# Formelsamling i Krets- och mätteknik fk
# ETEF15, Ht2011

Utdrag ur:
Formelsamling i kretsteori, ellära och elektronik Elektro- och informationsteknik, LTH
Formelsamling i Data- och telekommunikationsteknik 31-60, delkurs Fysiska skiktet, Tommy Andersson MAH.

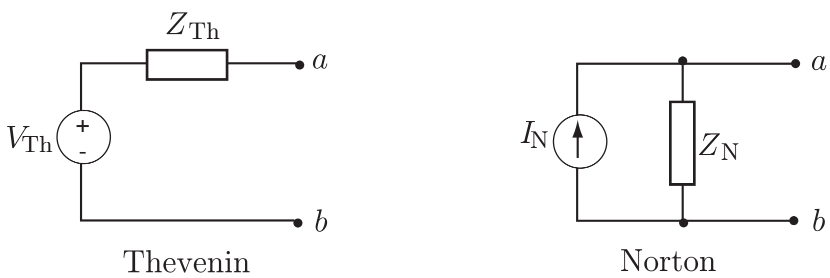
Bertil Larsson
LTH 2011

# Kretsteori

## Komplexvärden

- Realdelskonvention: $v(t) = \mathrm{Re}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ och $i(t) = \mathrm{Re}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.
- Imaginärdelskonvention: $v(t) = \mathrm{Im}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ och $i(t) = \mathrm{Im}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.

## Tvåpolsekvivalenter




## Komplex effekt

$S = \frac{1}{2}VI^* = P + \mathrm{j}Q = |S|(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi)$

$S =$ komplex effekt $\quad[\mathrm{VA}]$

$|S| =$ skenbar effekt $\quad[\mathrm{VA}]$

$P = \mathrm{Re}\,S =$ aktiv effekt (=tidsmedelvärdet av effektförbrukningen) $\quad[\mathrm{W}]$

$Q = \mathrm{Im}\,S =$ reaktiv effekt $\quad[\mathrm{VA_r}] = [\mathrm{VAR}]$

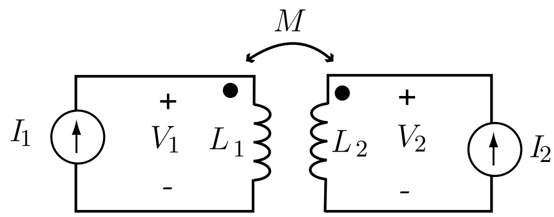
$\cos\varphi =$ effektfaktor

## Effektanpassningsregeln

$$Z_{\mathrm{L}} = Z_{\mathrm{i}}^* \quad \text{och} \quad \max\{P_{\mathrm{L}}\} = \frac{|V|^2}{8R_{\mathrm{i}}}.$$

## Ömsesidig induktans

$$\begin{cases} V_1 = \mathrm{j}\omega L_1 I_1 + \mathrm{j}\omega M I_2 \\ V_2 = \mathrm{j}\omega L_2 I_2 + \mathrm{j}\omega M I_1 \end{cases}$$



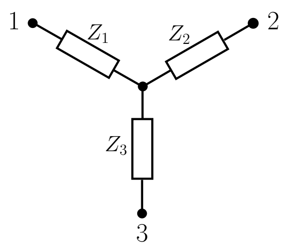

$L_1,\ L_2 =$ självinduktanser

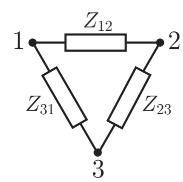
$M =$ ömsesidig induktans

$M = k\sqrt{L_1 L_2}$ där $0 \leq k \leq 1$

$k =$ kopplingsfaktorn

## Nätverkstransformation




Y till $\triangle$

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_3}$$

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_1}$$

$$Z_{31} = Z_3 + Z_1 + \frac{Z_3 Z_1}{Z_2}$$

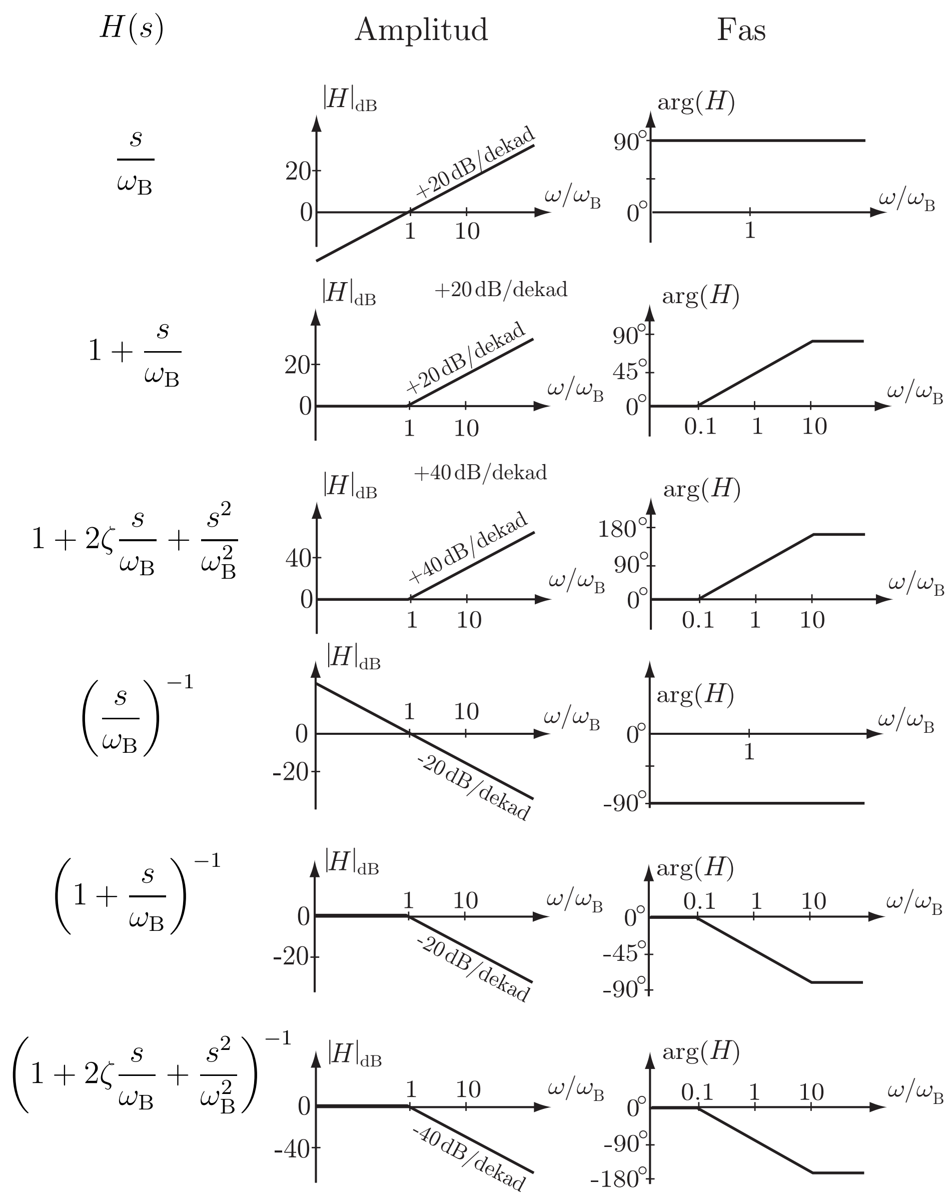
$\triangle$ till Y

$$Z_1 = \frac{Z_{31} Z_{12}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{23} Z_{31}}{Z_{12} + Z_{23} + Z_{31}}$$

## Rätlinjeapproximationer av Bodediagram

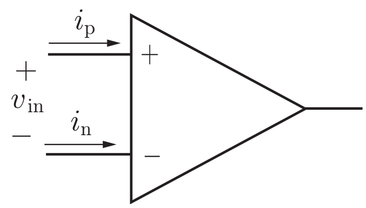



OBS! Det skall gälla att $|\zeta| \leq 1$.

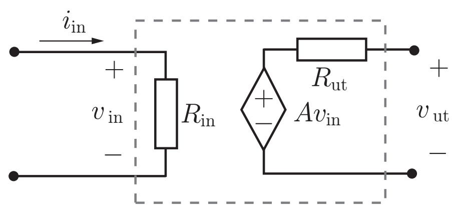
# Elektronik

## Ideal operationsförstärkare (OP)

För en ideal OP är $i_\mathrm{p} = i_\mathrm{n} = 0$. Vi använder vanligtvis negativ återkoppling där också $v_\mathrm{in} = 0$.




## Kretsmodell av spänningsförstärkare




## Dioder

Shockleyekvationen

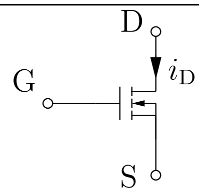
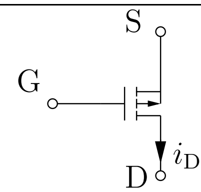
$$i_\mathrm{D} = I_\mathrm{s}\left(\mathrm{e}^{\frac{v_\mathrm{D}}{nV_\mathrm{T}}} - 1\right)$$

där $V_\mathrm{T} = \frac{kT}{q}$, $q \approx 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ och $k \approx 1.38 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$.

Dynamisk resistans

$$r_\mathrm{d} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{D}}{\mathrm{d}v_\mathrm{D}}\right|_Q}$$

## MOSFET

| | NMOS | PMOS |
|---|---|---|
| Kretssymbol |  |  |
| $\mu \approx$ | $675\,\mathrm{cm^2V^{-1}s^{-1}}$ | $240\,\mathrm{cm^2V^{-1}s^{-1}}$ |
| $\kappa \approx$ | $115\,\mu\mathrm{AV^{-2}}$ | $40\,\mu\mathrm{AV^{-2}}$ |
| $V_\mathrm{t} \approx$ | $+0.5\,\mathrm{V}$ | $-0.6\,\mathrm{V}$ |
| Subtröskel (strypt område) | $v_\mathrm{GS} \leq V_\mathrm{t}$, $v_\mathrm{DS} \geq 0$, $i_\mathrm{D} = 0$ | $v_\mathrm{GS} \geq V_\mathrm{t}$, $v_\mathrm{DS} \leq 0$, $i_\mathrm{D} = 0$ |
| Linjärt område | $v_\mathrm{GS} \geq V_\mathrm{t}$, $0 \leq v_\mathrm{DS} \leq v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t}$, $i_\mathrm{D} = K(2(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t})v_\mathrm{DS} - v_\mathrm{DS}^2)$ | $v_\mathrm{GS} \leq V_\mathrm{t}$, $0 \geq v_\mathrm{DS} \geq v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t}$, $i_\mathrm{D} = K(2(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t})v_\mathrm{DS} - v_\mathrm{DS}^2)$ |
| Mättnads-område | $v_\mathrm{GS} \geq V_\mathrm{t}$, $v_\mathrm{DS} \geq v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t}$, $i_\mathrm{D} = K(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t})^2$ | $v_\mathrm{GS} \leq V_\mathrm{t}$, $v_\mathrm{DS} \leq v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t}$, $i_\mathrm{D} = K(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t})^2$ |
| $v_\mathrm{DS}$, $v_\mathrm{GS}$ | Vanligtvis positiva | Vanligtvis negativa |

$K = \frac{W}{L}\frac{\kappa}{2}$

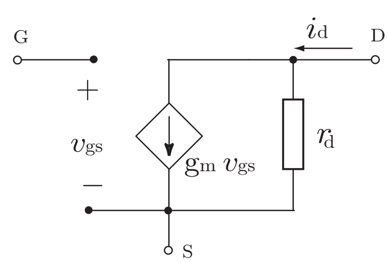
### Småsignalmodell

Småsignalmodell för en FET, där

$$g_\mathrm{m} = \left.\frac{\partial i_\mathrm{D}}{\partial v_\mathrm{GS}}\right|_\mathrm{arbetspunkt}$$

och

$$\frac{1}{r_\mathrm{d}} = \left.\frac{\partial i_\mathrm{D}}{\partial v_\mathrm{DS}}\right|_\mathrm{arbetspunkt}$$



# Matematiska formler och samband

## Trigonometriska formler

$$\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2) \qquad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2) \qquad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad 2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \qquad 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha \qquad 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\alpha-\beta) \text{ där } \cos\beta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \sin\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha$$

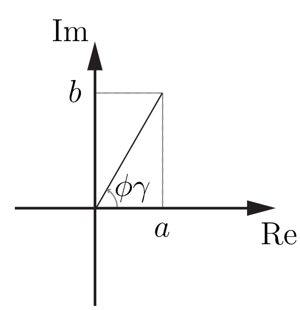
$$\sin\alpha = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha}}{2\mathrm{j}}$$

## Komplexa tal

$$z = a + \mathrm{j}b = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$

där

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{och om } a > 0 \text{ är} \quad \phi = \arctan\frac{b}{a}$$




## Ekvationssystem ($2\times 2$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

med lösning

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

TA jan 11

# Formelsamling i Data- och telekommunikationsteknik 31-60, delkurs Fysiska skiktet

*Utdelas vid tentamen*

## Konstanter

$\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As / Vm $\quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs / Am $\quad c_0 \approx 3 \cdot 10^8$ m/s

## Elstatik

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathbf{e}_r \qquad \mathbf{F} = Q\mathbf{E} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad A = Q(V_2 - V_1)$$

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl} = \int_1^2 E_t dl \qquad \mathbf{E} = -\nabla V$$

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) \\ Q_2 = C_2 V_2 + C_{21}(V_2 - V_1) \end{cases}$$

Plattkondensatorn: $C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

## Likström

$$I = \int_S \mathbf{J} \bullet \mathbf{e}_n dS = \int_S J_n dS \qquad \oint_S \mathbf{J} \bullet \mathbf{e}_n dS = \oint_S J_n dS = -\frac{dQ}{dt} \qquad \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E}$$

Ledare med konstant tvärsnittsyta:

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

## Magnetostatik

$$\mathbf{B} = \int_L \frac{\mu_0 I\, \mathbf{dl} \times \mathbf{e}_r}{4\pi r^2} \qquad \mathbf{F} = \int_L I\,\mathbf{dl} \times \mathbf{B} \qquad \mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

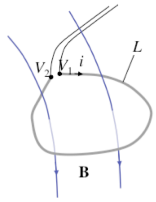
$$\phi = \int_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{e}_n dS = \int_S B_n dS \qquad \oint_S \mathbf{B} \bullet \mathbf{e}_n dS = \oint_S B_n dS = 0$$

$$\oint_L \mathbf{H} \bullet \mathbf{dl} = \oint_L H_t dl = \int_S \mathbf{J} \bullet \mathbf{e}_n dS = \int_S J_n dS \qquad \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$$

B-fältet kring en lång rak tråd: $B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi R}$

# Induktion

$$\begin{cases} \Lambda_1 = L_1 i_1 + M i_2 \\ \Lambda_2 = L_2 i_2 + M i_1 \end{cases}$$




$$V_1 - V_2 = B v l \qquad V_1 - V_2 = R \cdot i + \frac{d\phi}{dt} \quad \text{(ett varv)} \qquad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_r \mu_0 \sigma \omega}}$$

# Transmissionsledningar

$$c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \; (= \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \text{ vid homogen isolation}) \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \qquad \begin{pmatrix} c & \text{hastigheten} \\ C' & \text{kap./längdenh.} \\ L' & \text{ind./längdenh.} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} V = V_F + V_R = V_+ e^{-j\beta z} + V_- e^{+j\beta z} \\ I = I_F + I_R = \dfrac{V_+}{Z_0} e^{-j\beta z} - \dfrac{V_-}{Z_0} e^{+j\beta z} \end{cases} \qquad \beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$Z = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta d}{Z_0 + jZ_L \tan \beta d} = Z_0 \frac{Z_L \cos\beta d + jZ_0 \sin\beta d}{Z_0 \cos\beta d + jZ_L \sin\beta d}$$

$$\Gamma_0 = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad VSWR = \frac{V_{m\,\max}}{V_{m\,\min}} = \frac{1 + |\Gamma_0|}{1 - |\Gamma_0|} \qquad |\Gamma_0| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1}$$

# Elektromagnetiska vågor

Plan, planpolariserad våg med sinusformat tidsberoende i förlustfritt material

$$\begin{cases} E_x = E_{mF} \cos(\omega t - \dfrac{\omega}{c} z + \alpha_F) + E_{mR} \cos(\omega t + \dfrac{\omega}{c} z + \alpha_R) \\ H_y = \dfrac{E_{mF}}{\eta} \cos(\omega t - \dfrac{\omega}{c} z + \alpha_F) - \dfrac{E_{mR}}{\eta} \cos(\omega t + \dfrac{\omega}{c} z + \alpha_R) \end{cases}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu_r \mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot 377\ \Omega$$

Plan våg i förlustfritt material: $E = \eta \cdot H = c \cdot B$

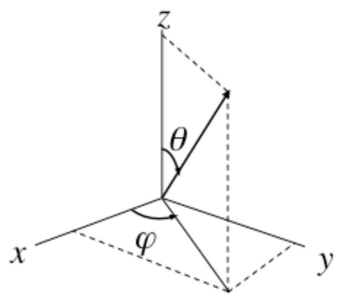
$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \qquad S_P = \text{ tidsmedelvärdet av } |\mathbf{S}| \qquad S_p = E_{eff} \cdot H_{eff} = \frac{1}{2} E_m \cdot H_m$$

## Antenner

$$\mathbf{B}(t) = \int_L \frac{\mu_0 i(t - r/c_0)\mathbf{dl}\times\mathbf{e}_r}{4\pi r^2} + \int_L \frac{\partial}{\partial t} i(t - r/c_0)\frac{\mu_0\, \mathbf{dl}\times\mathbf{e}_r}{4\pi c_0 r}$$

$$D(\theta,\varphi) = \frac{S_P(\theta,\varphi)}{S_{P\,\mathrm{medel}}} \qquad D = \frac{S_{P\,\max}}{S_{P\,\mathrm{medel}}} \qquad S_{Pmedel} = \frac{P_S}{4\pi R^2} \qquad P_L = A_e S_P$$

$$A_e(\theta,\varphi) = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta,\varphi) \qquad A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} D \qquad P_L = D_1 D_2 \frac{\lambda^2}{(4\pi R)^2} P_S$$




## Kretsteori

$Z_L = j\omega L$ $\qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ $\qquad$ Effektanpassning: $Z_L = Z_{Th}^*$ ($Z_{Th}$ given)

Inverterande standard OP-först.koppling: $V_O = -\frac{Z_2}{Z_1}\cdot V_S$

Icke-inverterande standard OP-först.koppling: $V_O = \left(\frac{Z_2}{Z_1} + 1\right)\cdot V_S$

Frekvensfunktion $H(j\omega) = \frac{V_O(j\omega)}{V_S(j\omega)}$

$$v_O(t) = |H(j\omega)| V_{mS} \cos(\omega t + \varphi_S + \arg H(j\omega))$$

## Matematik

$\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$
$\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$
$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$

Omkretsen av cirkel: $2\pi r$ $\qquad$ Ytan av en cirkel: $\pi r^2$

Ytan av en sfär: $4\pi r^2$ $\qquad$ Volymen av en sfär: $\frac{4\pi r^3}{3}$