



Vektoranalys III

Mariana Dalarsson

Institutionen för elektro- och informationsteknik

1 Gauss sats — divergenssatsen

Exempel på användning av Gauss sats

2 Stokes sats

Exempel på användning av Stokes sats

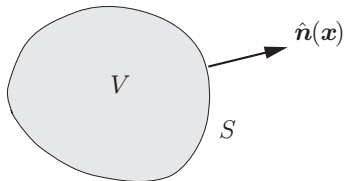
3 Övningar

Svar

Lösningsskisser

Gauss sats — divergenssatsen

Låt S vara en **sluten** (styckvis glatt) yta med **utåtriktad** normal $\hat{\mathbf{n}}$, som begränsar ett område V , samt \mathbf{A} ett **kontinuerligt differentierbart** vektorfält i V (mer precist i en öppen omgivning som innehåller V och S)



$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

jämför integration in \mathbb{R} : $\int_a^b \frac{df(x)}{dx} dx = f(b) - f(a)$

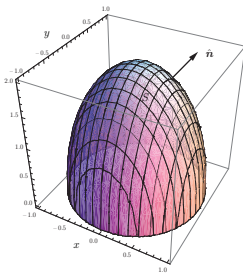
Exempel

Beräkna normalytintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ av vektorfältet \mathbf{F} givet av (sfäriska koordinater r, θ, ϕ)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r^2}$$

över ytan S som definieras av (Prolat sfäroid, halvaxlar 1,1,2)

$$S = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1, z > 0\}$$



Lösning I

Vi inser att ytan S är alltför komplicerad att parameterframställa, så vi undersöker om vi kan välja en annan yta för integration. Vi konstaterar:

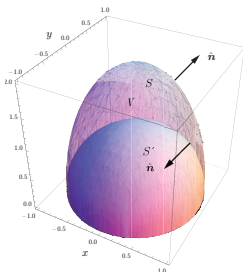
- ▶ Vektorfältet är singulärt i origo (måste undvikas!)
- ▶ Beräkna $\nabla \cdot \mathbf{F}$ i sfäriska koordinater, $r > 0$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (1) = 0\end{aligned}$$

Lösning II

Vi sluter ytan S med en halvsfär S' i övre halvrymden, för att undvika origo

$$S' = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0\}$$



- ▶ Slutet yta: S_1 bestående av S och S' med normalriktningar givna enligt figur
- ▶ $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ i volymen V , som har S_1 som begränsningsyta

Lösning III

Tillämpa Gauss sats på volymen V som har S_1 som begränsningsyta

$$\begin{aligned}\iint_{S+S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dS = 0 \\ \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

Lösning IV

Vi beräknar enkelt normalytintegralen på S' (ytmått $d\mathbf{S} = -\hat{\mathbf{r}}r^2 \sin\theta d\theta d\phi$, $r = 1$)

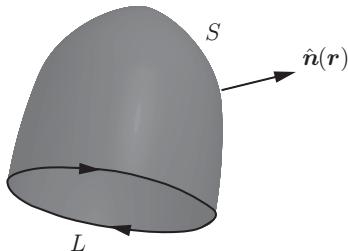
$$\begin{aligned}\iint_{S'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}} r^2 \sin\theta d\phi \right) d\theta \\ &= -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 2\pi \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} = -2\pi\end{aligned}$$

Till slut

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$

Stokes sats

Låt S vara en (styckvis glatt) yta med randkurva L , och låt omloppsriktningen på L vara relaterad till ytan S :s ytnormal $\hat{\mathbf{n}}$ med högerregeln, samt \mathbf{A} ett **kontinuerligt differentierbart** vektorfält på S (mer precist i en öppen omgivning som innehåller S och L)



$$\int_L \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

Gäller för alla ytor S som har L som randkurva

Obs! Ytan S måste ha två sidor, jämför Möbius-band

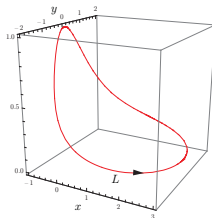
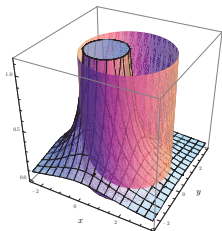
Exempel

Beräkna tangentlinjeintegralen $\int_L \mathbf{F} \cdot d\ell$ av vektorfältet \mathbf{F} givet av (sfäriska koordinater r, θ, ϕ)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{r}{a^2 \sinh r/a} + \hat{\phi} \frac{\sin \phi/2}{r \sin \theta}$$

över kurvan L som definieras av skärningen mellan ytorna (omloppsriktning moturs, sett projicerad i x - y -planet)

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 & \text{cirkulär cylinder (radie 2, axel parallell med } \hat{\mathbf{z}}) \\ r_c^2 = x^2 + y^2 = 1/z \end{cases}$$



Lösning I

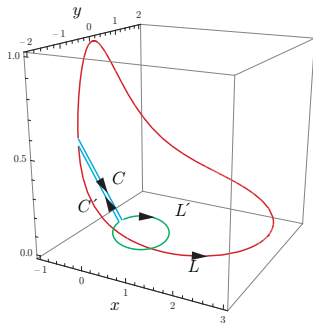
Kurvan L är komplicerad att parameterframställa (vanligt misstag att studenter försöker och fastnar!). Vi undersöker om vi kan välja en annan integrationsväg. Vi konstaterar

- ▶ Vektorfältet är singulärt längs z -axeln (måste undvikas!)
- ▶ Beräkna $\nabla \times \mathbf{F}$ i sfäriska koordinater, $r_c > 0$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\sin \phi / 2}{r} \right) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{a^2 \sinh r/a} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin \phi / 2}{\sin \theta} \right) \right) \\ &\quad - \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{a^2 \sinh r/a} \right) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Lösning II

Vi förenklar integrationsvägen till en cirkel i x - y -planet
m.h.a. Stokes sats $L' = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}$



- ▶ Slutna kurva γ bestående av L , C , L' och C' med givna rikningar
- ▶ $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ på en begränsningsyta S som har γ som rand

Lösning III

Tillämpa Stokes sats på begränsningsytan S som har γ som rand

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_L \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_{L'} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Tangentlinjeintegralerna längs C och C' tar ut varann

Lösning IV

Vi beräknar tangentlinjeintegralen längs L' (linjemått $d\ell = r_c \hat{\phi} d\phi$, $\theta = \pi/2$, $r_c = b$)

$$\begin{aligned}\int_{L'} \mathbf{F} \cdot d\ell &= \int_{2\pi}^0 \mathbf{F} \cdot b \hat{\phi} d\phi = - \int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi/2}{r \sin \theta} b d\phi \\ &= - \int_0^{2\pi} \sin \phi/2 d\phi = 2 \cos \phi/2 \Big|_0^{2\pi} = -4\end{aligned}$$

oberoende av b

Till slut

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\ell = - \int_{L'} \mathbf{F} \cdot d\ell = 4$$

Övningar Gauss och Stokes satser

1. Beräkna normalytintegralen $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ av vektorfältet \mathbf{F}

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{x} \frac{xz}{x^2 + y^2} + \hat{y} \frac{yz}{x^2 + y^2}$$

över ytan S , som är den del av hyperboloiden $S_1 = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 - z^2 = a^2\}$, som begränsas av området mellan planen

$$\begin{cases} S_2 = \{\mathbf{r} : z = -a\} \\ S_3 = \{\mathbf{r} : z = 2a\} \end{cases}$$

Ytnormalen är riktad från z-axeln.

2. Beräkna tangentlinjeintegralen $\int_L \mathbf{F} \cdot d\ell$ av vektorfältet \mathbf{F} (sfäriska koordinater r, θ, ϕ)

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{r} \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \hat{\phi} \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta}\right)$$

Kurvan L definieras av skärningen mellan ytorna (omloppsriktning moturs, sett projicerad i x-y-planet)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2 & \text{cirkulär cylinder (radie } 2a, \text{ axel parallell med } \hat{z}) \\ x^2 + (y + a)^2 + z^2 = 9a^2, z > 0 & \text{halvsfär, radie } 3a, \text{ centrum i } (0, -a, 0) \end{cases}$$

Övningar Gauss och Stokes satser — svar

1. $3\pi a^2$
2. $6\pi a$

Lösningsskiss 1

Skriv om vektorfältet m.h.a. enhetsvektorerna i cylinderkoordinater

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{x}{x^2 + y^2} + \hat{\mathbf{y}} \frac{y}{x^2 + y^2} \right) = z \frac{\mathbf{r}_c}{r_c^2} = \frac{z}{r_c} \hat{\mathbf{r}}_c$$

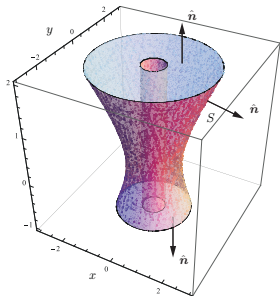
Beräkna divergensen av \mathbf{F} i cylinderkoordinater. För $r_c > 0$ gäller

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} (r_c F_c) + \frac{1}{r_c} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} (z) = 0$$

Lösningsskiss 1, forts.

Slut ytan S med de tre delarna
($0 < b < a$)

$$\begin{cases} S'_2 = \{\mathbf{r} : z = 2a, b < r_c < \sqrt{5}a\} \\ S'_3 = \{\mathbf{r} : z = -a, b < r_c < \sqrt{2}a\} \\ S_4 = \{\mathbf{r} : -a < z < 2a, r_c = b\} \end{cases}$$



Normalytintegralen blir, m.h.a. Gauss sats (integralerna över S'_2 och S'_3 bidrar ej, då ytorna är normala mot \mathbf{F})

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= - \iint_{S'_2 + S'_3 + S_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{-a}^{2a} \left(\int_0^{2\pi} \frac{z}{r_c} r_c d\phi \right) dz = 2\pi \int_{-a}^{2a} z dz = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Lösningsskiss 2

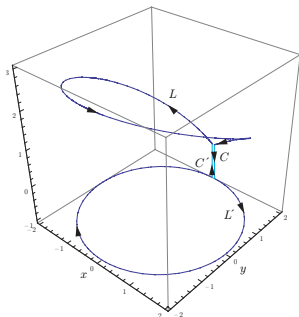
Beräkna rotationen av vektorfältet i sfäriska koordinater. För $r_c > 0$ gäller

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\phi) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r F_\phi)}{\partial r} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta} \right) \right) \right) \\ &\quad + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \frac{r}{a}}{\partial \phi} - \frac{\partial \left(r \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta} \right) \right)}{\partial r} \right) - \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \frac{r}{a}}{\partial \theta} \right) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta}{r_c} = \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r_c}\end{aligned}$$

Lösningsskiss 2, forts.

Låt L' beteckna kurvan

$$L' = \{\mathbf{r} : x^2 + y^2 = 4a^2, z = -1\}$$



och använd Stokes sats på den slutna kurvan $L + C + L' + C'$, och välj yta S som "mantelytan" med L , C , L' och C' som ränder. På S är $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}_c$

$$\int_{L+C+L'+C'} \mathbf{F} \cdot d\ell = \iiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \iiint_S \frac{\hat{\mathbf{z}}}{r_c} \cdot \hat{\mathbf{r}}_c dS = 0$$

Lösningsskiss 2, forts.

Detta ger (linjeintegralerna längs C och C' tar ut varann)

$$\begin{aligned}\int_L \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= - \int_{L'} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot \hat{\phi} 2a d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{2a}\right) 2a d\phi = 6\pi a\end{aligned}$$