Introduktion till elektronik

Mariana Dalarsson, Anders Karlsson

August 21, 2019

Introduktion

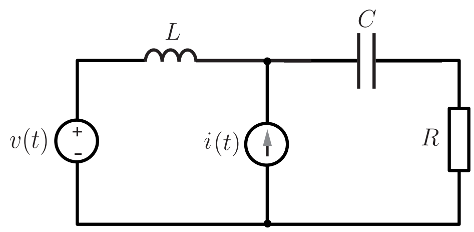
Detta häfte är riktat till studenter på Pi-programmet på Lunds universitet och består av följande avsnitt:

1. Grundläggande begrepp: Potential, spänning, ström och Kirchhoffs lagar.
2. Samband mellan spänningar och strömmar för olika komponenter. Spännings- och strömkällor.
3. Analys av kretsar.
4. Kretsar som realiserar linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.
5. AC (alternating current, växelström): Kretsar med tidsharmoniska spänningar och strömmar.

1 Grundläggande begrepp

1.1 Elektrisk krets

Elektrisk kretsar består av komponenter som är sammankopplade med elektriska ledningar. Komponenterna kan vara aktiva, såsom spännings- och strömkällor, eller passiva, såsom motstånd, kondensatorer och spolar. Aktiv komponenter kan, till skillnad från passiva komponenter, tillföra energi till kretsen. I analysen av en krets antas alla ledningar vara resistanslösa.



Figur 1: En krets med spänningskälla med spänning $v(t)$, strömkälla med ström $i(t)$ samt motstånd R, spole L och kondensator C.

1.2 Potential och jord

Potentialen V i en punkt definieras av att en testladdning q som placeras i punkten får den elektriska energin $W = qV$.

Jord=potentialen noll.

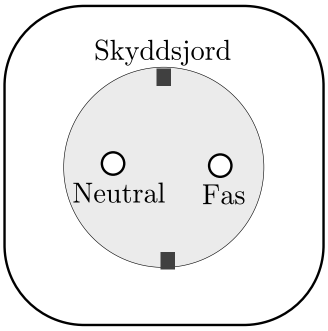
Den elektriska energin liknar den potentiella energin i mekaniken. En massa m har den potentiella energin mgh, där h är höjden relativt en referens, t.ex. havsytans nivå, eller golvet i ett rum. På samma sätt relaterar vi potentialen till nollpotentialen, vilken benämns jord. Det är viktigt att elektriska system har en gemensam jord.

1.3 Spänning

Spänning=potentialskillnad.

Enheten för spänning är volt V. Spänningen betecknas $v(t)$ om den är tidsberoende och V om den är likspänning eller en komplex spänning (se nedan). Spänning och potential brukar numera ha samma beteckning.

Exempel 1
Spänningen i ett ficklampsbatteri är 1.5 V. Det betyder att skillnaden i potential mellan polerna är 1.5 V. ■



Figur 2: Vägguttag.

Exempel 2
Spänningen i ett vanligt vägguttag är 230 V. Det ena hålet är den neutrala ledaren med potentialen noll och det andra är fasen med potentialen

$$v(t) = 230\sqrt{2}\cos(\omega t)\ \mathrm{V}, \tag{1}$$

där $\omega = 2\pi f$ är vinkelfrekvensen och $f = 50$ Hz är frekvensen. Faktorn $\sqrt{2}$ kommer av att 230 V är effektivvärdet, eller rms värdet för spänningen, d.v.s.

$$V_{\text{effektiv}} = V_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (v(t))^2\,\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

där $T = 1/f$ =periodtiden. ■

1.4 Ström

Strömmen är den laddning per tidsenhet som passerar genom en ledning. Den betecknas $i(t)$ om den är tidsberoende och I om den är en likström eller en komplex ström (se nedan). Enheten för ström är ampere (A).

1.5 DC, AC och transienter

DC står för direct current, likström på svenska. Det betyder att spänningar och strömmar är konstanta i tiden.

AC står för alternating current, växelström på svenska, och vanligtvis betecknar det spänningar och strömmar som varierar sinusformat i tiden (tidsharmoniska signaler). En tidsharmonisk spänning ges av

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t + \alpha), \tag{3}$$

där V_0 är amplituden, $\omega = 2\pi f$ är vinkelfrekvensen och α är fasvinkeln.

Spänningar och strömmar som varierar snabbt under en kort tid för att sedan dö ut kallas transienter. Ett exempel är spänningen över en kondensator som vid tiden $t = 0$ börjar laddas ur genom en resistans. Kondensatorns spänningen är då

$$v(t) = V_1 e^{-t/\tau}, \tag{4}$$

där V_1 är den spänning kondensatorn var uppladdad till vid $t = 0$ och τ är tidskonstanten. Vi skall senare se att $\tau = RC$ där R är resistansen och C kondensatorns kapacitans.

1.6 Kirchhoffs lagar

För att matematiskt analysera kretsar behövs Kirchhoffs lagar och sambanden mellan spänning och ström för de komponenter som ingår i kretsarna.

> *Kirchhoffs spänningslag:* Summan av alla potentialförändringar när man går från en punkt i en krets genom en sluten slinga och tillbaka till den punkt man började är noll.

Det är helt analogt med att summan av alla ändringar i potentiell energi för en person som startar i en punkt, går ett varv längs en sluten slinga och kommer tillbaks till utgångspunkten är noll.

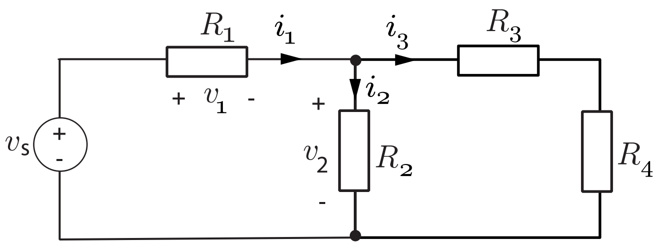
Lagen ovan är ekvivalent med $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ eller $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}l = V_1 + V_2 + ... = 0$ från EMFT-kursen!

> *Kirchhoffs strömlag:* I en knutpunkt (en punkt som sammanbinder fler än två ledningar) i en krets kommer det in lika mycket ström som det går ut.

En analogi är strömmande vatten. I en koppling med tre vattenrör måste det flöda in lika mycket vatten som det flödar ut.

Lagen ovan är ekvivalent med kontinuitetsekvationen $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$ från EMFT-kursen!

Exempel 3
Kirchhoffs lagar tillämpade på kretsen i figur 3 ger



Figur 3: Kirchhoffs lagar.

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 \\ i_1 &= i_2 + i_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Det är viktigt med referensriktningen för strömmen (pilens riktning) och polariteten för spänningarna (+ och - tecknens placering). Ändrar vi referensriktning eller polaritet måste vi byta tecken för motsvarande ström eller spänning i Kirchhoffs lagar.

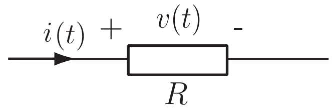
Konvention: Strömmen går från $-$ till $+$ i aktiva element som spänningskällan, medan den går från $+$ till $-$ i passiva element som motstånden, som förbrukar energi. ■

2 Samband mellan v och i

Vi behandlar här sambanden mellan spänning och ström för resistorn, kondensatorn och spolen. Utöver dessa tre komponenter är dioden och transistorn mycket vanliga komponenter i kretsar. En diod är en likriktare, den släpper igenom ström åt ena hållet, men stoppar den åt andra hållet. En transistor används i analoga kretsar som förstärkare och i digitala kretsar som switch (en styrspänning kan få transistorn att gå från att vara korsluten till att vara ett avbrott). Vi behandlar inte dioden och transistorn här.

2.1 Resistorn

För resistorn gäller Ohms lag

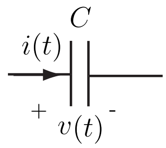


Figur 4: Symbolen för en resistans R. Strömmen går in vid + och ut vid -.

$$v(t) = Ri(t), \tag{6}$$

där R är resistansen, v är spänningen över resistorn och i är strömmen genom resistorn. Det är viktigt med referensriktningen på strömmen. Strömmen skall gå in vid + och ut vid $-$. Skulle den gå åt andra hållet måste vi kompensera med ett minustecken i Ohms lag. Resistans mäts i ohm (Ω) vilket är detsamma som V/A.

2.2 Kondensatorn



Figur 5: Symbolen för en kondensator C. Strömmen går in vid + och ut vid -.

En kondensator består av två ledande plattor separerade med ett isolerande skikt. Kapacitansen C för en kondensator anger dess förmåga att lagra laddningar vid en viss spänning. Sambandet är

$$q(t) = Cv(t), \tag{7}$$

där q är laddningen på den positiva plattan och $-q$ laddningen på den negativa plattan (totala laddningen på kondensatorn är noll). Sambandet säger alltså hur mycket laddning q som kan laddas upp för ett givet $v(t)$, och det beror på egenskapen C, materialets kapacitet att lagra upp laddningar.

Enheten för kapacitans är farad (F). Eftersom ström är laddning per tidsenhet kan vi derivera (7) och få

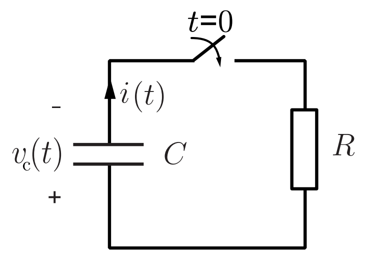
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{8}$$

Integration från tiden 0 till t ger sambandet

$$v(t) - v(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')\,\mathrm{d}t'. \tag{9}$$

Relation (8) är mer praktisk att använda i beräkningar än (9), som innehåller en integral.

Exempel 4



Figur 6: Kondensatorn C laddas ur genom resistansen R.

Antag att en kondensator är uppladdad till spänningen V_0. Vid tiden $t = 0$ kopplas en resistans R in i serie med kondensatorn, enligt figur 6. Det ger

$$v_c(t) = -Ri(t), \tag{10}$$

där minustecknet är en konekvens av att strömmen går in vid - och ut vid + på motståndet. Insättning av (7) ger differentialekvationen för kondensatorspänningen

$$\begin{aligned} &\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = 0, \ t > 0 \\ &v_c(0) = V_0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ekvationen med begynnelsevillkoret har en entydig lösning för $t > 0$. Standardmetoder för ordinära differentialekvationer (t.e.x. integrerande faktor) ger

$$v_c(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \ t \geq 0 \tag{12}$$

där $\tau = RC$ =tidskonstanten. ∎

2.3 Induktorn (spolen)

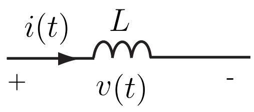
En induktor består oftast av en spole av isolerad metalltråd. Induktansen för en slinga med ett varv och ström $i(t)$ är definerad av

$$\Phi(t) = Li(t), \tag{13}$$

där Φ är det magnetiska flödet genom slingan. Induktansen L är alltså ett mått på magnetiersingsförmågan i materialet, och säger hur stort magnetiskt flöde Φ man kan få för en given ström $i(t)$ genom slingan. Spänningen som induceras över en spole ges av induktionslagen:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}. \tag{14}$$

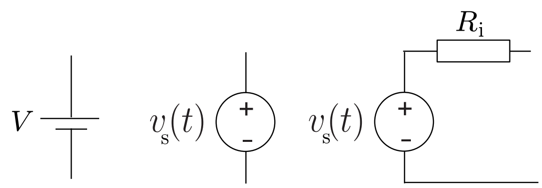
Observera att strömmen går in vid + och ut vid -. Byter vi referensriktning på strömmen måste det kompenseras med ett minustecken i (14).



Figur 7: Symbolen för en induktans L. Strömmen går in vid + och ut vid -.

2.4 Spänningskällor

Spänningen för en ideal spänningskälla är oberoende av kretsen som är inkopplad till källan. I figuren 8 visas två symboler för spänningskällor. Den vänstra anger att den är en likspänningskälla medan den mittersta används för spänningskällor med tidsberoende spänningar.



Figur 8: Symboler för en spänningskälla. Den vänstra används för likspänningar, den mittersta för godtyckliga tidsberoenden. Den högra kretsen är en modell för en verklig spänningskälla. Resistansen R_i är källans inre resistans.

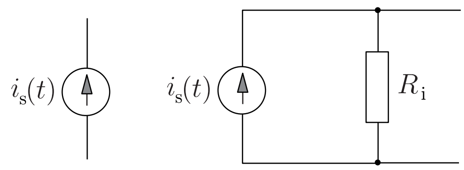
De spänningskällor vi använder i vardagen är inte ideala. De kan inte leverera samma spänning oavsett vilken krets man kopplar in. Kopplar vi en tillräckligt liten resistans kommer spänningen från källan att sjunka. Den högra kretsen i figur 8 är kretsmodellen för en verklig spänningskälla. Den består av en ideal spänningskälla med spänning v_s i serie med en resistans R_i, som kallas för källans inre resistans. Både R_i och v_s har konstanta värden oavsett vad vi kopplar in till källan.

Den inre resistansen är ett kvalitetsmått för batterier. En låg inre resistans gör att inte lika mycket effekt förbrukas inne i batteriet, utan istället kan levereras till kretsen. Den inre resistansen för ett 1.5 V ficklampsbatteri är 2-3 Ω medan ett bilbatteri har en inre resistans av omkring 0.01 Ω.

2.5 Strömkällor

Strömmen för en ideal strömkälla är oberoende av kretsen som är kopplad till källan. Strömkällor är betydligt mer ovanliga än spänningskällor och de används framförallt i modeller för vissa kretselement, såsom transistorer.

Figuren visar kretsmodellen för ideal och en verklig strömkälla. Den verkliga strömkällan består av en ideal strömkälla parallellkopplad med en inre resistans.

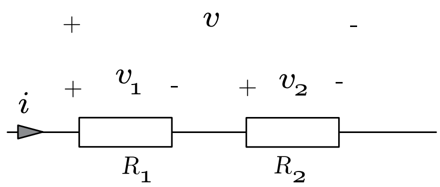


Figur 9: Den vänstra figuren visar en ideal strömkälla och den högra modellen för en verklig strömkälla. Resistansen R_i är källans inre resistans.

3 Analys av kretsar

Det finns systematiska sätt att analysera linjära kretsar med godtyckligt antal komponenter och källor. Den vanligaste metoden är nodanalys som bygger på Kirchhoffs strömlag. Den intresserade kan läsa kan läsa om denna på en länk som läggs på kursens hemsida. Mindre kretsar med ett fåtal komponenter kan analyseras med parallell- och seriekoppling, spänningsdelning och strömgrening. Här ger vi några enkla exempel:

Exempel 5



Figur 10: Två seriekopplade resistanser. Totala resistansen är $R_1 + R_2$.

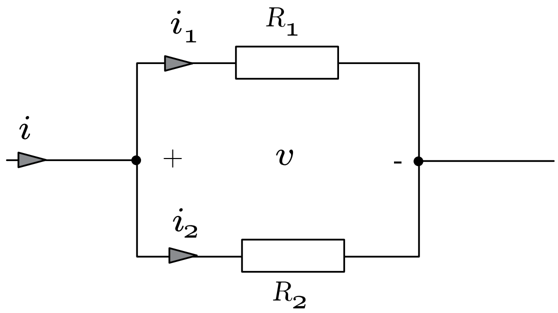
Figuren visar två seriekopplade resistanser. Spänningen över reistanserna är $v = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$. Den totala resistansen är alltså $R_{\text{tot}} = R_1 + R_2$ vid seriekoppling. $\blacksquare$

Exempel 6

Figuren visar två parallellkopplade resistanser. Strömmen in är $i = i_1 + i_2 = \dfrac{v}{R_1} + \dfrac{v}{R_2} = v\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$. Totala resistansen är alltså $\dfrac{1}{R_{\text{tot}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$. Oftast skrivs detta

$$R_{\text{tot}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{15}$$

$\blacksquare$



Figur 11: Två parallellkopplade resistanser. Totala resistansen är $\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

Exempel 7
För två parallellkopplade kondensatorer C_1 och C_2, gäller också att $i = i_1 + i_2$. Då kan man genom att använda sambandet (8) finna den totala kapacitansen C enligt

$$i = i_1 + i_2 = C_1\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

Det ses enkelt att

$$C = C_1 + C_2 \tag{17}$$

d.v.s. tvärtemot fallet med resistanser. Seriekoppling av kondensatorer å andra sidan, innebär att $v = v_1 + v_2$, och då får vi

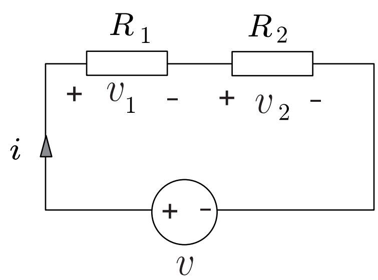
$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{C_1}i + \frac{1}{C_2}i = \frac{1}{C}i \tag{18}$$

eller

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}. \tag{19}$$

Det blir alltså tvärtemot fallet med resistanser. ∎

Exempel 8



Figur 12: Spänningen v delas up i v_1 och v_2.

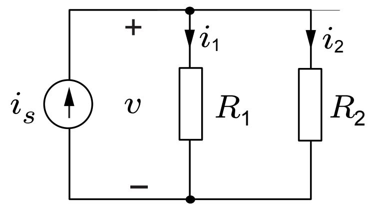
Spänningen över R_1 fås som $v_1 = R_1 i = R_1\dfrac{v}{R_1+R_2}$. Det gäller alltså att

$$v_1 = v\frac{R_1}{R_1+R_2}. \tag{20}$$

Formeln kallas spänningsdelningsformeln.

$\blacksquare$

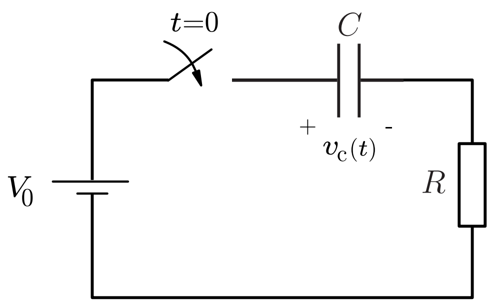
Exempel 9



Figur 13: Strömmen i_s delas up i i_1 och i_2.

Strömmen genom R_1 ges av $i_1 = \dfrac{v}{R_1}$ där $v = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} v$. Det ger strömgreningsformeln $i_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} i_\text{s}$. $\blacksquare$

Exempel 10



Figur 14: Uppladdning av kondensator.

Kondensatorn är oladdad vid $t = 0$. Då kontakten sluts laddas den upp. För $t \geq 0$ gäller

$$V_0 = v_\text{c}(t) + Ri(t), \tag{21}$$

där $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}v_\text{c}(t)}{\mathrm{d}t}$. Det ger följande problem för $t \geq 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}v_\text{c}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} v_\text{c}(t) = \frac{1}{RC} V_0 \\ &v_\text{c}(0) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Standardmetoder för ordinära differentialekvationer (t.ex. integrerande faktor) ger lösningen för $t > 0$

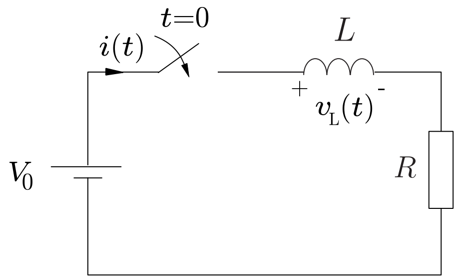
$$v_\text{c}(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \tag{23}$$

där $\tau = RC$ =tidkonstanten. Som synes är spänningen över kondensatorn kontinuerlig vid $t = 0$ medan strömmen är diskontinuerlig

$$i(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ C\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{c}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} & t > 0. \end{cases} \tag{24}$$

∎

Exempel 11



Figur 15: Inkoppling av spole.

Spolen är strömlös vid $t = 0$. Kontakten sluts vid $t = 0$ och för $t \geq 0$ gäller

$$\begin{aligned} V_0 &= Ri + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \\ i(0) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Lösningen är

$$i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \tag{26}$$

där $\tau = L/R$ = tidskonstanten. För $t > 0$ är spänningen över spolen

$$v_\mathrm{L}(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 e^{-t/\tau}. \tag{27}$$

Som synes gör spänningen ett hopp vid $t = 0$ medan strömmen är kontinuerlig. ∎

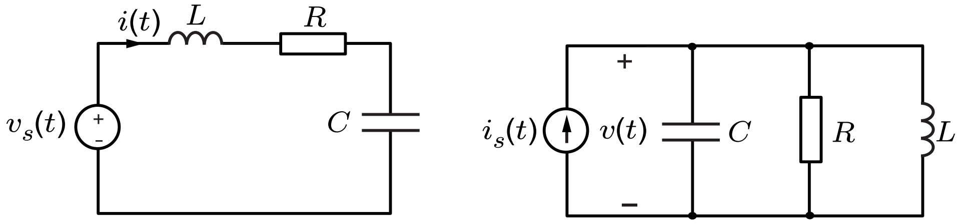
4 Linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter

Resistorn ger proportionalitet mellan spänning och ström, spolen mellan spänning och derivatan av strömmen och kondensatorn mellan spänning och integralen av strömmen. Med spännings- och strömkällor, resistanser, induktanser och kondensatorer kan vi därmed bygga elektriska kretsar som realiserar godtyckliga linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Exempel 12
Den ordinära differentialekvationen

$$y''(t) + \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t), \tag{28}$$

med källtermen $f(t)$, realiseras av en serieresonanskrets, eller en parallellresonanskrets, se figur 16.



Figur 16: Serie- och parallellresonanskrets.

För serieresonanskretsen är strömmen $i(t)$ den sökta funktionen. Kirchhoffs spänningslag ger

$$v_{\mathrm{s}}(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + v_{\mathrm{C}}(t). \tag{29}$$

Derivering och relationen $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{C}}(t)}{\mathrm{d}t}$ leder till

$$i''(t) + \alpha i'(t) + \beta i(t) = f(t), \tag{30}$$

där $\alpha = R/L$, $\beta = 1/(LC)$ och $f(t) = v_{\mathrm{s}}'(t)/L$.

För parallellresonanskretsen låter vi spänningen $v(t)$ vara den sökta funktionen. Kirchhoffs strömlag ger

$$i_{\mathrm{s}}(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}v(t) + i_{\mathrm{L}}(t). \tag{31}$$

Derivering och relationen $v(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i_{\mathrm{L}}(t)}{\mathrm{d}t}$ leder till

$$v''(t) + \alpha v'(t) + \beta v(t) = f(t), \tag{32}$$

där $\alpha = 1/(RC)$, $\beta = 1/(LC)$ och $f(t) = i_{\mathrm{s}}'(t)/C$. ∎

5 Tidsharmoniska signaler

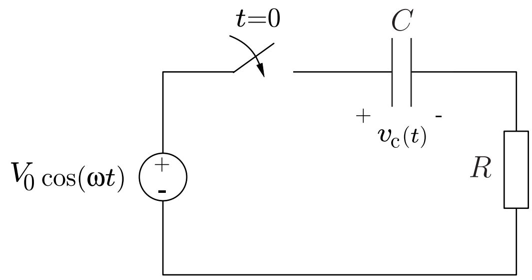
Tidsharmoniska signaler har tidsberoenden

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{33}$$

där V_0 är toppvärdet (amplituden), ω är vinkelfrekvensen och α är fasvinkeln. Tidsharmoniska strömmar brukar kallas AC (“alternating current”). Vad är fördelarna med AC-ström, jämfört med DC-ström?

- AC-ström möjliggör, genom induktionslagen, transformering från högre till lägre spänningar.
- Detta gör att AC-ström kan överföras på betydligt längre avstånd än DC-ström, vilket är kritiskt vid överföring över långa avstånd (blir mindre förluster).
- Ström genereras i kraftverk ofta genom roterande anordningar, vilka är naturligt tidsharmoniska.

Vid analys av tidsharmoniska system antar man att källorna varit påslagna under såpass lång tid att alla transienter (se exemplen i föregående avsnitt) dött ut. Vi tar ett enkelt exempel:



Figur 17: Tidsharmonisk källa kopplas in vid $t = 0$.

Antag att spänningskällan ger spänningen $v_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$. Bestäm spänningen $v_c(t)$ över kondensatorn för $t > 0$.

Kirchhoffs spänningslag ger

$$v_s(t) = Ri(t) + v_c(t). \tag{34}$$

Strömmen ges, enligt (9) av $i = C\dfrac{dv_c}{dt}$. Det ger en ordinär differentialekvation för v_c

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = V_0 \cos(\omega t). \tag{35}$$

Vi kan lösa denna ekvation entydigt för $t \geq t_0$ om vi får ett begynnelsevärde för $v_c(t)$ för någon tid t_0. Den allmänna lösningen m.h.a. metoder från Analys 1 skrivs $v_c(t) = v_{part}(t) + v_{hom}(t)$, där $v_{part}(t)$ är partikulärlösningen som tar hand om källtermen, medan $v_{hom}(t)$ är den homogena lösningen som ser till att begynnelsevillkoret är uppfyllt. De homogena lösningen är, om vi väljer enklast möjliga partikulärlösning, en transient som dör ut exponentiellt. Vi är oftast inte intresserade av denna utan målet är den tidsharmoniska delen av lösningen, d.v.s. partikulärlösningen. Med jω-metoden, som beskrivs nedan, kan partikulärlösningen bestämmas utan att behöva ställa upp differentialekvationen.

5.1 jω-metoden

jω-metoden använder sig av komplexa spänningar och strömmar. I princip är det samma metod som är känd från matematiken när källtermen är en sinusformad funktion. Där ansätts en partikulärlösning med sinusformat tidsberoende enligt

$$v_{\mathrm{c}}(t) = \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{c}} e^{\mathrm{j}\omega t}\}, \tag{36}$$

där V_{c} är ett komplext tal (en komplex spänning). Insättning i (35) ger

$$\mathrm{Re}\{RC\mathrm{j}\omega V_{\mathrm{c}} e^{\mathrm{j}\omega t}\} + \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{c}} e^{\mathrm{j}\omega t}\} = \mathrm{Re}\{V_0 e^{\mathrm{j}\omega t}\}. \tag{37}$$

Denna kan skrivas

$$\mathrm{Re}\{(RC\mathrm{j}\omega V_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{c}} - V_0) e^{\mathrm{j}\omega t}\} = 0. \tag{38}$$

Ekvationen är uppfylld om

$$RC\mathrm{j}\omega V_{\mathrm{c}} + V_{\mathrm{c}} - V_0 = 0. \tag{39}$$

Det ger den komplexa spänningen

$$V_{\mathrm{c}} = \frac{V_0}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-\mathrm{j}\arctan(\omega RC)}, \tag{40}$$

där vi använt Eulers formel. Enligt (36) är motsvarande tidsberoende spänning

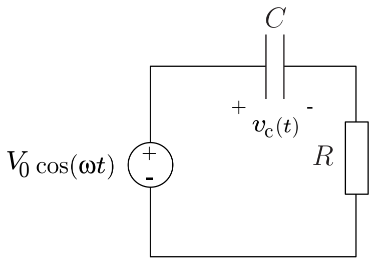
$$v_{\mathrm{c}}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)). \tag{41}$$

Detta kan snabbas upp genom att direkt inflöra komplexa spänningar och strömmar $V = |V| e^{\mathrm{j}\arg V}$ och $I = |I| e^{\mathrm{j}\arg I}$. Sambanden mellan de komplexa spänningarna och strömmarna kan för varje komponent, eller för sammankopplade komponenter, alltid skrivas

$$V = ZI, \tag{42}$$

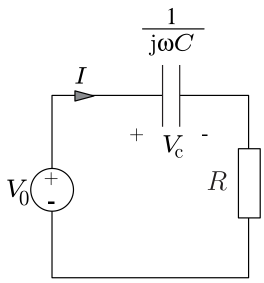
där $Z = R + \mathrm{j}X$ är impedansen (R kallas resistansen och X reaktansen). Det är enkelt att se att en induktans har impedansen jωL, en kondensator har impedansen $\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ och en resistans har impedansen R. Man ritar upp kretsen med de komplexa spänningarna och strömmarna och med impedanserna för varje kretskomponent. Kretsen analyseras sedan på exakt samma sätt som de resistiva kretsarna, d.v.s, alla komponenter kan betraktas som "resistanser" och man slipper hantera de differentialekvationer som annars skulle uppstått. Här ges några exempel:

Exempel 13



Figur 18: Tidsharmonisk krets i tidsplanet.

Vi bestämmer $v_c(t)$ för RC-kretsen i figur 18. Inför den komplexa spänningen $V_s = V_0$ för spänningen $v_s(t) = V_0 \cos(\omega t)$, den komplexa spänning V_c över kondensatorn och impedanserna $\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ för kondensatorn och R för resistansen. Det transformerar kretsen till frekvensplanet, se figur 19. Den komplexa V_c ges av



Figur 19: Tidsharmonisk krets i frekvensplanet.

spänningsdelningsformeln, se (20):

$$V_c = V_0 \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = V_0 \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{-\mathrm{j}\arctan(\omega RC)}. \tag{43}$$

Den tidsberoende spänningen är, enligt transformen (36),

$$v_c(t) = \mathrm{Re}\{V_c e^{\mathrm{j}\omega t}\} = V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC)). \tag{44}$$

Spänningen över kondensatorn är alltså dämpad med faktorn $\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ och fasförskjuten vinkeln $\arctan(\omega RC)$ jämfört med spänningen över källan. När $\omega \to 0$ blir kondenstorn ett avbrott (oändlig impedans, som att ledningen är bruten) och $v_c(t) = v_s(t)$. När $\omega \to \infty$ blir kondensatorn kortsluten (noll impedans, strömmen passerar förbi som om det inte varit något där) och $v_c(t) = 0$.

På samma sätt kan vi få ut spänningen över resistensen. Den blir

$$v_{\mathrm{R}}(t) = V_0 \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \pi/2 - \arctan(\omega RC)). \tag{45}$$

$\blacksquare$