Introduktion till elektronik

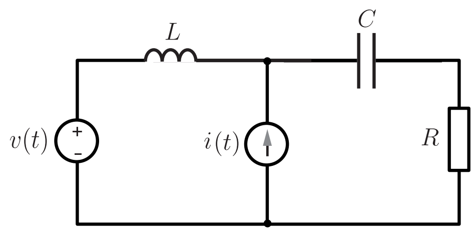
Introduktionen är riktad till studenter på Pi-programmet på Lund universitet och består av följande avsnitt:

1. Grundläggande begrepp: Potential, spänning, ström, resistans, kapacitans, induktans och Kirchhoffs lagar.
2. DC (direct current, likström): Kretsar med tidskonstanta spänningar och strömmar.
3. Transienter: Ur- och inkoppling av kondensatorer och induktanser.
4. AC (alternating current, växelström): Kretsar med tidsharmoniska spänningar och strömmar.

1 Grundläggande begrepp

1.1 Elektrisk krets

Elektrisk kretsar består av komponenter som är sammankopplade med elektriska ledningar. Komponenterna kan vara aktiva, såsom spännings- och strömkällor, eller passiva, såsom motstånd, kondensatorer och spolar. Aktiv komponenter kan, till skillnad från passiva komponenter, tillföra energi till kretsen. I analysen av en krets antas alla ledningar vara resistanslösa.



Figur 1: En krets med spänningskälla med spänning $v(t)$, strömkälla med ström $i(t)$ samt motstånd R, spole L och kondensator C.

1.2 Potential och jord

> Potentialen V i en punkt definieras av att en testladdning q som placeras i punkten får den elektriska energin $W = qV$.
>
> Jord=potentialen noll.

Den elektriska energin liknar den potentiella energin i mekaniken. En massa m har den potentiella energin mgh, där h är höjden relativt en referens, t.ex.

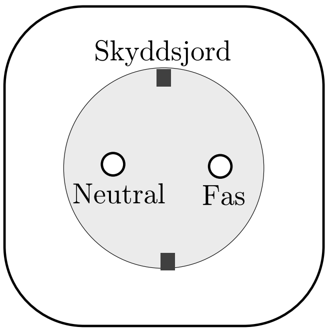
havsytans nivå, eller golvet i ett rum. På samma sätt relaterar vi potentialen till nollpotentialen, vilken benämns jord. Det är viktigt att elektriska system har en gemensam jord. I vår vardag finner vi jord i eluttagen. Bäst är att använda skyddsjorden. Den neutrala ledaren (nollan) skall också ligga på potentialen noll men eftersom det går strömmar genom nollan skiljer sig dess potential ofta en aning från skyddsjorden. En mätning med voltmeter mellan skyddsjord och den neutrala ledaren kan ge spänningar på 0-10 V. Höljet på elektriska apparater med jordkontakt är av säkerhetsskäl förbundet med skyddsjorden.

1.3 Spänning

Spänning=potentialskillnad.

Enheten för spänning är volt V. Spänningen betecknas $v(t)$ om den är tidsberoende och V om den är likspänning eller en komplex spänning (se nedan). Spänning och potential brukar numera ha samma beteckning.

Exempel 1
Spänningen i ett ficklampsbatteri är 1.5 V. Det betyder att skillnaden i potential mellan polerna är 1.5 V. ■



Figur 2: Vägguttag.

Exempel 2
Spänningen i ett vanligt vägguttag är 230 V. Det ena hålet är den neutrala ledaren med potentialen noll och det andra är fasen med potentialen

$$v(t) = 230\sqrt{2}\cos(\omega t)\ \mathrm{V}, \tag{1}$$

där $\omega = 2\pi f$ är vinkelfrekvensen och $f = 50$ Hz är frekvensen. Faktorn $\sqrt{2}$ kommer av att 230 V är effektivvärdet, eller rms värdet för spänningen, d.v.s.

$$V_{\text{effektiv}} = V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (v(t))^2\,\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

där $T = 1/f$ =periodtiden. Normalt finns ingen markering i vägguttag som anger vilket hål som är neutralt och vilket som är fas. Endast i undantagsfall behöver man veta detta[1]. I jordade uttag finns dessutom en skyddsjord, enligt figuren. Trots att både neutral och skyddsjord skall ha potentialen noll har de olika funktion. När något kopplas in i vägguttaget går strömmen mellan fasen och neutral. Det får inte gå någon ström i skyddsjorden. Det är mycket viktigt att inte blanda ihop ledningarna när man gör elektriska kopplingar i ett hus. Råkar man byta plats på skyddsjorden och fasen blir ytterhöljet på den inkopplade apparaten strömförande.

1.4 Ström

Strömmen i en ledning är laddningen som per tidsenhet passerar genom ledningen. Den betecknas $i(t)$ om den är tidsberoende och I om den är en likström eller en komplex ström (se nedan). Enheten för ström är ampere (A).

1.5 DC, AC och transienter

DC står för direct current, likström på svenska. Det betyder att spänningar och strömmar är konstanta i tiden.

AC står för alternating current, växelström på svenska, och vanligtvis betecknar det spänningar och strömmar som varierar sinusformat i tiden (tidsharmoniska signaler). En tidsharmonisk spänning ges av

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t + \alpha), \tag{3}$$

där V_0 är amplituden, $\omega = 2\pi f$ är vinkelfrekvensen och α är fasvinkeln.

Spänningar och strömmar som varierar snabbt under en kort tid för att sedan dö ut kallas transienter. Ett exempel är spänningen över en kondensator som vid tiden $t = 0$ börjar laddas ur genom en resistans. Kondensatorns spänningen är då

$$v(t) = V_1 e^{-t/\tau}, \tag{4}$$

där V_1 är den spänning kondensatorn var uppladdad till vid $t = 0$ och τ är tidskonstanten. Vi skall senare se att $\tau = RC$ där R är resistansen och C kondensatorns kapacitans.

1.6 Kirchhoffs lagar

För att matematiskt analysera kretsar behövs Kirchhoffs lagar och sambanden mellan spänning och ström för de komponenter som ingår i en krets.

[1]Man kan avgöra det genom att mäta spänningen mot skyddsjorden. Man kan också skruva loss höljet och se vilken färg kablarna har. Om det är korrekt kopplat i ett modernare hus är skyddsjorden gulgrön, fasen brun och nollan blå. I äldre hus kan man inte lita på färgerna.

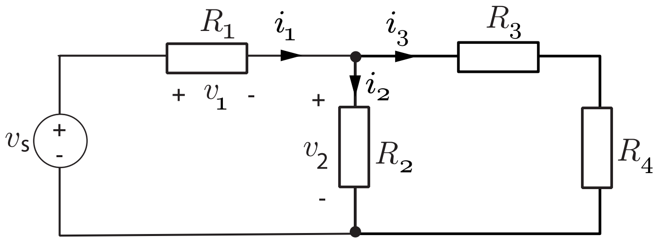
Kirchhoffs spänningslag: Summan av alla potentialförändringar när man går från en punkt i en krets genom en sluten slinga och tillbaka till den punkt man började är noll.

Det är helt analogt med att summan av alla ändringar i potentiell energi för en person som startar i en punkt, går ett varv längs en sluten slinga och kommer tillbaks till utgångspunkten är noll.

Kirchhoffs strömlag: I en knutpunkt (en punkt som sammanbinder fler än två ledningar) i en krets kommer det in lika mycket ström som det går ut.

En analogi är strömmande vatten. I en koppling med tre vattenrör måste det flöda in lika mycket vatten som det flödar ut.

Exempel 3
Kirchhoffs lagar tillämpade på kretsen i figur 3 ger



Figur 3: Kirchhoffs lagar.

$$\begin{aligned} v_\mathrm{s} &= v_1 + v_2 \\ i_1 &= i_2 + i_3. \end{aligned} \tag{5}$$

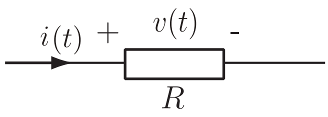
Det är viktigt med referensriktningen för strömmen (pilens riktning) och polariteten för spänningarna (+ och - tecknens placering). Ändrar vi en referensriktning eller polaritet måste vi byta tecken för motsvarande ström eller spänning i Kirchhoffs lagar. ∎

2 Samband mellan v och i

Vi behandlar här sambanden mellan spänning och ström för resistorn, kondensatorn och spolen. Utöver dessa tre komponenter är dioden och transistorn mycket vanliga komponenter i kretsar. En diod är en likriktare, den släpper igenom ström åt ena hållet, men stoppar den åt andra hållet. En transistor används i analoga kretsar som förstärkare och i digitala kretsar som switch (en styrspänning kan få transistorn att gå från att vara korsluten till att vara ett avbrott). Vi behandlar inte dioden och transistorn här.

2.1 Resistorn

För resistorn gäller Ohms lag

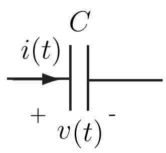


Figur 4: Symbolen för en resistans R. Strömmen går in vid + och ut vid -.

$$v(t) = Ri(t), \tag{6}$$

där R är resistansen, v är spänningen över resistorn och i är strömmen genom resistorn. Det är viktigt med referensriktningen på strömmen. Strömmen skall gå in vid $+$ och ut vid $-$. Skulle den gå åt andra hållet måste vi kompensera med ett minustecken i Ohms lag. Resistans mäts i ohm (Ω) vilket är detsamma som V/A.

2.2 Kondensatorn



Figur 5: Symbolen för en kondensator C. Strömmen går in vid + och ut vid -.

En kondensator består av två ledande plattor separerade med ett isolerande skikt. Kapacitansen C för en kondensator anger dess förmåga att lagra laddningar vid en viss spänning. Sambandet är

$$q(t) = Cv(t), \tag{7}$$

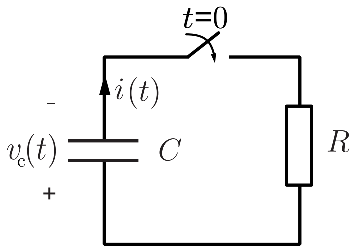
där q är laddningen på den positiva plattan och $-q$ laddningen på den negativa plattan (totala laddningen på kondensatorn är noll). Enheten för kapacitans är farad (F). Eftersom ström är laddning per tidsenhet kan vi derivera (7) och få

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}. \tag{8}$$

Integration från tiden 0 till t ger sambandet

$$v(t) - v(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t')\, \mathrm{d}t'. \tag{9}$$

Exempel 4



Figur 6: Kondensatorn C laddas ur genom resistansen R.

Antag att en kondensator är uppladdad till spänningen V_0. Vid tiden $t = 0$ kopplas en resistans R in i serie med kondensatorn, enligt figur 6. Det ger

$$v_c(t) = -Ri(t). \tag{10}$$

Insättning av (7) ger differentialekvationen för kondensatorspänningen

$$\begin{aligned} &\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_c(t) = 0, \; t > 0 \\ &v_c(0) = V_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ekvationen med begynnelsevillkoret har en entydig lösning för $t > 0$. Standardmetoder för ordinära differentialekvationer (t.e.x. integrerande faktor) ger

$$v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \; t \geq 0 \tag{12}$$

där $\tau = RC$ =tidskonstanten. ∎

2.3 Induktorn (spolen)

En induktor består oftast av en spole av isolerad metalltråd. Induktansen för en slinga med ett varv och ström $i(t)$ är definerad av

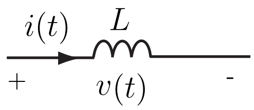
$$L = \frac{\Phi(t)}{i(t)}, \tag{13}$$

där Φ är det magnetiska flödet genom slingan. Induktansen L för en spole med N varv är

$$L = \frac{N^2 \Phi(t)}{i(t)}, \tag{14}$$

där Φ är det magnetiska flödet genom spolen. Man får alltså en förstärkning N^2 av induktansen genom att använda en lindad spole i stället för endast en slinga med ett varv. Spänningen som induceras över en spole ges av induktionslagen:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \tag{15}$$



Figur 7: Symbolen för en induktans L. Strömmen går in vid + och ut vid -.

Observera att strömmen går in vid + och ut vid -. Byter vi referensriktning på strömmen måste det kompenseras med ett minustecken i (15).

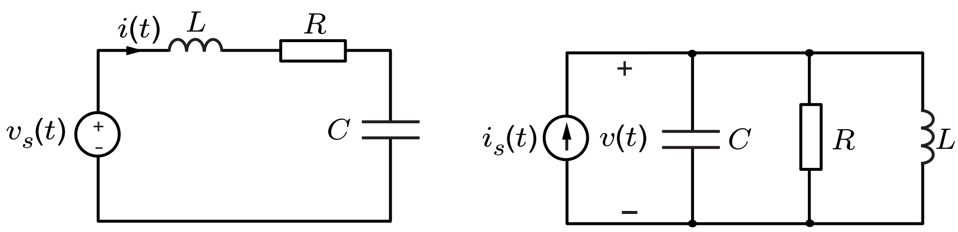
2.4 Linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Resistorn ger proportionalitet mellan spänning och ström, spolen mellan spänning och derivatan av strömmen och kondensatorn mellan spänning och integralen av strömmen. Med spännings- och strömkällor, resistanser, induktanser och kondensatorer kan vi därmed bygga elektriska kretsar som realiserar godtyckliga linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Exempel 5
Den ordinära differentialekvationen

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t), \tag{16}$$

med källtermen $f(t)$, realiseras av en serieresonanskrets, eller en parallellresonanskrets, se figur 8.



Figur 8: Serie- och parallellresonanskrets.

För serieresonanskretsen är strömmen $i(t)$ den sökta funktionen. Kirchhoffs spänningslag ger

$$v_{\mathrm{s}}(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_{\mathrm{C}}(t). \tag{17}$$

Derivering och relationen $i(t) = C\dfrac{dv_{\mathrm{C}}(t)}{dt}$ leder till

$$i''(t) + \alpha i'(t) + \beta i(t) = f(t), \tag{18}$$

där $\alpha = R/L$, $\beta = 1/(LC)$ och $f(t) = v_{\mathrm{s}}'(t)/L$.

För parallellresonanskretsen låter vi spänningen $v(t)$ vara den sökta funktionen. Kirchhoffs strömlag ger

$$i_{\mathrm{s}}(t) = C\frac{v(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + i_{\mathrm{L}}(t). \tag{19}$$

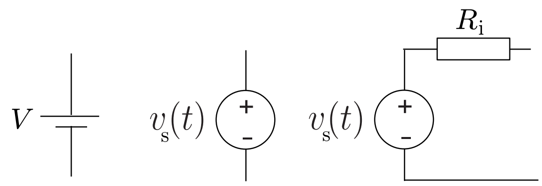
Derivering och relationen $v(t) = L\dfrac{di_{\mathrm{L}}(t)}{dt}$ leder till

$$v''(t) + \alpha v'(t) + \beta v(t) = f(t), \tag{20}$$

där $\alpha = 1/(RC)$, $\beta = 1/(LC)$ och $f(t) = i_{\mathrm{s}}'(t)/C$. ∎

2.5 Spänningskällor

Spänningen för en ideal spänningskälla är oberoende av kretsen som är inkopplad till källan. I figuren 9 visas två symboler för spänningskällor. Den vänstra anger att den är en likspänningskälla medan den mittersta används för spänningskällor med tidsberoende spänningar.



Figur 9: Symboler för en spänningskälla. Den vänstra används för likspänningar, den mittersta för godtyckliga tidsberoenden. Den högra kretsen är en modell för en verklig spänningskälla. Resistansen R_{i} är källans inre resistans.

De spänningskällor vi använder i vardagen är inte ideala. De kan inte leverera samma spänning oavsett vilken krets man kopplar in. Kopplar vi en tillräckligt liten resistans kommer spänningen från källan att sjunka. Den högra kretsen i figur 9 är kretsmodellen för en verklig spänningskälla. Den består av en ideal spänningskälla med spänning v_{s} i serie med en resistans R_{i}, som kallas för källans inre resistans. Både R_{i} och v_{s} har konstanta värden oavsett vad vi kopplar in till källan.

Den inre resistansen är ett kvalitetsmått för batterier. Den inre resistansen för ett 1.5 V ficklampsbatteri är 2-3 Ω medan ett bilbatteri har en inre resistans av omkring 0.01 Ω.

Exempel 6
En startmotor på en bil motsvarar en resistans $R_{\mathrm{m}} \approx 0.15$ Ω. Kan vi starta bilen

genom att ersätta 12 V bilbatteriet med 8 stycken seriekopplade 1.5 V ficklampsbatterier, vardera med inre resistansen 2 Ω? Seriekopplingen ger en spänningskälla med tomgångsspänningen 12 V och inre resistansen 16 Ω. Batterierna ger strömmen

$$i_{\mathrm{m}} = \frac{12}{16 + 0.15} \approx 0.74\,\mathrm{A} \tag{21}$$

till startmotorn och levererar därmed den ynka effekten

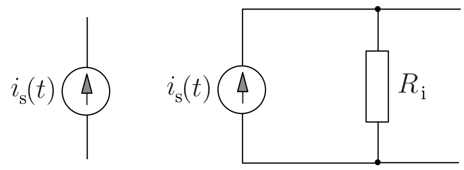
$$P_{\mathrm{m}} = R_{\mathrm{m}} i_{\mathrm{m}}^2 \approx 0.08\,\mathrm{W}. \tag{22}$$

Det är inte tillräckligt! Bilbatteriet levererar ca 840 W och det är vad som krävs för att snabbt starta bilen. ■

2.6 Strömkällor

Strömmen för en ideal strömkälla är oberoende av kretsen som är kopplad till källan. Strömkällor är betydligt mer ovanliga än spänningskällor och de används framförallt i modeller för vissa kretselement, såsom transistorer.

Figuren visar kretsmodellen för ideal och en verklig strömkälla. Den verkliga strömkällan består av en ideal strömkälla parallellkopplad med en inre resistans.



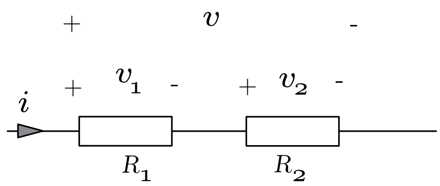
Figur 10: Den vänstra figuren visar en ideal strömkälla och den högra modellen för en verklig strömkälla. Resistansen R_{i} är källans inre resistans.

3 Analys av kretsar

Det finns systematiska sätt att analysera linjära kretsar med godtyckligt antal komponenter och källor. Den vanligaste metoden är nodanalys som bygger på Kirchhoffs strömlag. Den intresserade kan läsa kan läsa om denna på en länk som läggs på kursens hemsida. Mindre kretsar med ett fåtal komponenter kan analyseras med parallell- och seriekoppling, spänningsdelning och strömgrening. Här ger vi några enkla exempel:

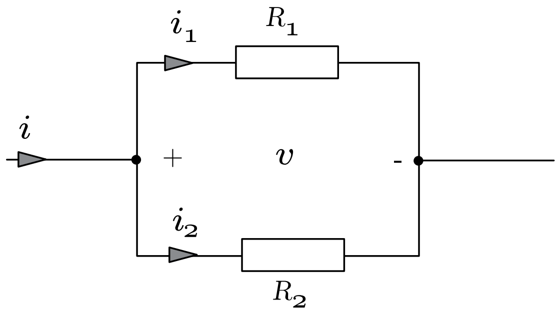
Exempel 7

Figuren visar två seriekopplade resistanser. Spänningen över reistanserna är $v = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$. Den totala resistansen är alltså $R_{\mathrm{tot}} = R_1 + R_2$ vid seriekoppling. ■



Figur 11: Två seriekopplade resistanser. Totala resistansen är $R_1 + R_2$.

Exempel 8



Figur 12: Två parallellkopplade resistanser. Totala resistansen är $\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Figuren visar två parallellkopplade resistanser. Strömmen in är $i = i_1 + i_2 = \dfrac{v}{R_1} + \dfrac{v}{R_2} = v\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$. Totala resistansen är alltså $\dfrac{1}{R_{\text{tot}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Oftast skrivs detta

$$R_{\text{tot}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{23}$$

∎

Exempel 9
Genom att använda sambandet (8) finner man att två parallellkopplade kondensatorer C_1 och C_2 har totala kapacitansen C där

$$C = C_1 + C_2 \tag{24}$$

medan seriekoppling ger

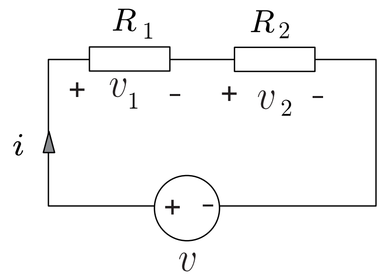
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{25}$$

Det blir alltså tvärtemot fallet med resistanser. ∎

Exempel 10

Spänningen över R_1 fås som $v_1 = R_1 i = R_1 \dfrac{v}{R_1 + R_2}$. Det gäller alltså att

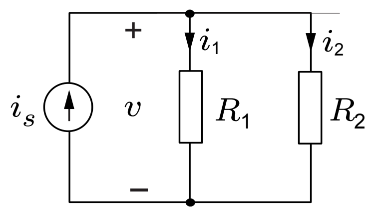
$$v_1 = v\frac{R_1}{R_1 + R_2}. \tag{26}$$



Figur 13: Spänningen v delas up i v_1 och v_2.

Formeln kallas spänningsdelningsformeln.
$\blacksquare$

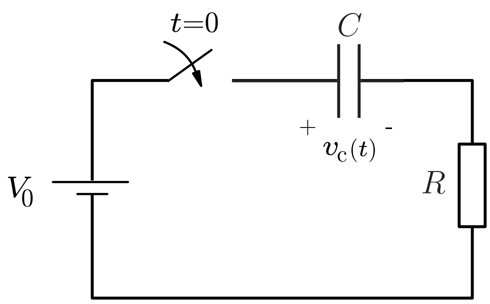
Exempel 11



Figur 14: Strömmen i_s delas up i i_1 och i_2.

Strömmen genom R_1 ges av $i_1 = \dfrac{v}{R_1}$ där $v = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} v$. Det ger strömgreningsformeln $i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i_\mathrm{s}$. $\blacksquare$

Exempel 12



Figur 15: Uppladdning av kondensator.

Kondensatorn är oladdad vid $t = 0$. Då kontakten sluts laddas den upp. För

$t \geq 0$ gäller

$$V_0 = v_c(t) + Ri(t), \tag{27}$$

där $i(t) = C\dfrac{dv_c(t)}{dt}$. Det ger följande problem för $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}V_0 \\ &v_c(0) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Standardmetoder för ordinära differentialekvationer (t.ex. integrerande faktor) ger lösningen för $t > 0$

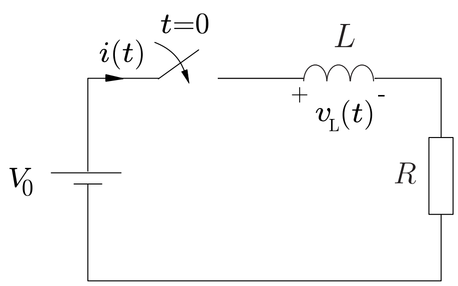
$$v_c(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tag{29}$$

där $\tau = RC$ =tidkonstanten. Som synes är spänningen över kondensatorn kontinuerlig vid $t = 0$ medan strömmen är diskontinuerlig

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ C\dfrac{dv_c(t)}{dt} = \dfrac{V_0}{R}e^{-t/\tau} & t > 0. \end{cases} \tag{30}$$

$\blacksquare$

Exempel 13



Figur 16: Inkoppling av spole.

Spolen är strömlös vid $t = 0$. Kontakten sluts vid $t = 0$ och för $t \geq 0$ gäller

$$\begin{aligned} &V_0 = Ri + L\frac{di(t)}{dt} \\ &i(0) = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Lösningen är

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \tag{32}$$

där $\tau = L/R$ = tidskonstanten. För $t > 0$ är spänningen över spolen

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = V_0e^{-t/\tau}. \tag{33}$$

Som synes gör spänningen ett hopp vid $t = 0$ medan strömmen är kontinuerlig. $\blacksquare$

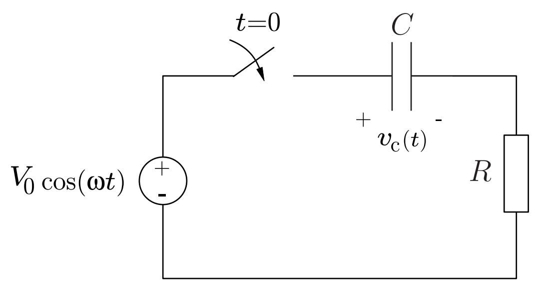
3.1 Tidsharmoniska signaler

Tidsharmoniska signaler har tidsberoenden

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{34}$$

där V_0 är toppvärdet (amplituden), ω är vinkelfrekvensen och α är fasvinkeln. Nästan all trådlös och trådbunden kommunikation sker med tidsharmoniska signaler. Dessutom används tidsharmoniska signaler i kraftsysem (t.ex. hushållsel), mikrovågsugnar, RF-systemen i acceleratorer mm.

Vid analys av tidsharmoniska system antar man att källorna varit påslagna under såpass lång tid att alla transienter (se exemplen i föregående avsnitt) dött ut. Vi tar ett enkelt exempel:



Figur 17: Tidsharmonisk källa kopplas in vid $t = 0$.

Antag att spänningskällan ger spänningen $v_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Bestäm spänningen $v_c(t)$ över kondensatorn för $t > 0$.

Kirchhoffs spänningslag ger

$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t). \tag{35}$$

Strömmen ges, enligt (9) av $i = C\dfrac{dv_c}{dt}$. Det ger en ordinär differentialekvation för v_c

$$RC\frac{v_c(t)}{dt} + v_c(t) = V_0 \cos(\omega t). \tag{36}$$

Vi kan lösa denna ekvation entydigt för $t \geq t_0$ om vi får reda på ett begynnelsevärde för $v_c(t)$ för någon tid t_0. Ni kan själva plocka fram lösningen med de metoder som presenterats i Analys 1. Den allmänna lösningen skrivs $v_c(t) = v_{\text{part}}(t) + v_{\text{hom}}(t)$, där $v_{\text{part}}(t)$ är partikulärlösningen som tar hand om källtermen och $v_{\text{hom}}(t)$ är den homogena lösningen som ser till att begynnelsevillkoret är uppfyllt. De homogena lösningen är, om vi väljer enklast möjliga partikulärlösning, en transient som dör ut exponentiellt. Vi är oftast inte intresserade av denna utan målet är den tidsharmoniska delen av lösningen, d.v.s. partikulärlösningen. Med jω-metoden, som beskrivs nedan, kan partikulärlösningen bestämmas utan att behöva ställa upp differentialekvationen.

3.2 jω-metoden

jω-metoden använder sig av komplexa spänningar och strömmar. I princip är det samma metod som är känd från matematiken när källtermen är en sinusformad funktion. Där ansätts en partikulärlösning med sinusformat tidsberoende enligt

$$v_{\mathrm{c}}(t) = \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{c}} e^{\mathrm{j}\omega t}\}, \tag{37}$$

där V_{c} är ett komplext tal (en komplex spänning). Insättning i (36) ger

$$\mathrm{Re}\{RC\mathrm{j}\omega V_{\mathrm{c}} e^{\mathrm{j}\omega t}\} + \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{c}} e^{\mathrm{j}\omega t}\} = \mathrm{Re}\{V_0 e^{\mathrm{j}\omega t}\}. \tag{38}$$

Denna kan skrivas

$$\mathrm{Re}\{(RC\mathrm{j}\omega V_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{c}} - V_0) e^{\mathrm{j}\omega t}\} = 0. \tag{39}$$

Ekvationen är uppfylld om

$$RC\mathrm{j}\omega V_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{c}} - V_0 = 0. \tag{40}$$

Det ger den komplexa spänningen

$$V_{\mathrm{c}} = \frac{V_0}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-\mathrm{j}\arctan(\omega RC)}, \tag{41}$$

där vi använt Eulers formel. Enligt (37) är motsvarande tidsberoende spänning

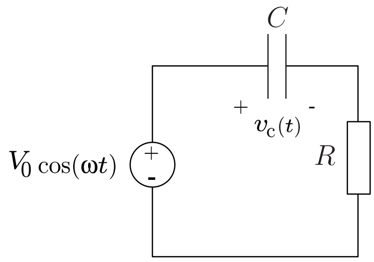
$$v_{\mathrm{c}}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)). \tag{42}$$

Detta kan snabbas upp genom att direkt inflöra komplexa spänningar och strömmar $V = |V| e^{\mathrm{j}\arg V}$ och $I = |I| e^{\mathrm{j}\arg I}$. Sambanden mellan de komplexa spänningarna och strömmarna kan för varje komponent, eller för sammankopplade komponenter, alltid skrivas

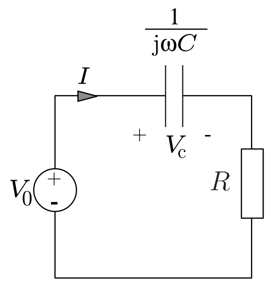
$$V = ZI, \tag{43}$$

där $Z = R + \mathrm{j}X$ är impedansen (R kallas resistansen och X reaktansen). Det är enkelt att se att en induktans har impedansen $\mathrm{j}\omega L$, en kondensator har impedansen $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ och en resistans har impedansen R. Man ritar upp kretsen med de komplexa spänningarna och strömmarna och med impedanserna för varje kretskomponent. Kretsen analyseras sedan på exakt samma sätt som de resistiva kretsarna. Här ges några exempel:

Exempel 14



Figur 18: Tidsharmonisk krets i tidsplanet.



Figur 19: Tidsharmonisk krets i frekvensplanet.

Vi bestämmer $v_c(t)$ för RC-kretsen i figur 18. Inför den komplexa spänningen $V_s = V_0$ för spänningen $v_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$, den komplexa spänning V_c fär kondensatorn och impedanserna $\dfrac{1}{j\omega C}$ för kondensatorn och R för resistansen. Det transformerar kretsen till frekvensplanet, se figur 19 Den komplexa V_c ges av spänningsdelningsformeln, se (26):

$$V_c = V_0 \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = V_0 \frac{1}{1 + j\omega RC} = V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-j\arctan(\omega RC)}. \tag{44}$$

Den tidsberoende spänningen är, enligt transformen (37),

$$v_c(t) = \mathrm{Re}\{V_c e^{j\omega t}\} = V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)). \tag{45}$$

Spänningen över kondensatorn är alltså dämpad med faktorn $\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ och fasförskjuten vinkeln $\arctan(\omega RC)$ jämfört med spänningen över källan. När $\omega \to 0$ blir kondenstorn ett avbrott och $v_c(t) = v_s(t)$ och då $\omega \to \infty$ blir kondensatorn kortsluten och $v_c(t) = 0$. På samma sätt kan vi få ut spänningen över resistensen. Den blir

$$v_R(t) = V_0 \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \pi/2 - \arctan(\omega RC)). \tag{46}$$

Exempel 15
RC-nätet kan användas som lågpass- och högpassfilter. Om spänningskällan har ett brett spektrum av frekvenser kommer spänningen för de låga frekvenserna hamna över kondensatorn medan spänningen för de höga frekvenserna hamnar över resistorn. Antag att vår källa innehåller två signaler med olika vinkelfrekvenser $\omega_1 = 1$ krad/s och $\omega_2 = 100$ krad/s, båda med amplituden $V_0 = 10$ V:

$$v_{\mathrm{s}}(t) = v_1(t) + v_2(t) = V_0 \cos(\omega_1 t) + V_0 \cos(\omega_2 t). \tag{47}$$

Vi vill nu separera de två signalerna med ett RC-nät. Vi tar ut en del av signalen över kondensatorn och den andra delen över resistorn, enligt figur. Vi väljer R och C så att $1/(RC) = 10^4$ s^{-1}. Insättning i (45) och (46) ger

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{c}}(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{1+(0.1)^2}}\left(\cos(\omega_1 t - \arctan(0.1)) + 0.1\cos(\omega_2 t + \pi/2 - \arctan(0.1))\right) \\ v_{\mathrm{R}}(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{1+(0.1)^2}}\left(0.1\cos(\omega_1 t + \pi/2 - \arctan(0.1)) + \cos(\omega_2 t - \arctan(0.1))\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Kretsen är ett filter. Tar vi ut spänningen över kondensatorn finns nästan hela $v_1(t)$ kvar och det mesta av $v_2(t)$ är bortfiltrerat. Den lågfrekventa signalen passerar med den högfrekventa stoppas och vi har därmed ett lågpassfilter. Tar vi ut spänningen över resistansen finns nästan hela $v_2(t)$ kvar och det mesta av $v_1(t)$ är bortfiltrerat. Den högfrekventa signalen passerar med den lågfrekventa stoppas och vi har därmed ett högpassfilter. ∎