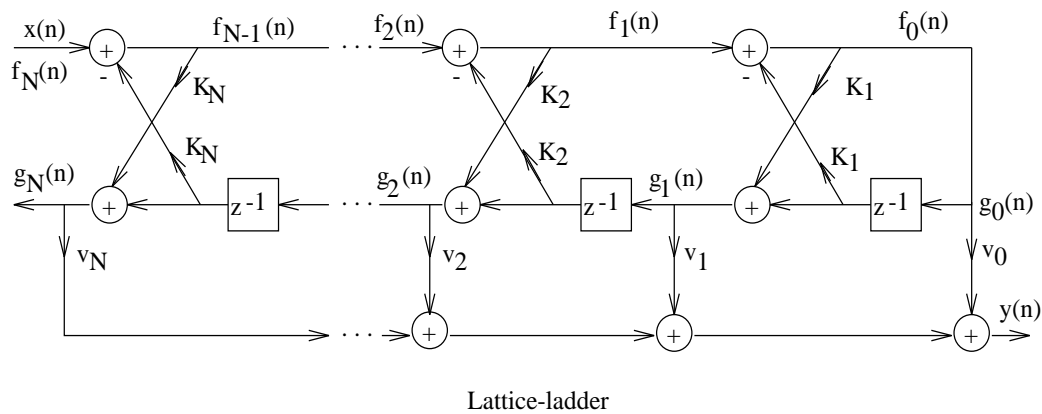
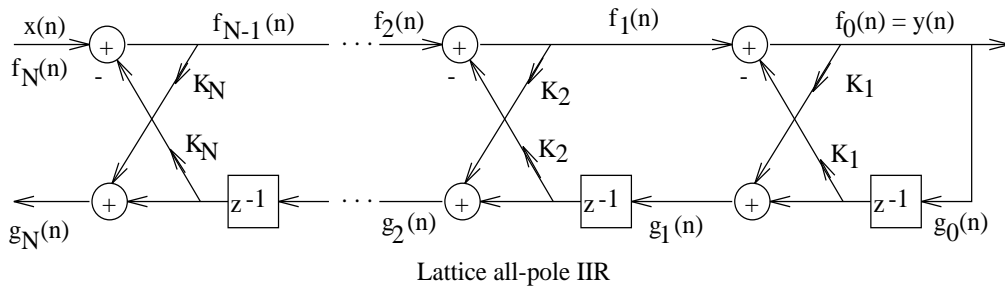
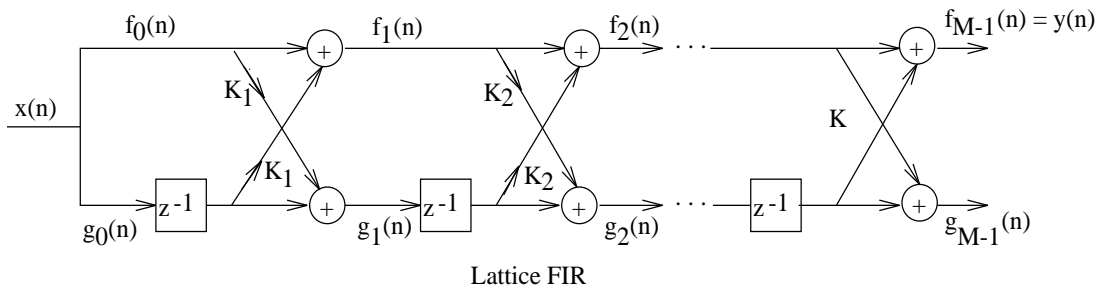
$$\Delta p_i \approx \frac{\partial p_i}{\partial a_1} \Delta a_1 + \dots + \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k$$

Vid normalform (direktform II) gäller

$$\frac{\partial p_i}{\partial a_j} = \frac{-p_i^{k-j}}{\underbrace{(p_i - p_1)(p_i - p_2) \dots (p_i - p_k)}_{k-1 \text{ st faktorer}}}$$

$(p_i - p_i)$ skall ej tas med

5.6 Latticefilter



$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$

$$\begin{cases} A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) \\ B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z) \end{cases}$$

$$A_{m-1}(z) = \frac{1}{1 - K_m^2} (A_m(z) - K_m B_m(z))$$

där

$$\begin{aligned} A_m(z) &= Z\{\alpha_m(n)\} \text{ med } K_m = \alpha_m(m) \\ B_m(z) &= Z\{\beta_m(n)\} \end{aligned}$$

Samband mellan $A_m(z)$ och $B_m(z)$

$$\begin{aligned} B_m(z) &= z^{-m} A_m(z^{-1}) \text{ och} \\ \beta_m(k) &= \alpha_m(m - k) \end{aligned}$$

Lattice-FIR

$$H(z) = A_{M-1}(z)$$

Lattice-all pole IIR

$$H(z) = \frac{1}{A_N(z)}$$

Lattice-ladder

$$H(z) = \frac{C_N(z)}{A_N(z)} = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} \dots c_N z^{-N}}{A_N(z)}$$

där

$$C_m(z) = C_{m-1}(z) + v_m B_m(z)$$

och

$$c_m(m) = v_m \quad m = 0, 1, \dots, N$$

6 Spektralskattning

Spektralskattning

$$\gamma_{xx}(m) = E\{x(n)x(n+m)\} \text{ autokorrelation}$$

$$\Gamma_{xx}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_{xx} e^{-j2\pi f m} \text{ effektspektrum}$$

Periodogram

$$r_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m) \quad 0 \leq m \leq N-1 \quad \text{autokorrelation (estimat)}$$

$$P_{xx}(f) = \sum_{m=-N+1}^{N-1} r_{xx}(m) e^{-j2\pi f m} = \frac{1}{N} \left| \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j2\pi f m} \right|^2$$

effektspektrum (estimat)

$$E\{r_{xx}(m)\} = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(m) \rightarrow \gamma_{xx}(m) \text{ då } N \rightarrow \infty$$

$$\text{var}(r_{xx}(m)) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\gamma_{xx}^2(n) + \gamma_{xx}(n-m)\gamma_{xx}(n+m)] \rightarrow 0 \text{ då } N \rightarrow \infty$$

$$E\{P_{xx}(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_{xx}(\alpha) W_B(f-\alpha) d\alpha$$

där $W_B(f)$ är Fouriertransformen av Bartlett-fönstret $\left(1 - \frac{|m|}{N}\right)$

$$\text{var}(P_{xx}(f)) = \Gamma_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin 2\pi f N}{N \sin 2\pi f}\right)^2\right] \rightarrow \Gamma_{xx}^2(f) \text{ då } N \rightarrow \infty$$

om $x(n)$ Gaussisk.

Periodogram med DFT:

$$P_{xx}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \right|^2 \quad k = 0, \dots, N-1$$

Medelvärdesbildning av periodogram

Quality factor

$$Q = \frac{[E\{P_{xx}(f)\}]^2}{\text{var}(P_{xx}(f))}$$

Relativ varians $\frac{1}{Q}$

$Q \approx$ tid-bandbreddsprodukt.

Periodogram	$\Delta f = \frac{0.9}{M}$	$Q = 1$	
Bartlett ($N = K \cdot M$)	$\Delta f = \frac{0.9}{M}$	$Q_B = \frac{N}{M}$	Rektangulärt fönster Ingen överlappning
Welch ($N = L \cdot M$)	$\Delta f = \frac{1.28}{M}$	$Q_B = \frac{16}{9} \cdot \frac{N}{M}$	Triangulärt fönster 50% överlappning
Blackman/Tukey	$\Delta f = \frac{0.6}{M}$	$Q_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{N}{M}$	Rektangulärt fönster
	$\Delta f = \frac{0.9}{M}$	$Q_B = \frac{3}{2} \cdot \frac{N}{M}$	Triangulärt fönster

Upplösning Δf beräknad i -3dB punkterna från fönstrets huvudlob.