EMB: FEM

Mats Gustafsson

Elektro- och informationsteknik, Lunds Universitet

ETI260, HT2, 2008

Maxwells ekvationer

Använder vanligtvis tidsharmoniska fält givna som $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ och $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ med Maxwells ekvationer

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\epsilon\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}$$

$\nabla \cdot \epsilon\boldsymbol{E} = \rho$ och $\nabla \cdot \mu\boldsymbol{H} = 0$.
Kombinera Faradays och Ampéres lagar till ett system av andra ordningen

$$-\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla \times \boldsymbol{E}\right) + \omega^2\epsilon\boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{J}$$

Elektrostatik

FEM används också ofta inom elektrostatik, magnetostatik och likströmsberäkningar. I elektrostatiken är $\omega = 0$ som ger $\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ och därmed (ofta) existensen av en potential ϕ så att $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$. Med Gauss lag $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ och den konstitutiva relationen $\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E}$ får vi

$$\nabla \cdot (\epsilon\nabla\phi) = -\rho$$

som förenklas till

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\epsilon\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = -\rho$$

i $\mathbb{R}^1$.

Abstrakt formulering av FEM

Betrakta ekvationen

$$\mathcal{L}f = s \quad \text{i } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

där $\mathcal{L}$ är en linjär operator, f den obekanta storheten, s givna källor och Ω betecknar ett begränsat område i $\mathbb{R}^n$. Observera att det kan vara vektorvärda storheter. I fallet med Maxwells ekvationer är operatorn

$$\mathcal{L} = -\nabla \times \left(\frac{1}{\mu}\nabla\times \quad \right) + \omega^2\epsilon$$

och $f = \boldsymbol{E}$ samt $s = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{J}$.

1. Dela upp området i celler (eller element).
2. Ansätt lösningen som en utveckling i ett ändligt antal basfunktioner
$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{n=1}^{N} f_n \varphi_n(\boldsymbol{r})$$
där f_n är utvecklingskoefficienter och $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ är givna basfunktioner.
3. Bestäm residualen $r = \mathcal{L}f - s$. Den ska göras så liten som möjligt.
4. Välj N stycken testfunktioner $w_m(\boldsymbol{r})$, $m = 1, ..., N$. Använder ofta Galerkins metod där $w_m = \varphi_m$.
5. Sätt de viktade resudualerna till noll och bestäm de obekanta utvecklingskoefficienterna f_n genom att lösa ekvationssystemet
$$0 = \langle w_m, r\rangle = \int_\Omega w_m^* r \,\mathrm{dV}$$

$$0 = \langle w_m, r\rangle == \langle w_m, \mathcal{L}f - s\rangle = \langle w_m, \mathcal{L}\sum_{n=1}^{N} f_n\varphi_n\rangle - \langle w_m, s\rangle$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \langle w_m, \mathcal{L}\varphi_n\rangle f_n - \langle w_m, s\rangle = \sum_{n=1}^{N} A_{mn} f_n - b_m$$

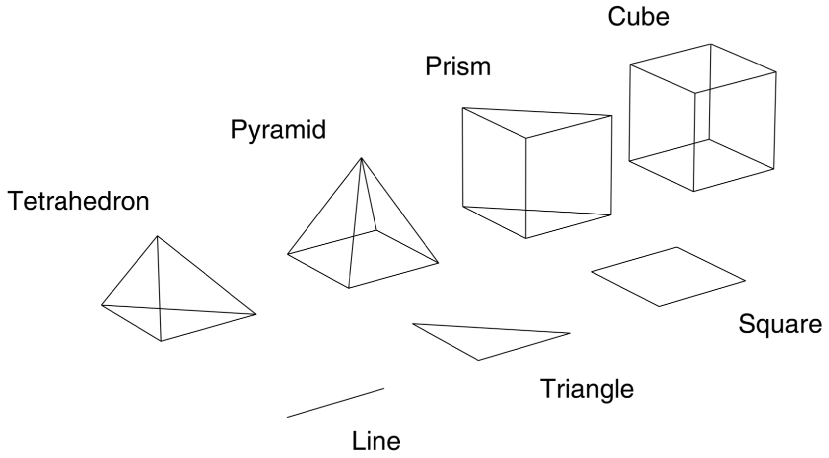
för $m = 1, 2, \ldots, N$. Skriv som en matrisekvation $\mathbf{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{b}$, där
$$A_{mn} = \langle w_m, \mathcal{L}\varphi_n\rangle = \int w_m^* \mathcal{L}\varphi_n \,\mathrm{dV}$$

Detta är grundutförandet av FEM. Man måste dock göra vissa små modifikationer av formuleringen om f är given på randen.

Svag form

Man använder ibland en alternativ framställning där man först skriver ekvationen på svag form. Istället för att lösa
$$\mathcal{L}f = s \quad \text{punktvis i } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$
så löser man
$$\langle w, \mathcal{L}f\rangle = \langle w, s\rangle$$
eller ekvivalent
$$\int_\Omega w^* \mathcal{L}f \,\mathrm{dV} = \int_\Omega w^*(\boldsymbol{r}) s(\boldsymbol{r}) \,\mathrm{dV}$$
Där likhet ska gälla för all w i en tillräckligt stor funktionsklass. Utveckla w och f i en bas för att få den abstrakta formuleringen.

Element i 1,2,3D



Elstatik

I elektrostatik reduceras Maxwells ekvationer till en skalär ekvation på divergensform

$$-\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho \quad \text{för } \boldsymbol{r} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

De vanligaste randvillkoren (på randen $\partial\Omega$) i elektrostatiken är given potential $\phi = \phi_0$ och given ytladdning $-\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D} = \epsilon \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \nabla \phi = \rho_{\mathrm{s}}$, där $\hat{\boldsymbol{n}}$ betecknar ytans normalriktning. De kallas också Dirichlet- och Neumannrandvillkor.

Skriver först ekvationen på svag form genom att multiplicera med en testfunktion, $w(\boldsymbol{r})$, och integrera över området

$$-\int_\Omega w^* \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) \,\mathrm{dV} = \int_\Omega w^* \rho \,\mathrm{dV}$$

Partialintegrera med hjälp av $\nabla \cdot (w^* \boldsymbol{A}) = \nabla w^* \cdot \boldsymbol{A} + w^* \nabla \cdot \boldsymbol{A}$ där $\boldsymbol{A} = \epsilon \nabla \phi$ och använd divergenssatsen

$$\int_\Omega \nabla \cdot (w^* \boldsymbol{A}) \,\mathrm{dV} = \int_{\partial\Omega} w^* \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{dS}$$

för att få

$$\int_\Omega \nabla w^* \cdot \epsilon \nabla \phi \,\mathrm{dV} - \int_{\partial\Omega} w^* \epsilon \nabla \phi \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{dS} = \int_\Omega w^* \rho \,\mathrm{dV}$$

som ska gälla för alla testfunktioner w. Med alla menar vi en tillräckligt stor klass av funktioner så att integralen är väldefinierad. Detta ger upphov till Sobolevrum. För vår del räcker det att observera att integralen är väldefinierad om $\nabla \varphi$ och ∇w är begränsade.

1D

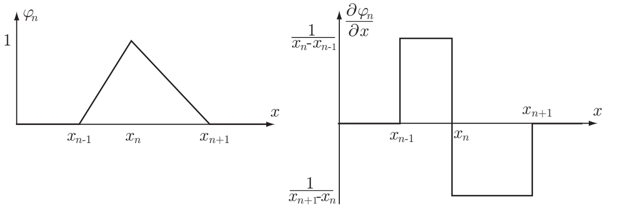
I en rumsdimension, $\mathbb{R}^1$, förenklas ekvationen till

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho.$$

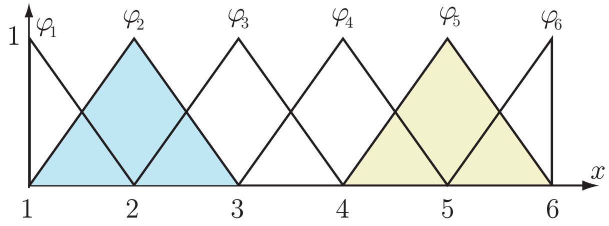
Antag att $\epsilon = \epsilon_0$, laddningstätheten $\rho = 0$, ytladdningen är 0 vid $x = 1$ och att potentialen är ϕ_6 vid $x = 6$. Detta ger området $1 \le x \le 6$ med Neumann och Dirichlet randvillkoren

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1) = 0 \quad \text{och } \phi(6) = \phi_6.$$

Dela upp intervallet i $N = 5$ lika delar $x_n = n$ och inför basfunktioner på dem. Från den svaga formuleringen ser vi att $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ska vara begränsad så $\phi(x)$ ska vara kontinuerlig. Vi väljer att använda styckvis linjära basfunktioner



Observera att en basfunktion, $\varphi_n(x)$, enbart är nollskild kring punkten (noden) x_n. Vi har $\varphi_n(x) = 0$ för $x < x_{n-1}$ och för $x > x_{n+1}$ så produkten $\varphi_n(x)\varphi_m(x) = 0$ om $|m-n| \geq 2$. I vår fall får vi 6 stycken basfunktioner $\varphi_n(x)$, $n = 1, ..., 6$



Observera att basfunktionerna (vid ränderna) φ_1 och φ_6 är modifierade.

Beräkna integralerna

$$\langle \varphi_m, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n \rangle = \int_1^6 \varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrera partiellt (jmf svag formulering)

$$\int_1^6 \varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \left[\varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x)\right]_1^6 - \int_1^6 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Börja med det inre området givet av basfunktionerna φ_n, $n = 2, 3, 4, 5$. Derivatorna av $\varphi_n(x)$ är styckvis konstanta med belopp ± 1 vilket ger

$$\int_1^6 \frac{\partial}{\partial x}\varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2, & \text{för } 2 \leq m = n \leq 5 \\ 1, & \text{för } m = n = 1 \\ -1, & \text{för } |m-n| = 1 \end{cases}$$

Utveckla potentialen i basfunktionerna

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{6} \phi_n \varphi_n(x) = \phi_6 \varphi_6 + \sum_{n=1}^{5} \phi_n \varphi_n(x)$$

eftersom $\phi(6) = \phi_6$ enligt randvillkoret ovan.
Sätt in utvecklingen i den svaga formuleringen eller i den partiella differentialekvationen och använd testfunktionerna $\varphi_m(x)$, $m = 1, ..., 5$. Vi behöver inte använda testfunktionen $\varphi_6(x)$ eftersom funktionen är känd i $x = 6$. Detta ger

$$0 = \langle \varphi_m, \frac{\partial}{\partial x}\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{6}\phi_n\varphi_n(x)\rangle \quad \text{för } m = 1, ..., 5.$$

Randtermen ger inte något bidrag i $x = 6$ eftersom $\varphi_m(6) = 0$ för $m = 1, ..., 5$. I $x = 1$ får vi

$$\varphi_m(1)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_n(1) = 0$$

på grund av det givna randvilkoret. Matrisform

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Flytta den kända ϕ_6 till högerledet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi_6 \end{pmatrix}$$