

```

for n = 1:Nt;
    % Update H from n*Dt-Dt/2 to n*Dt+Dt/2 in the main grid
    for r=1:Nz
        Hy(r) = Hy(r) - (Dt/mu0/Dz) * (Ex(r+1)-Ex(r));
    end
    % Update E from n*Dt to (n+1)*Dt in the main grid except at the bot
    for r=2:Nz
        Ex(r) = Ex(r) - (Dt/eps0/Dz) * (Hy(r)-Hy(r-1));
    end
end
end

```

Numerisk dispersion

Dispersionsrelationer anger sambandet mellan svängningar i tid och rum för (tids-) harmoniska vågor, tex mellan frekvens och våglängd. Ansätt tidsharmoniska planvågor (Fourierkomponenter)

$$E_x(z, t) = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{och} \quad H_y(z, t) = H_0 e^{j(\omega t - kz)}$$

för att härleda dispersionsrelationen. Ampères lag ger

$$\epsilon E_0 j \omega e^{j(\omega t - kz)} = H_0 j k e^{j(\omega t - kz)}$$

och efter division med gemensamma faktorer får vi $\epsilon E_0 j \omega = H_0 j k$. På samma sätt får vi $\mu H_0 \omega = E_0 k$ från Faradays lag. Förenkling ger dispersionsrelationen

$$\omega = \pm ck \quad \text{eller} \quad f = \pm \frac{c}{\lambda}$$

```

for n = 1:Nt; % Time stepping
    % Update H from n*Dt-Dt/2 to n*Dt+Dt/2 in main grid
    Hy = Hy - (Dt/mu0/Dz) * diff(Ex,1);
    % Update E from n*Dt to (n+1)*Dt in the main grid except on the
    Ex(2:Nz-1) = Ex(2:Nz-1) - (Dt/eps0/Dz) * diff(Hy,1);
    Ex(1) = Ein(n); % E-field on the boundary
end

```

Gör nu samma ansats för FDTD-schemat

$$E_x|_r^n = E_0 e^{j\omega n \Delta t - jkr \Delta z} = E_0 \psi$$

och

$$H_y|_{r+1/2}^{n+1/2} = H_0 e^{j\omega(n+1/2)\Delta t - jk(r+1/2)\Delta z} = H_0 e^{j\omega \Delta t/2} e^{-jk \Delta z/2} \psi$$

för att härleda de numeriska dispersionsrelationerna. Vi finner

$$\epsilon E_0 \frac{e^{j\omega \Delta t} \psi - \psi}{\Delta t} = -H_0 \frac{e^{j\omega \Delta t/2} e^{-jk \Delta z/2} \psi - e^{j\omega \Delta t/2} e^{jk \Delta z/2} \psi}{\Delta z}$$

och efter division med $2j e^{j\omega \Delta t/2} \psi$ förenklas ekvationen till

$$\frac{\epsilon E_0}{\Delta t} \frac{e^{j\omega \Delta t/2} - e^{-j\omega \Delta t/2}}{2j} = -\frac{H_0}{\Delta z} \frac{e^{-jk \Delta z/2} - e^{jk \Delta z/2}}{2j}$$

där vi identifierar termerna som

$$\frac{\epsilon E_0}{\Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} = \frac{H_0}{\Delta z} \sin \frac{k \Delta z}{2}.$$

Numerisk dispersion

Den andra FDTD ekvationen (1) ger på samma sätt

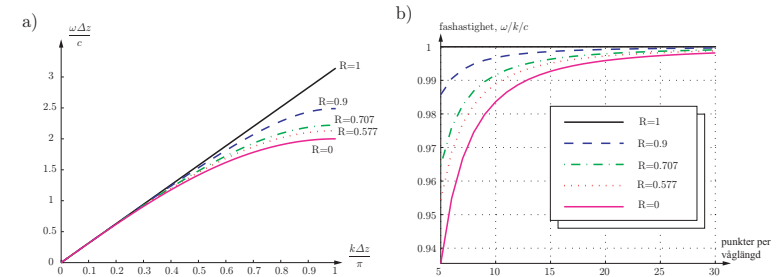
$$\frac{\mu H_0}{\Delta t} \sin \frac{\omega \Delta t}{2} = \frac{E_0}{\Delta z} \sin \frac{k \Delta z}{2}.$$

Eliminera H_0 för att bestämma dispersionsrelationen för FDTD schemat

$$\sin \frac{\omega \Delta t}{2} = \pm \frac{c \Delta t}{\Delta z} \sin \frac{k \Delta z}{2} = \pm R \sin \frac{k \Delta z}{2}$$

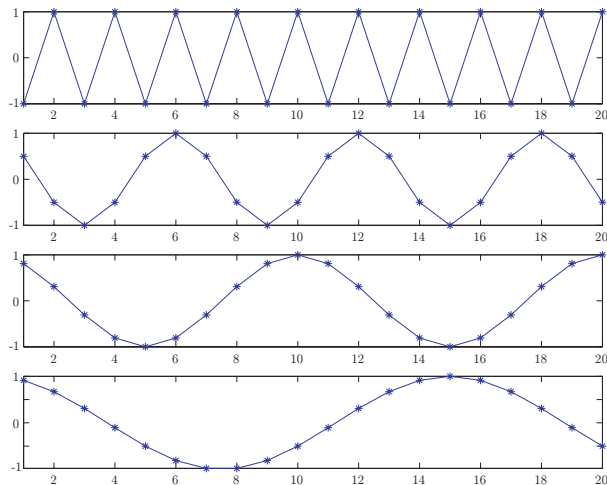
där stabilitetsfaktorn R anger hur många celler den riktiga lösningen propagerar på ett tidssteg.

Vi ser att dispersionsrelationen för FDTD ekvationen överensstämmer med dispersionsrelationen för den ursprungliga ekvationen om $|\omega \Delta t| \ll 1$ och $|k \Delta z| \ll 1$ eftersom $\sin x \approx x$ om $|x| \ll 1$.



- (a) Dispersionsrelationen för olika värden på R .
 (b) Normaliserad fashastighet ($\omega/k/c$) som funktion av antal sampelpunkter per våglängd ($\lambda/\Delta z = 2\pi/(k\Delta z)$) för olika värden på R .

Punkter per våglängd



Sampling av en tidsharmonisk signal med 2, 6, 10, 15 punkter per våglängd ($\lambda/\Delta z = 2\pi/(k\Delta z)$).

Exempel: Dispersionsrelationen för FDTD schemat förenklas till $\omega = \pm ck$ om $R = 1$ och den numeriska lösningen överensstämmer därmed med den riktiga (FDTD schemat är exakt för $R = 1$).

Exempel: I tre dimensioner är ofta $R = 1/\sqrt{3} \approx 0.58$. Den numeriska fashastigheten för en våg samplad med 10 punkter per våglängd är då 99% av frirymdshastigheten.

Stabilitet

Dispersionsrelationen

$$\sin \frac{\omega \Delta t}{2} = \pm R \sin \frac{k \Delta z}{2}$$

ger vinkelfrekvensen ω för varje vågtal k . FDTD schemat är instabilt om lösningen växer (exponentiellt) med tidsindexet n . Det motsvaras av att $\text{Im} \omega < 0$ för något k . Det värsta fallet ges av $k \Delta z = \pi$ (två punkter per våglängd) som ger stabilitetsvillkoret i 1D

$$R = \frac{c \Delta t}{\Delta z} \leq 1$$

Lax-Richtmyers ekvivalenssats

Vi kan använda Lax-Richtmyers ekvivalenssats för att visa att den numeriska lösningen konvergerar mot den riktiga lösningen.

Theorem (Lax-Richtmyers ekvivalenssats)

Ett konsistent finita differensschema för en välställd partiell differentialekvation är konvergent om och endast om schemat är stabilt.

Vad betyder detta i praktiken? Lösningen kommer att närma sig den riktiga lösningen när beräkningsnätet förfinas, $\Delta z \rightarrow 0$. Det betyder att man bör studera hur lösningen förändras när man förfinar beräkningsnätet.

Lax-Richtmyers ekvivalenssats

- ▶ Hur kan man veta att den numeriska lösningen, här med FDTD, approximerar den riktiga lösningen?
- ▶ Dispersionsrelationen visar att FDTD-approximationen är konsistent med den partiella differentialekvationen (Maxwells ekvationer). (Med konsistent menas att FDTD-approximationen approximerar den partiella differentialekvationen för långsamt varierande fält, $k \Delta z \ll 1$ och $\omega \Delta t \ll 1$.)
- ▶ Dispersionsrelationen visar också att FDTD approximationen är stabil om tidssteget Δt väljs lämpligt. Med stabilt menas att lösningen inte växer okontrollerat.

Konvergens

Då $\Delta z \rightarrow 0$ och $\Delta t = \Delta z R / c$ så konvergerar den numeriska lösningen mot den analytiska lösningen.

Ex. Felet för en

FDTD-lösningen med $\Delta z =$

(0.0400, 0.0200, 0.0133, 0.0100, 0.0080) m

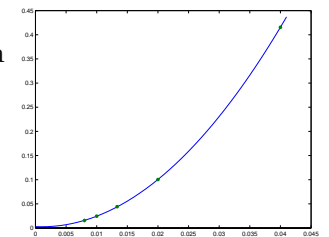
vid 1 GHz är

(0.4156, 0.1003, 0.0441, 0.0246, 0.0156).

För att extrapolera till $\Delta z = 0$

anpassas resultatet till ett

polynom:



```
polyfit([0.0400, 0.0200, 0.0133], [0.4156, 0.1003, 0.0441], 2)
```

vilket ger [275.1717, -0.7433, 0.0051], eller

$$275.1717 \Delta z^2 - 0.7433 \Delta z + 0.0051$$

och ett extrapolerat fel på 0.0051 då $\Delta z \rightarrow 0$.