Vektoranalys III

Anders Karlsson

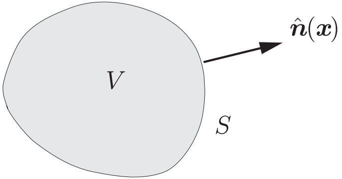
Institutionen för elektro- och informationsteknik

Översikt

1. **Gauss sats — divergenssatsen**
   - Exempel på användning av Gauss sats
2. **Stokes sats**
   - Exempel på användning av Stokes sats
3. **Övningar**
   - Svar
   - Lösningsskisser

Gauss sats — divergenssatsen

Låt S vara en sluten (styckvis glatt) yta med utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$, som begränsar ett område V, samt $\boldsymbol{A}$ ett kontinuerligt differentierbart vektorfält i V (mer precist i en öppen omgivning som innehåller V och S)



$$\boxed{\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}v = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S}$$

jämför integration in $\mathbb{R}$: $\int_a^b \frac{\mathrm{df(x)}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = f(b) - f(a)$

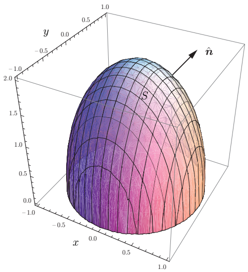
Exempel

Beräkna normalytintegralen $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ av vektorfältet $\boldsymbol{F}$ givet av (sfäriska koordinater r, θ, ϕ)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{1}{r^2}$$

över ytan S som definieras av (Prolat sfäroid, halvaxlar 1,1,2)

$$S = \{\boldsymbol{r} : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z > 0\}$$



Lösning I

Ytan S är komplicerad att parameterframställa, så vi undersöker om vi kan välja annan yta för integration

Vi konstaterar:

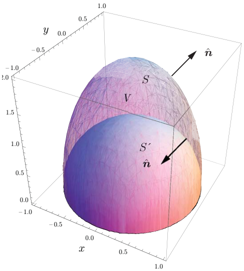
- Vektorfältet är singulärt i origo (måste undvikas)
- Beräkna $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ i sfäriska koordinater, $r > 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{F} =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta F_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\\ =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0\end{aligned}$$

Lösning II

Vi sluter ytan S med en halvsfär S' i övre halvrymden (Halvsfär i övre halvrymden)

$$S' = \{\boldsymbol{r} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0\}$$



- Sluten yta: S_1 bestående av S och S' med normalriktningar givna enligt figur
- $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$ i volymen V, som har S_1 som begränsningsyta

Lösning III

Tillämpa Gauss sats på volymen V som har S_1 som begränsningsyta

$$\iint_{S+S'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\, \mathrm{d}S = 0$$

$$\Rightarrow \quad \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

Lösning IV

Vi beräknar enkelt normalytintegralen på S' (ytmått $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\hat{\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi,\ r = 1$)

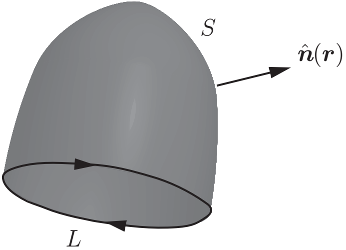
$$
\begin{aligned}
\iint_{S'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= -\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi \cos\theta \big|_0^{\pi/2} = -2\pi
\end{aligned}
$$

Till slut

$$
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 2\pi
$$

Stokes sats

Låt S vara en (styckvis glatt) yta med randkurva L, och låt omloppsriktningen på L vara relaterad till ytan S:s ytnormal $\hat{\boldsymbol{n}}$ med högerregeln, samt $\boldsymbol{A}$ ett kontinueligt differentierbart vektorfält på S (mer precist i en öppen omgivning som innehåller S och L)



$$\boxed{\int_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

Gäller för alla ytor S som har L som randkurva
Obs! Ytan S måste ha två sidor, jämför Möbius-band

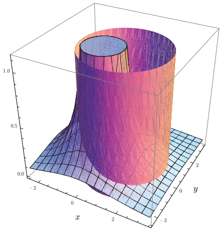
Exempel

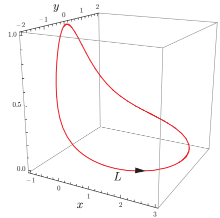
Beräkna tangentlinjeintegralen $\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ av vektorfältet $\boldsymbol{F}$ givet av (sfäriska koordinater r, θ, ϕ)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{r}{a^2 \sinh r/a} + \hat{\phi} \frac{\sin \phi/2}{r \sin \theta}$$

över kurvan L som definieras av skärningen mellan ytorna (omloppsriktning moturs, sett projicerad i x-y-planet)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 & \text{cirkulär cylinder (radie 2, axel parallell med } \hat{\boldsymbol{z}}\text{)} \\ r_c^2 = x^2 + y^2 = 1/z & \end{cases}$$





Lösning I

Kurvan L är komplicerad att parameterframställa, så vi undersöker om vi kan välja annan integrationsväg

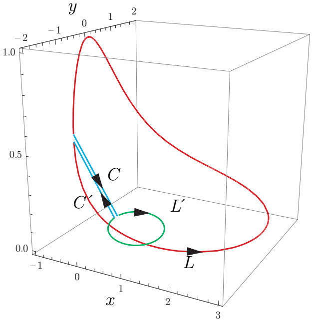
Vi konstaterar

- Vektorfältet är singulärt längs z-axeln (måste undvikas)
- Beräkna $\nabla \times \boldsymbol{F}$ i sfäriska koordinater, $r_\mathrm{c} > 0$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} =& \hat{\boldsymbol{r}} \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi} \right) \\
& + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta} \right) \\
=& \hat{\boldsymbol{r}} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\sin\phi/2}{r} \right) \\
& + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{r}{a^2 \sinh r/a} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin\phi/2}{\sin\theta} \right) \right) \\
& - \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{r}{a^2 \sinh r/a} \right) = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Lösning II

Vi förenklar integrationsvägen till en cirkel i x-y-planet m.h.a. Stokes sats $L' = \{\boldsymbol{r} : x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}$



- Sluten kurva γ bestående av L, C, L' och C' med givna rikningar
- $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ på en begränsningsyta S som har γ som rand

Lösning III

Tillämpa Stokes sats på begränsningsytan S som har γ som rand

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\int_{L'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

Tangentlinjeintegralerna längs C och C' tar ut varann

Lösning IV

Vi beräknar tangentlinjeintegralen längs L' (linjemått $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = r_\mathrm{c}\hat{\boldsymbol{\phi}}\mathrm{d}\phi$, $\theta = \pi/2$, $r_\mathrm{c} = b$)

$$\int_{L'} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{2\pi}^{0} \boldsymbol{F}\cdot b\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{d}\phi = -\int_0^{2\pi} \frac{\sin\phi/2}{r\sin\theta} b\,\mathrm{d}\phi$$
$$= -\int_0^{2\pi} \sin\phi/2\,\mathrm{d}\phi = 2\cos\phi/2\big|_0^{2\pi} = -4$$

oberoende av b

Till slut

$$\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\int_{L'} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 4$$

Övningar Gauss och Stokes satser

1. Beräkna normalytintegralen $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ av vektorfältet $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{x}} \frac{xz}{x^2 + y^2} + \hat{\boldsymbol{y}} \frac{yz}{x^2 + y^2}$$

   över ytan S, som är den del av hyperboloiden $S_1 = \{\boldsymbol{r} : x^2 + y^2 - z^2 = a^2\}$, som begränsas av området mellan planen

$$\begin{cases} S_2 = \{\boldsymbol{r} : z = -a\} \\ S_3 = \{\boldsymbol{r} : z = 2a\} \end{cases}$$

   Ytnormalen är riktad från z-axeln.

2. Beräkna tangentlinjeintegralen $\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ av vektorfältet $\boldsymbol{F}$ (sfäriska koordinater r, θ, ϕ)

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{r}} \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left(1 + \frac{a}{r \sin\theta}\right)$$

   Kurvan L definieras av skärningen mellan ytorna (omloppsriktning moturs, sett projicerad i x-y-planet)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 & \text{cirkulär cylinder (radie 2a, axel parallell med } \hat{\boldsymbol{z}}) \\ x^2 + (y + a)^2 + z^2 = 9a^2, z > 0 & \text{halvsfär, radie 3a, centrum i } (0, -a, 0) \end{cases}$$

Övningar Gauss och Stokes satser — svar

1. $3\pi a^2$
2. $6\pi a$

Lösningsskiss 1

Skriv om vektorfältet m.h.a. enhetsvektorerna i cylinderkoordinater

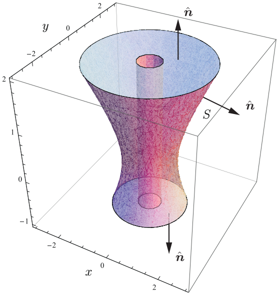
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = z\left(\hat{\boldsymbol{x}}\frac{x}{x^2+y^2} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{y}{x^2+y^2}\right) = z\frac{\boldsymbol{r}_\mathrm{c}}{r_\mathrm{c}^2} = \frac{z}{r_\mathrm{c}}\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c}$$

Beräkna divergensen av $\boldsymbol{F}$ i cylinderkoordinater. För $r_\mathrm{c} > 0$ gäller

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial r_\mathrm{c}}(r_\mathrm{c}F_\mathrm{c}) + \frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial r_\mathrm{c}}(z) = 0$$

Slut ytan S med de tre delarna
$(0 < b < a)$

$$\begin{cases} S_2' = \{\boldsymbol{r} : z = 2a, b < r_c < \sqrt{5}a\} \\ S_3' = \{\boldsymbol{r} : z = -a, b < r_c < \sqrt{2}a\} \\ S_4 = \{\boldsymbol{r} : -a < z < 2a, r_c = b\} \end{cases}$$



Normalytintegralen blir m.h.a. Gauss sats

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_2'+S_3'+S_4} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S_4} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$= \int_{-a}^{2a} \left(\int_0^{2\pi} \frac{z}{r_c} r_c \, \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}z = 2\pi \int_{-a}^{2a} z \mathrm{d}z = 3\pi a^2$$

Lösningsskiss 2

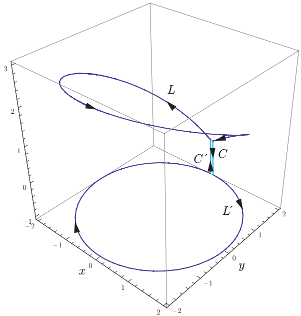
Beräkna rotationen av vektorfältet i sfäriska koordinater. För $r_\mathrm{c} > 0$ gäller

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} =& \hat{\boldsymbol{r}} \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi} \right) \\
& + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta} \right) \\
=& \hat{\boldsymbol{r}} \frac{1}{r \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \left(1 + \frac{a}{r \sin\theta} \right) \right) \right) \\
& + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \frac{r}{a}}{\partial\phi} - \frac{\partial \left(r \left(1 + \frac{a}{r \sin\theta} \right) \right)}{\partial r} \right) - \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \frac{r}{a}}{\partial\theta} \right) \\
=& \hat{\boldsymbol{r}} \frac{\cos\theta}{r \sin\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta}{r_\mathrm{c}} = \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{r_\mathrm{c}}
\end{aligned}$$

Lösningsskiss 2, forts.

Låt L' beteckna kurvan

$$L' = \{\boldsymbol{r} : x^2 + y^2 = 4a^2, z = -1\}$$



och använd Stokes sats på den slutna kurvan $L + C + L' + C'$, och välj yta S som "mantelytan" med L, C, L' och C' som ränder. På S är $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c}$

$$\int_{L+C+L'+C'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = -\iint_S \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{r_\mathrm{c}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c} \, \mathrm{d}S = 0$$

Lösningsskiss 2, forts.

Detta ger (linjeintegralerna längs C och C' tar ut varann)

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\int_{L'} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\phi} 2a \mathrm{d}\phi$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{2a}\right) 2a \mathrm{d}\phi = 6\pi a$$