



Vektoranalys II

Anders Karlsson

Institutionen för elektro- och informationsteknik

1 Kurvor och ytor, linje- och yt-mått

2 Integraler, Kap. 1.3

Linjeintegraler

Ytintegraler

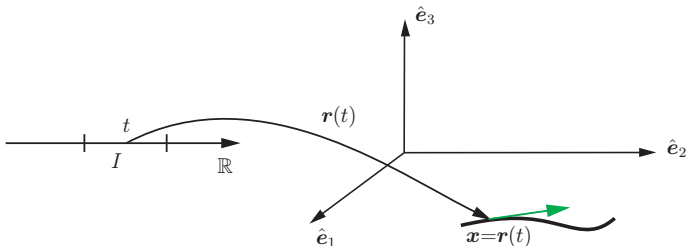
Volymintegraler

3 Övningar

Svar

Lösningsskisser

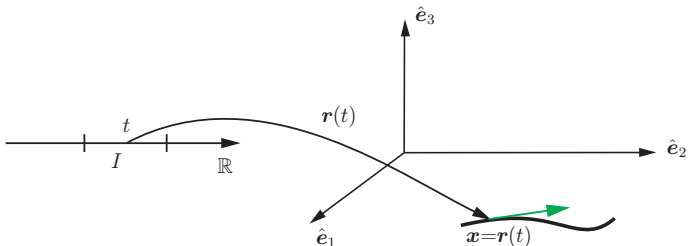
Kurvor



Värdemängden av en kontinuerlig vektorvärd funktion $\mathbf{r}(t)$ definierad på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ kallas en kurva L i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I$$

Kurvor



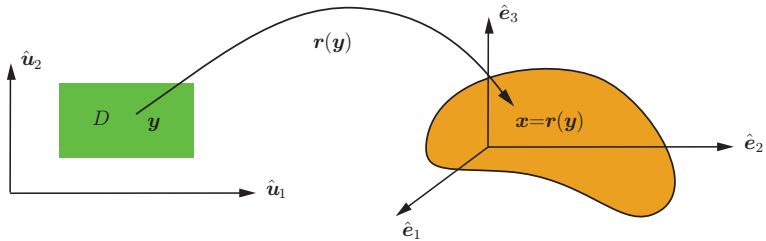
Värdemängden av en kontinuerlig vektorvärd funktion $\mathbf{r}(t)$ definierad på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ kallas en kurva L i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(t), \quad t \in I$$

En **tangentvektor** till kurvan L i punkten $\mathbf{r}(t)$ ges av

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial t} \text{ (grön vektor)}$$

Kurvan kallas **glatt** om $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$, $t \in I$



Värdemängden av en kontinuerlig vektorvärd funktion $\mathbf{r}(\mathbf{y})$ definierad på ett område $D \subset \mathbb{R}^2$ kallas en yta S i $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in D$$

Linjemått (bågmått)

Låt $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$, definierad på ett intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, framställa en kurva L . Tangentvektorn $\hat{\tau}$ (enhetsvektor) ges av

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad t \in [a, b]$$

Linjemått (bågmått)

Låt $\mathbf{x} = \mathbf{r}(t)$, definierad på ett intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, framställa en kurva L . Tangentvektorn $\hat{\tau}$ (enhetsvektor) ges av

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}, \quad t \in [a, b]$$

Två olika linjemått, $d\ell$ och $d\ell$, (skalärvärt respektive vektorvärt) förekommer, och ges av

$$d\ell = \left| \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right| dt = |\mathbf{r}'(t)| dt$$

och

$$d\ell = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \mathbf{r}'(t) dt = \hat{\tau}(t) |\mathbf{r}'(t)| dt = \hat{\tau}(t) d\ell$$

Linjeintegraler I

Tre huvudtyper av linjeintegraler förekommer i kursen

1. Skalärvärd linjeintegral

$$\int_L f \, d\ell = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

2. Vektorvärd linjeintegral

$$\int_L f \, d\ell = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \mathbf{r}'(t) \, dt$$

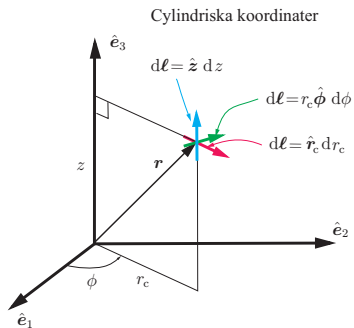
$$\int_L \mathbf{A} \, d\ell = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| \, dt$$

$$\int_L \mathbf{A} \times d\ell = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \times \mathbf{r}'(t) \, dt$$

3. Tangentlineintegral, skalärvärd

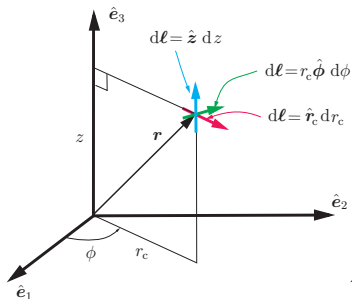
$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_L \mathbf{A} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} d\ell = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

Några vanliga linjemått

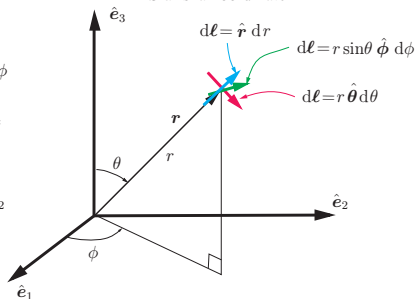


Några vanliga linjemått

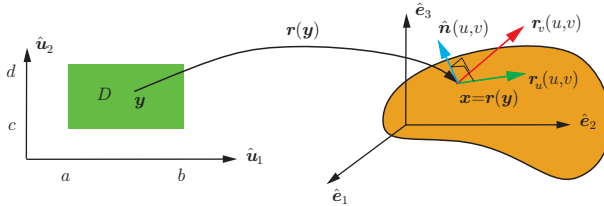
Cylindriska koordinater



Sfäriska koordinater

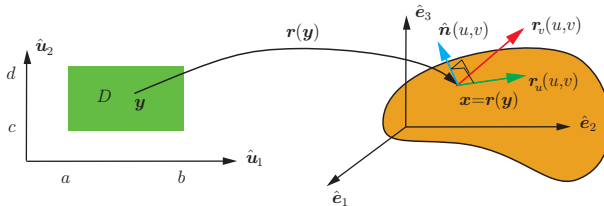


Ytor och normalvektorer



Låt $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(u, v)$, definierad på ett område $(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, framställa en yta S .

Ytor och normalvektorer

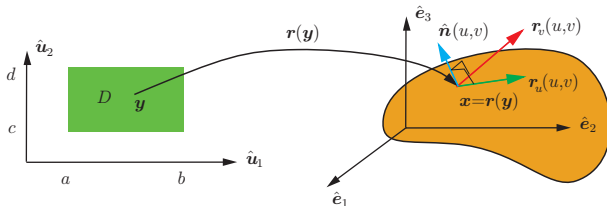


Låt $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(u, v)$, definierad på ett område $(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, framställa en yta S .

Två tangentvektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ till ytan kan definieras

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \mathbf{r}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

Ytor och normalvektorer



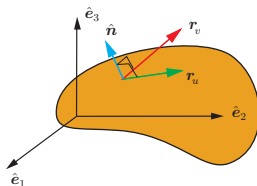
Låt $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(u, v)$, definierad på ett område $(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, framställa en yta S .

Två tangentvektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ till ytan kan definieras

$$\mathbf{r}_u(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \mathbf{r}_v(u, v) = \frac{\partial \mathbf{r}(u, v)}{\partial v}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

En ytnormal $\hat{\mathbf{n}}$ (enhetsvektor) ges av

$$\hat{\mathbf{n}}(u, v) = \frac{\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)}{|\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)|}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$



Två olika ytmått, dS och $d\mathbf{S}$, (skalärvärdet respektive vektorvärdet) förekommer, och ges av

$$dS = |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv$$

och

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \, du dv = \hat{\mathbf{n}}(u, v) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv \\ &= \hat{\mathbf{n}}(u, v) dS \end{aligned}$$

Tre huvudtyper av ytintegraler förekommer i kursen

1. Skalärvärd ytintegral

$$\begin{aligned}\iint_S f \, dS &= \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, dv \right) du\end{aligned}$$

2. Vektorvärd ytintegral

$$\begin{aligned}\iint_S f \, d\mathbf{S} &= \iint_S f \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \, du dv \\ &= \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \hat{\mathbf{n}}(u, v) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(\mathbf{r}(u, v)) \hat{\mathbf{n}}(u, v) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, dv \right) du\end{aligned}$$

2. Vektorvärd ytintegral

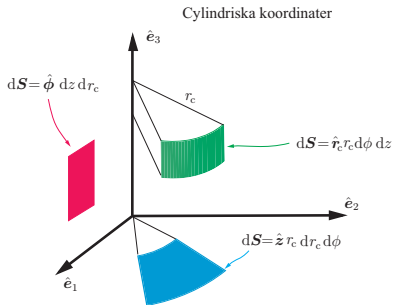
$$\begin{aligned}\iint_S f \, d\mathbf{S} &= \iint_S f \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v) \, du dv \\ &= \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \hat{\mathbf{n}}(u, v) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(\mathbf{r}(u, v)) \hat{\mathbf{n}}(u, v) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, dv \right) du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A} \, d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, du dv \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| \, dv \right) du\end{aligned}$$

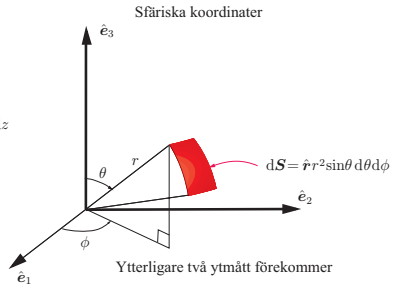
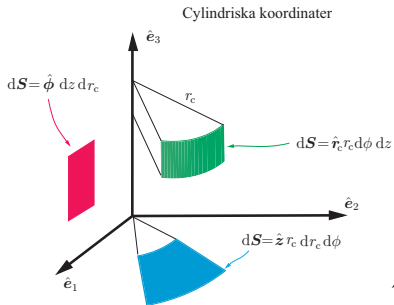
3. Normalytintegral, skalärvärd

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(u, v) |\mathbf{r}_u(u, v) \times \mathbf{r}_v(u, v)| du dv\end{aligned}$$

Några vanliga ytmått



Några vanliga ytmått



Andra vanliga ytmått I

Låt ytan S framställas av $z = f(x, y)$ (x och y parametrar)
Ortsvektorn till ytan ges av $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ och normalen
av (vänd mot positiva z -värden)

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1)$$

Ytnormalen

$$\hat{\mathbf{n}}(x, y) = \frac{\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y)}{|\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y)|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

Ytmåttet blir

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) dx dy = \frac{\hat{\mathbf{n}}(x, y)}{|\hat{\mathbf{n}}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}}|} dx dy$$

Andra vanliga ytmått II

Låt ytan S framställas av $f(\mathbf{x}) = \text{konstant}$

Ytnormalen till ytan ges av

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \pm \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}$$

vilket ger

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \pm \frac{\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{z}}}{|\nabla f(\mathbf{x})|}$$

och

$$\mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) = \frac{\hat{\mathbf{n}}(x, y)}{|\hat{\mathbf{n}}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}}|} = \pm \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{z}}|}$$

Ytmåttet blir

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) dx dy = \pm \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{z}}|} dx dy$$

Ytintegraler

De aktuella ytintegralerna framställs $((x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2)$

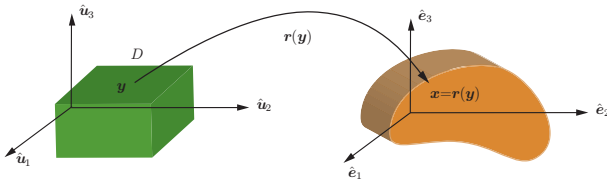
$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(x, y)) \frac{dx dy}{|\hat{\mathbf{n}}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}}|}$$

$$\iint_S f \, d\mathbf{S} = \iint_D f(\mathbf{r}(x, y)) \frac{\hat{\mathbf{n}}(x, y)}{|\hat{\mathbf{n}}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}}|} dx dy$$

$$\iint_S \mathbf{A} \, dS = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) \frac{dx dy}{|\hat{\mathbf{n}}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}}|}$$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y) \frac{dx dy}{|\hat{\mathbf{n}}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{z}}|}$$

Volymer



Låt $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{y}) = \mathbf{r}(u, v, w)$, definierad på ett område $(u, v, w) \in D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$, framställa en volym V
Funktionaldeterminanten (Jacobianen) ges av

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_1}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial w} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Volymsmått

Volymsmåttet ges av

$$dv = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right) du dv dw = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

Två typer av volymsintegraler förekommer i kursen

1. Skalärvärd volymsintegral

$$\iiint_V f \, dv = \iiint_D f(\mathbf{r}(u, v, w)) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

2. Vektorvärd volymsintegral

$$\iiint_V \mathbf{A} \, dv = \iiint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v, w)) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial(u, v, w)} du dv dw$$

Några vanliga volymmått

Cylinderkoordinater $dv = r_c dr_c d\phi dz$

Sfäriska koordinater $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Övningar integraler

1. Beräkna den vektorvärda integralen $\iint_S \hat{\theta} dS$ över en sfär med radien a som är centrerad i origo
2. Problem 1.29 (1.28 i 3e upplagan) i Griffiths (line integral = tangentlinjeintegral)
3. Låt $\mathbf{A} = (18z, -12, 3y)$ och låt ytan S definieras av planet $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y + 6z = 12\}$. Normalen pekar från origo. Beräkna normalytintegralen.
4. Låt $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = z\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}} + y\hat{\mathbf{z}}$ och låt kurvan L definieras av skärningen mellan ytorna $S_1 : \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och $S_2 : \{(x, y, z) : x = y\}$. Beräkna $\int_L \mathbf{A} \times d\ell$.
5. Problem 1.31 (1.30 i 3e) i Griffiths

Övningar integraler — svar

1. $-2\pi^2 a^2$

2. 2.a $4/3$

2.b $4/3$

2.c $4/3$

2.d 0

3. 24

4. $\pm \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$

5. $1/60$

Lösningsskiss 1

Utnyttja sambandet $\hat{\theta} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta$ för att kunna utföra integration i ett fixt koordinatsystem.

Sfärens ytmått uttryckt i sfäriska koordinater är $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Vi får

$$\begin{aligned} \iint_S \hat{\theta} dS &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} (\hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta) a^2 \sin \theta d\phi \right) d\theta \\ &= -\hat{z} 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = -\hat{z} \pi^2 a^2 \end{aligned}$$

där vi använt

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

och

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$$

Lösningsskiss 2, a & b

$$\mathbf{v} = x^2 \hat{\mathbf{x}} + 2yz \hat{\mathbf{y}} + y^2 \hat{\mathbf{z}}$$

a.

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^1 \mathbf{v}(x, 0, 0) \cdot \hat{\mathbf{x}} dx + \int_0^1 \mathbf{v}(1, y, 0) \cdot \hat{\mathbf{y}} dy \\ &+ \int_0^1 \mathbf{v}(1, 1, z) \cdot \hat{\mathbf{z}} dz = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 dz = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_0^1 \mathbf{v}(0, 0, z) \cdot \hat{\mathbf{z}} dz + \int_0^1 \mathbf{v}(0, y, 1) \cdot \hat{\mathbf{y}} dy \\ &+ \int_0^1 \mathbf{v}(x, 1, 1) \cdot \hat{\mathbf{x}} dx = \int_0^1 2y dy + \int_0^1 x^2 dx = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- c. Parameterframställning av kurvan $\mathbf{r}(t) = t(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})$,
 $t \in [0, 1]$

$$\int_L \mathbf{v} \cdot d\ell = \int_0^1 \mathbf{v}(t, t, t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 t^2 + 2t^2 + t^2 dt = \frac{4}{3}$$

- d. Subtraktion av resultaten i a & b eller använd att $\nabla \times \mathbf{v} = 0$.

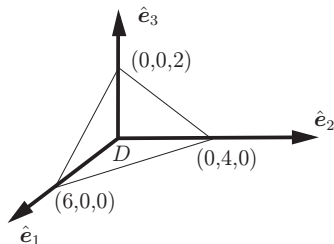
Lösningsskiss 3

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 18z\hat{\mathbf{x}} - 12y\hat{\mathbf{y}} + 3y\hat{\mathbf{z}}$$

och parameterframställ ytan med x och y som parametrar

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 12\} \text{ och}$$

$$z = f(x, y) = 2 - x/3 - y/2$$



Ytmåttet blir

$$d\mathbf{S} = \mathbf{r}_x(x, y) \times \mathbf{r}_y(x, y) dx dy = (1/3, 1/2, 1) dx dy$$

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (18z, -12, 3y) \cdot (1/3, 1/2, 1) dx dy \\&= \int_0^6 \left(\int_0^{4-2x/3} (6(2 - x/3 - y/2) - 6 + 3y) dy \right) dx \\&= \int_0^6 \left(\int_0^{4-2x/3} (6 - 2x) dy \right) dx \\&= \int_0^6 (4 - 2x/3)(6 - 2x) dx = 24\end{aligned}$$

Lösningsskiss 4

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (z, x, y)$$

och kurvan L är en storcirkel på enhetscirkeln som parameterframställs genom (tecken beroende på omloppsriktning)
 $\mathbf{r}(\theta) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \cos \theta)$, där $\theta \in [0, 2\pi)$. Linjemåttet blir

$$d\ell = \pm \frac{d\mathbf{r}(\theta)}{d\theta} d\theta = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, -\sin \theta \right) d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{A} \times d\ell &= \pm \int_0^{2\pi} (z, x, y) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, -\sin \theta \right) d\theta \\ &= \pm \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, -\sin \theta \right) d\theta \\ &= \pm \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta, \frac{3}{2} \sin \theta \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right) d\theta \end{aligned}$$

Lösningsskiss 4, forts.

Med hjälp av $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi$ och
 $\int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta \, d\theta = 0$ får vi

$$\int_L \mathbf{A} \times d\boldsymbol{\ell} = \pm \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\pi \right) = \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

