EMB: FDTD

Mats Gustafsson

Elektro- och informationsteknik, Lunds Universitet

ETI260, HT2, 2008

Maxwells ekvationer

I tidsdomänen används främst Faradays och Ampères lagar

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \epsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

där de konstitutiva relationerna $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$ har antagits.

Maxwells ekvationer i 1D

Med $\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = E_{\mathrm{x}}(z, t)\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}$ och $\boldsymbol{H}(x, y, z, t) = H_{\mathrm{y}}(z, t)\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}$ reduceras Maxwells ekvationer i ett källfritt område, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$, till

$$\begin{cases} \epsilon \dfrac{\partial E_{\mathrm{x}}}{\partial t} = -\dfrac{\partial H_{\mathrm{y}}}{\partial z} \\ \mu \dfrac{\partial H_{\mathrm{y}}}{\partial t} = -\dfrac{\partial E_{\mathrm{x}}}{\partial z} \end{cases}$$

Eliminera H_{y} för att få vågekvationen $\frac{\partial^2 E_{\mathrm{x}}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_{\mathrm{x}}}{\partial z^2}$ där $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Det krävs också begynnelsevillkor och randvillkor för att lösa ekvationen.

Begynnelsevillkor

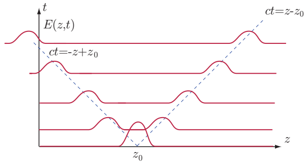
Ett obegränsat område $-\infty < z < \infty$ med begynnelsevillkoren

$E_{\mathrm{x}}(z, 0) = E_0(z)$ och $H_{\mathrm{y}}(z, 0) = 0$

har lösningen

$$\begin{cases} E_{\mathrm{x}}(z, t) = \dfrac{E_0(z - ct) + E_0(z + ct)}{2} \\ H_{\mathrm{y}}(z, t) = \dfrac{E_0(z - ct) - E_0(z + ct)}{2\eta} \end{cases}$$

Vi använder ofta rumtidsdiagram för att illustrera lösningen.



Randvillkor

En halvrymd $0 \leq z$ med begynnelsevillkoren

$$E_\mathrm{x}(z,0) = 0 \quad \text{och } H_\mathrm{y}(z,0) = 0$$

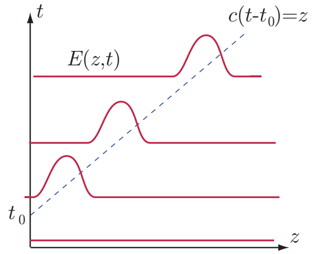
och randvillkoret

$$E_\mathrm{x}(0,t) = E_+(t)$$

har lösningen

$$\begin{cases} E_\mathrm{x}(z,t) = E_+(z-ct) \\ H_\mathrm{y}(z,t) = \dfrac{1}{\eta}E_+(z-ct) \end{cases}$$

Rumtidsdiagram:



Finita differensapproximationer

Differensapproximation av en derivata

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) + \frac{\Delta z}{2} f''(z) + \ldots +$$

Felet är av storleksordning Δz. Det är en första ordningens approximation. Om derivatan i stället beräknas i punkten $z + \Delta z/2$ är felet av andra ordningen

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z+\Delta z/2) + \frac{\Delta z^2}{24} f'''(z+\Delta z/2) + \ldots +$$

Beräkningsnät

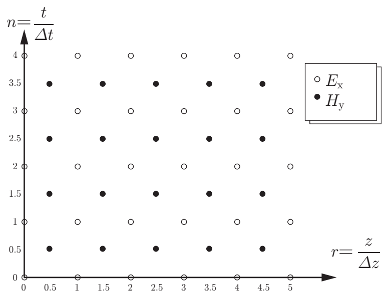
Det elektriska fältet E_x bestäms i koordinaterna $\{z,t\} = \{r\Delta z, n\Delta t\}$ för $r = 1, \ldots, N_\mathrm{z}$ och $n = 1, \ldots, N_\mathrm{t}$. Skifta rums- och tids-koordinaterna ett halvt steg för H_y. Det ger

$$E_\mathrm{x}|_r^n = E_\mathrm{x}(r\Delta z, n\Delta t)$$

och

$$H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = H_\mathrm{y}((r+\frac{1}{2})\Delta z, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$$

Beräkningsnät i 1D.



1D FDTD

Approximationen med centraldifferenser ger

$$\begin{aligned} \epsilon\frac{E_\mathrm{x}|_r^{n+1} - E_\mathrm{x}|_r^n}{\Delta t} &= -\frac{H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_\mathrm{y}|_{r-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \\ \mu\frac{H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= -\frac{E_\mathrm{x}|_{r+1}^n - E_\mathrm{x}|_r^n}{\Delta z} \end{aligned}$$

Explicit uppdatering ger FDTD-schemat

$$\begin{aligned} E_\mathrm{x}|_r^{n+1} &= E_\mathrm{x}|_r^n - \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta z}\left(H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_\mathrm{y}|_{r-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= H_\mathrm{y}|_{r+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu\Delta z}\left(E_\mathrm{x}|_{r+1}^n - E_\mathrm{x}|_r^n\right) \end{aligned}$$