

EMB: MoM

Mats Gustafsson

Elektro- och informationsteknik, Lunds Universitet

ETI260, HT2, 2008

Integralekvationer
EM exempel
FEM-formulering

Elektrostatik

EM spridning

Halléns integralekvation

MoM allmänt

Exempel

EM integralekvationer

Elektrostatik med potentialen $\phi(\mathbf{r})$ känd på (metall) ytan $\partial\Omega$

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')/\epsilon_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

och för spridningsproblem ($\mathbf{E}_i(\mathbf{r})$ given på $\partial\Omega$)

$$\hat{\mathbf{n}} \times \int_{\partial\Omega} jkG(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\mathbf{J}_s(\mathbf{r}') - \frac{\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{jk} \nabla' \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') dS' = \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_i(\mathbf{r})}{\eta_0}$$

där $\hat{\mathbf{n}}$ betecknar normalvektorn till området och

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

är Green-funktionen.

Integralekvationer: FEM formulering

Ekvationen

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho_s(\mathbf{r}') dS'$$

Utveckla $\rho_s(\mathbf{r}')$ i N basfunktioner $\varphi_n(\mathbf{r}')$

$$\rho_s(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(\mathbf{r}').$$

Totalt

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^N \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\varphi_n(\mathbf{r}') dS' a_n$$

för all \mathbf{r} på randen $\partial\Omega$.

Ett överbestämt system (N obekanta och ∞ villkor).

Linjärt system

Använder ofta punktmatchning där N testpunkter \mathbf{r}_m väljs och därmed

$$\phi(\mathbf{r}_m) = \sum_{n=1}^N \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}') \varphi_n(\mathbf{r}') dS' a_n = \sum_{n=1}^N Z_{mn} a_n$$

eller viktade medelvärden där N viktfunktioner $w_m(\mathbf{r})$ väljs och

$$\int w_m(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV = \sum_{n=1}^N \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} w_m(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_n(\mathbf{r}') dS' dS a_n$$

spec. Galerkins metod med $w_n = \varphi_n$.

$$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \cdots & Z_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_N \end{pmatrix}$$

där tex

$$Z_{mn} = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \varphi_m(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \varphi_n(\mathbf{r}') dS' dS$$

- ▶ Obekanta på ytor (tex \mathbb{R}^2 istället för \mathbb{R}^3 som i FEM).
- ▶ Ofta numerisk integration för att bestämma Z_{mn} .
- ▶ $Z_{mn} \neq 0$ för de flesta $m, n = 1, \dots, N$.

Integralekvationer

Elektrostatik

Greenfunktion

Kapacitans

Polariserbarhet

EM spridning

Halléns integralekvation

MoM allmänt

Exempel

Elektrostatik

Två alternativ:

- ▶ Med $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ får vi

$$\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon_0$$

En PDE för potentialen (med given laddningstäthet).

- ▶ Vet också att potentialen kan skrivas

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')/\epsilon_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

En integralekvation för ytladdningstätheten (med given potential).

Greenfunktioner

Greenfunktionen

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

satisfierar

$$-\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

där δ^3 betecknar delta-distributionen i \mathbb{R}^3 , dvs $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') dV' = \psi(\mathbf{r})$ för alla testfunktioner ψ .

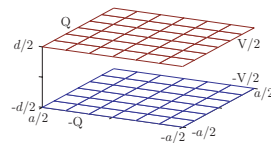
Kvadratisk plattkondensator

För att illustrera MoM använder vi styckvis konstanta basfunktioner på ett ekvidistant beräkningsnät och punktmatchning. Detta är enkelt men ger inte så hög noggrannhet. Dela upp plattorna i $2N^2$ ekvidistanta delar och låt $\mathbf{r}_n = (x_n, y_n, z_n)$ beteckna mittpunkterna av de kvadratiske beräkningscellerna. Diagonalelementen beräknas till

$$Z_{mm} = \frac{a/N}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2})$$

Approximera övriga termer som

$$Z_{mn} = \frac{a^2/N^2}{4\pi|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|}$$



Kapacitans

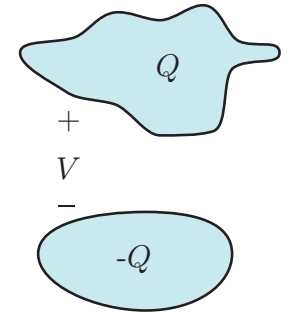
Kapacitansen mellan två metallobjekt Ω_+ och Ω_- ges av $C = Q/V$, där objekten har (den totala) laddning $\pm Q$ och V är spänningen mellan objekten. Den totala laddningen ges av

$$Q_{\pm} = \int_{\partial\Omega_{\pm}} \rho_s(\mathbf{r}) dS$$

där laddningstätheten bestäms av integralekvationen

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')/\epsilon_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

med $V(\mathbf{r}) = \pm V/2$ för $\mathbf{r} \in \partial\Omega_{\pm}$.



Diagonalelement

Diagonalelementen (self terms) där $m = n$ är de dominerande matriselementen. De är svåra att evaluera numeriskt då integranden ofta är singulär. För plattan får man

$$\begin{aligned} Z_{mm} &= \frac{1}{4\pi} \int_{x_m-\delta}^{x_m+\delta} \int_{y_m-\delta}^{y_m+\delta} \frac{1}{\sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}} dx' dy' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \ln \frac{\sqrt{\delta^2 + \xi^2} + \delta}{\sqrt{\delta^2 + \xi^2} - \delta} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[2\delta \ln(\xi + \sqrt{\delta^2 + \xi^2}) + \xi \ln \left(1 + \frac{2\delta(\delta + \sqrt{\delta^2 + \xi^2})}{\xi^2} \right) \right]_{-\delta}^{\delta} \\ &= \frac{2\delta}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad \text{där } 2\delta = a/N. \end{aligned}$$

Övriga element

Övriga element kan beräknas numeriskt (finns också slutna uttryck för vissa geometrier). Här gör vi den enklaste approximationen ($\mathbf{r}_m = (x_m, y_m, z_m)$)

$$Z_{mn} = \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \int_{y_n-\delta}^{y_n+\delta} \frac{1/(4\pi)}{\sqrt{(x_m-x')^2 + (y_m-y')^2 + (z_m-z_n)^2}} dx' dy'$$

$$\approx \frac{1/(4\pi)}{\sqrt{(x_m-x_n)^2 + (y_m-y_n)^2 + (z_m-z_n)^2}} \int_{x_m-\delta}^{x_m+\delta} \int_{y_m-\delta}^{y_m+\delta} dx' dy'$$

$$= \frac{a^2/N^2}{4\pi|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|}$$

- ▶ Delar ofta upp fallen för element som är nära varandra och element som är på stort avstånd för att förbättra noggrannheten.
- ▶ Använd numeriskt integration med högre noggrannhet för element på små avstånd.

```
A = zeros(Nt,Nt);
for mz = 1:Nz
    for mx = 1:Nx
        for my = 1:Ny
            m = m+1;
            if mz == 1;
                b(m) = V/2;
            else
                b(m) = -V/2;
            end
            n = 0;
            for nz = 1:Nz
                for nx = 1:Nx
                    for ny = 1:Ny
                        n = n+1;
                        R = sqrt((x(mx)-x(nx))^2+(y(my)-y(ny))^2+(z(mz)-z(nz))^2);
                        if R<10*eps % diagonal elements
                            A(m,n) = dx*log(1+sqrt(2))/(pi);
                        else
                            A(m,n) = dx*dy/(4*pi)/R;
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
end
rho = A\b*epsilon0;
```

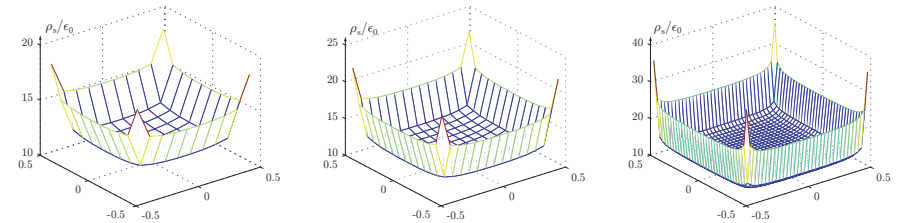
Högerledet beräknas till $b_m = \pm V/2$ för den övre/undre plattan. Det ger systemet

$$\mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{där} \quad x_n = \rho_s(\mathbf{r}_n)/\epsilon_0$$

Använder $N = 10, 15, 35$ med $d/a = 0.1$ och får

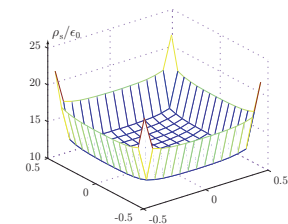
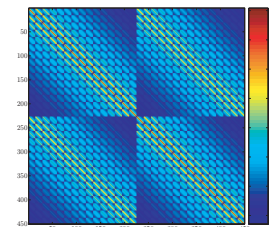
$$C_{10} \approx 1.33C_0 \quad C_{15} \approx 1.32C_0 \quad C_{35} \approx 1.31C_0$$

där $C_0 = \frac{a^2\epsilon_0}{d}$ ($C = C_0$ för en plattkondensator då $d \rightarrow 0$).



Quiz

- ▶ Hur många obekanta är det i problemet?
- ▶ Hur många matriselement är det?
- ▶ Vad kan man göra för att förbättra noggrannheten?
- ▶ Vad händer om man minskar avståndet d ?
- ▶ Vad tar tid (invertera \mathbf{Z} eller beräkna \mathbf{Z})?



Polariserbarhetsdyader

Det inducerade dipolmomentet $\mathbf{p} = \epsilon_0 \gamma \cdot \mathbf{E}$ för ett metallobjekt ges av polariserbarhetsdyaden som bestäms av

$$\gamma \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \rho_s(\mathbf{r}) \, dS \quad \text{med} \quad \int_{\partial\Omega} \rho_s(\mathbf{r}) \, dS = 0$$

där

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} = \int_{\partial\Omega} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')/\epsilon_0}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dS'$$

Polariserbarhetsdyader för en cirkulär disk

En cirkulär disk med radie a har polariserbarhetsdyaden

$$\gamma = \frac{16a^3}{3}(\hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y})$$

där \hat{z} betecknar ytans normalriktningen.
Sätt

$$\gamma_0 = \frac{16a^3}{3}$$

