Vektoranalys II

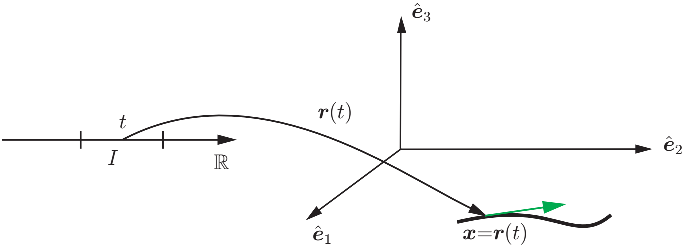
Mariana Dalarsson

Institutionen för elektro- och informationsteknik

Översikt

1. **Kurvor och ytor, linje- och yt-mått**
2. **Integraler, Kap. 1.3**
   - Linjeintegraler
   - Ytintegraler
   - Volymsintegraler
3. **Övningar**
   - Svar
   - Lösningsskisser

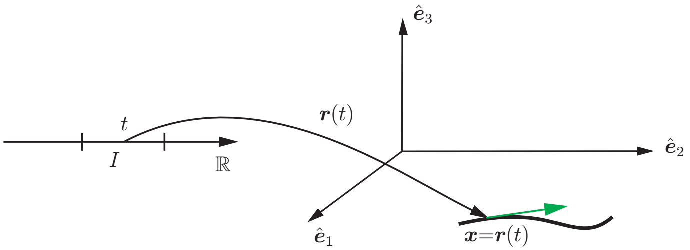
Kurvor



Värdemängden av en kontinuerlig vektorvärd funktion $\boldsymbol{r}(t)$ definierad på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ kallas en kurva L i $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in I$$

Kurvor



Värdemängden av en kontinuerlig vektorvärd funktion $\boldsymbol{r}(t)$ definierad på ett intervall $I \subset \mathbb{R}$ kallas en kurva L i $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(t), \quad t \in I$$

En **tangentvektor** till kurvan L i punkten $\boldsymbol{r}(t)$ ges av

$$\boldsymbol{r}'(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \text{ (grön vektor)}$$

Kurvan kallas **glatt** om $\boldsymbol{r}'(t) \neq \boldsymbol{0}$, $t \in I$

Linjemått (bågmått)

Låt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(t)$, definierad på ett intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, framställa en kurva L. Tangentvektorn $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ (enhetsvektor) ges av

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}, \quad t \in [a, b]$$

Linjemått (bågmått)

Låt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(t)$, definierad på ett intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$, framställa en kurva L. Tangentvektorn $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ (enhetsvektor) ges av

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{|\boldsymbol{r}'(t)|}, \quad t \in [a, b]$$

Två olika linjemått, $\mathrm{d}\ell$ och $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, (skalärvärt respektive vektorvärt) förekommer, och ges av

$$\mathrm{d}\ell = \left| \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \right| \mathrm{d}t = \left| \boldsymbol{r}'(t) \right| \mathrm{d}t$$

och

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \hat{\boldsymbol{\tau}}(t) \left| \boldsymbol{r}'(t) \right| \mathrm{d}t = \hat{\boldsymbol{\tau}}(t)\,\mathrm{d}\ell$$

Linjeintegraler I

Tre huvudtyper av linjeintegraler förekommer i kursen

1. Tangentlinjeintegral, skalärvärd

$$\int_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_L \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} \, \mathrm{d}\ell = \int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \, \mathrm{d}t$$

2. Skalärvärd linjeintegral

$$\int_L f \, \mathrm{d}\ell = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \left| \boldsymbol{r}'(t) \right| \, \mathrm{d}t$$

Linjeintegraler II

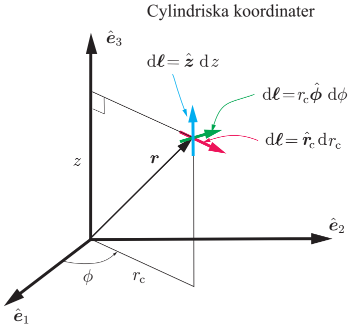
3. Vektorvärd linjeintegral

$$\int_L f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

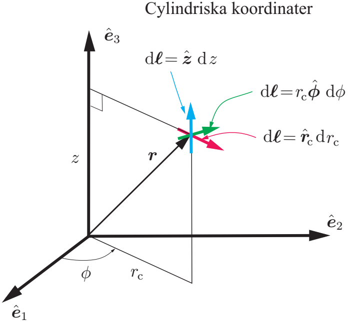
$$\int_L \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}\ell = \int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\left|\boldsymbol{r}'(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

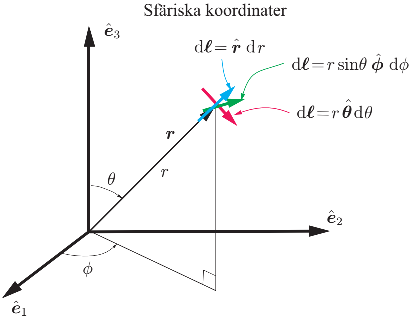
$$\int_L \boldsymbol{A}\times\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t))\times\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t$$

Några vanliga linjemått



Några vanliga linjemått





$$d\boldsymbol{l} = dr_c\, \hat{\boldsymbol{r}}_c + r_c\, d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\, \hat{\boldsymbol{z}} \quad \text{(cylindriska)}$$

$$d\boldsymbol{l} = d\boldsymbol{r}\, \hat{\boldsymbol{r}} + r d\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin\theta d\phi\, \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{(sfäriska)}$$

Samband mellan basvektorer I

Allmäna samband för basvektorer:

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|}\,,\ \hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}\,,\ \hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}\right|}$$

Exempel: Givet ortsvektorn i sfäriska koordinater

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

härled basvektorn $\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}}$.

Samband mellan basvektorer II

Lösning: Vi vet att

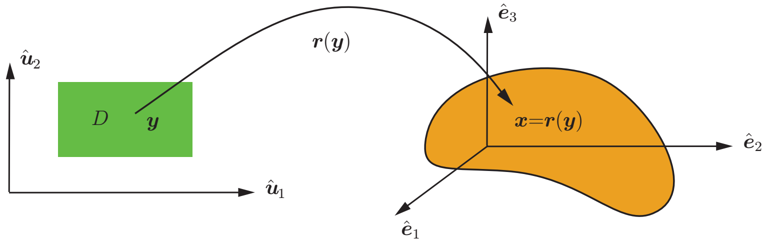
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} = -r \sin\theta \sin\phi \hat{\boldsymbol{x}} + r \sin\theta \cos\phi \hat{\boldsymbol{y}}$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right| = r \sin\theta \sqrt{\sin^2\phi + \cos^2\phi} = r \sin\theta \implies$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\right|} = -\sin\phi \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi \hat{\boldsymbol{y}} \quad \text{v.s.v.}$$

Prova gärna att själva härleda motsvarande resultat för $\hat{\boldsymbol{r}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ uttryckta i de kartesiska basvektorerna!

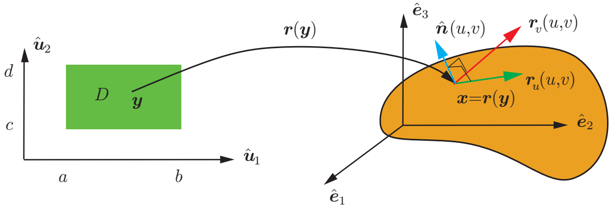
Ytor



Värdemängden av en kontinuerlig vektorvärd funktion $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})$ definierad på ett område $D \subset \mathbb{R}^2$ kallas en yta S i $\mathbb{R}^3$

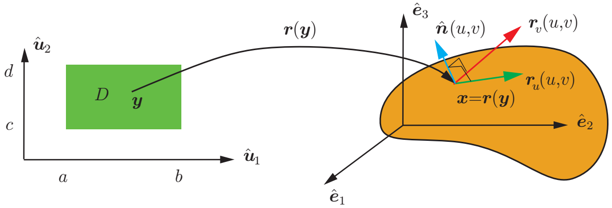
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in D$$

Ytor och normalvektorer



Låt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r}(u, v)$, definierad på ett område $(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, framställa en yta S.

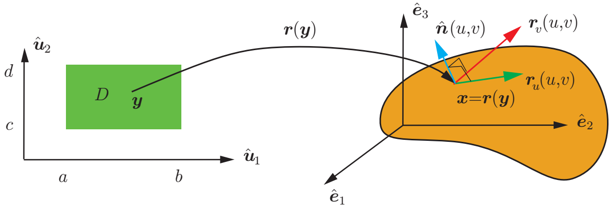
Ytor och normalvektorer



Låt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r}(u, v)$, definierad på ett område $(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, framställa en yta S. Två tangentvektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ till ytan kan definieras

$$\boldsymbol{r}_u(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \boldsymbol{r}_v(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

Ytor och normalvektorer



Låt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r}(u, v)$, definierad på ett område $(u, v) \in D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, framställa en yta S.
Två tangentvektorer $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ till ytan kan definieras

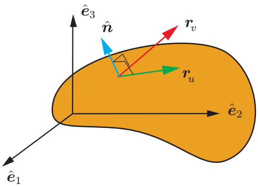
$$\boldsymbol{r}_u(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial u}, \quad \boldsymbol{r}_v(u, v) = \frac{\partial \boldsymbol{r}(u, v)}{\partial v}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

En ytnormal $\hat{\boldsymbol{n}}$ (enhetsvektor) ges av

$$\hat{\boldsymbol{n}}(u, v) = \frac{\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)}{|\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v)|}, \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d]$$

Ytan kallas **glatt** om $\boldsymbol{r}_u(u, v) \times \boldsymbol{r}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$

Ytmått



Två olika ytmått, $\mathrm{d}S$ och $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$, (skalärvärt respektive vektorvärt) förekommer, och ges av

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

och

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \hat{\boldsymbol{n}}(u,v)\,|\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \hat{\boldsymbol{n}}(u,v)\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

Ytintegraler I

Tre huvudtyper av ytintegraler förekommer i kursen

1. Normalytintegral, skalärvärd

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$
$$= \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(u,v) \, |\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)| \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

Ytintegraler I

Tre huvudtyper av ytintegraler förekommer i kursen

1. Normalytintegral, skalärvärd

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$
$$= \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v)) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(u,v) \, |\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

2. Skalärvärd ytintegral

$$\iint_S f \, \mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v)) \, |\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(\boldsymbol{r}(u,v)) \, |\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)| \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u$$

3. Vektorvärd ytintegral

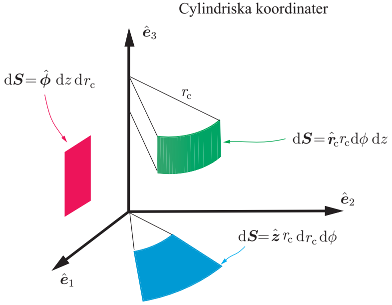
$$\iint_S f \,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S f \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v) \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\hat{\boldsymbol{n}}(u,v) \left|\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)\right| \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(\boldsymbol{r}(u,v))\hat{\boldsymbol{n}}(u,v) \left|\boldsymbol{r}_u(u,v) \times \boldsymbol{r}_v(u,v)\right| \,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u$$

3. Vektorvärd ytintegral

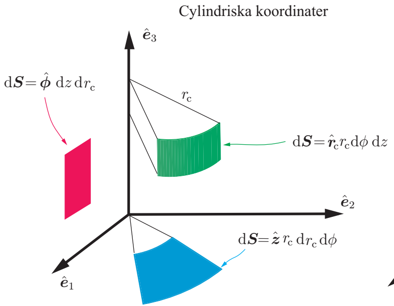
$$\iint_S f\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S f\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \iint_D f(\boldsymbol{r}(u,v))\hat{\boldsymbol{n}}(u,v)\left|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_a^b\left(\int_c^d f(\boldsymbol{r}(u,v))\hat{\boldsymbol{n}}(u,v)\left|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)\right|\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

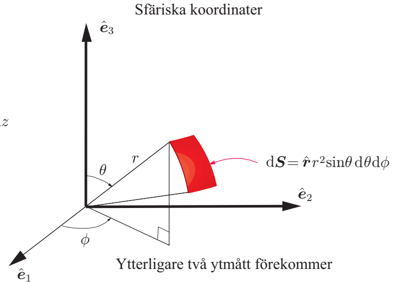
$$\iint_S \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}S = \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\left|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)\right|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \int_a^b\left(\int_c^d \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u,v))\left|\boldsymbol{r}_u(u,v)\times\boldsymbol{r}_v(u,v)\right|\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$$

Några vanliga ytmått



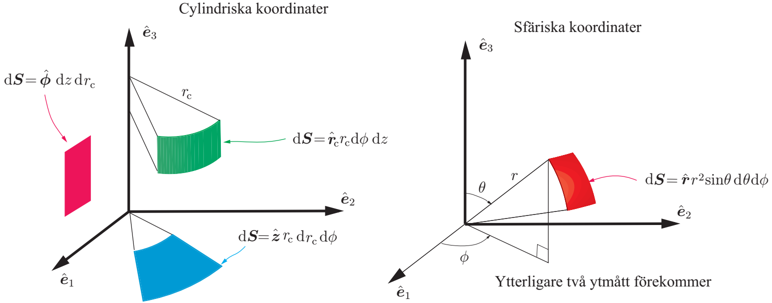
Några vanliga ytmått





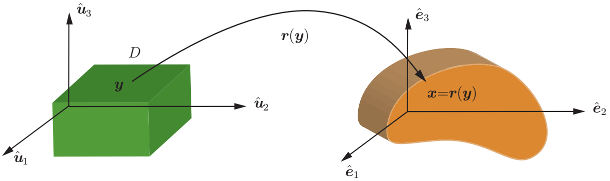
Ytterligare två ytmått förekommer

Några vanliga ytmått



Finns ej i formelsamlingen, måste konstruera själva!

Volymer



Låt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r}(u, v, w)$, definierad på ett område $(u, v, w) \in D = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$, framställa en volym V
Funktionaldeterminanten (Jacobianen) ges av

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \right) = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial (u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_1}{\partial w} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial w} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Volymsmått

Volymsmåttet ges av

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial (u, v, w)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Volymsintegraler

Två typer av volymsintegraler förekommer i kursen

1. Skalärvärd volymsintegral

$$\iiint_V f \, \mathrm{d}v = \iiint_D f(\boldsymbol{r}(u, v, w)) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial(u, v, w)} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

2. Vektorvärd volymsintegral

$$\iiint_V \boldsymbol{A} \, \mathrm{d}v = \iiint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(u, v, w)) \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial(u, v, w)} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Några vanliga volymsmått

Cylinderkoordinater $\mathrm{d}v = r_\mathrm{c}\mathrm{d}r_\mathrm{c}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$
Sfäriska koordinater $\mathrm{d}v = r^2 \sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

Övningar integraler

1. Beräkna den vektorvärda integralen $\iint_S \hat{\boldsymbol{\theta}}\,\mathrm{d}S$ över en sfär med radien a som är centrerad i origo
2. Problem 1.29 (1.28 i 3e upplagan) i Griffiths (line integral = tangentlinjeintegral)
3. Låt $\boldsymbol{A} = (18z, -12, 3y)$ och låt ytan S definieras av planet $\{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y + 6z = 12\}$. Normalen pekar från origo. Beräkna normalytintegralen.
4. Låt $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = z\hat{\boldsymbol{x}} + x\hat{\boldsymbol{y}} + y\hat{\boldsymbol{z}}$ och låt kurvan L definieras av skärningen mellan ytorna $S_1 : \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ och $S_2 : \{(x, y, z) : x = y\}$. Beräkna $\int_L \boldsymbol{A} \times \,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$.

Övningar integraler — svar

1. $-\hat{\boldsymbol{z}}\pi^2 a^2$
2.
   - 2.a $4/3$
   - 2.b $4/3$
   - 2.c $4/3$
   - 2.d 0
3. 24
4. $\pm\frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$

Lösningsskiss 1

Utnyttja sambandet $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta \cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta \sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta$ för att kunna utföra integration i ett fixt koordinatsystem.

Sfärens ytmått uttryckt i sfäriska koordinater är $\mathrm{d}S = a^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$. Vi får

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{\theta}} \,\mathrm{d}S = \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (\hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta \cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta \sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta)\, a^2 \sin\theta \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta$$
$$= - \hat{\boldsymbol{z}} 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = -\hat{\boldsymbol{z}} \pi^2 a^2$$

där vi använt

$$\int_0^{\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$$

och

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi \,\mathrm{d}\phi = 0$$

Lösningsskiss 2, a & b

$$\boldsymbol{v} = x^2\hat{\boldsymbol{x}} + 2yz\hat{\boldsymbol{y}} + y^2\hat{\boldsymbol{z}}$$

a.

$$\int_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^1 \boldsymbol{v}(x,0,0)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \boldsymbol{v}(1,y,0)\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_0^1 \boldsymbol{v}(1,1,z)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

b.

$$\int_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^1 \boldsymbol{v}(0,0,z)\cdot\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z + \int_0^1 \boldsymbol{v}(0,y,1)\cdot\hat{\boldsymbol{y}}\,\mathrm{d}y$$
$$+ \int_0^1 \boldsymbol{v}(x,1,1)\cdot\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2y\,\mathrm{d}y + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Lösningsskiss 2, c & d

c. Parameterframställning av kurvan $\boldsymbol{r}(t) = t(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}})$, $t \in [0, 1]$

$$\int_L \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_0^1 \boldsymbol{v}(t, t, t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 + 2t^2 + t^2\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}$$

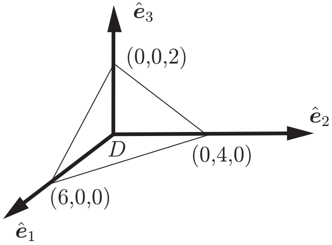
Vi ser att fältet $\boldsymbol{v}$ är konservativt, då vi får samma värde på linjeintegralen $\frac{4}{3}$ oavsett väg.

d. Subtraktion av resultaten i a & b eller använd att $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$.

Lösningsskiss 3

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 18z\hat{\boldsymbol{x}} - 12\hat{\boldsymbol{y}} + 3y\hat{\boldsymbol{z}}$$

och parameterframställ ytan med x och y som parametrar
$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + 3y \leq 12\}$ och
$z = f(x, y) = 2 - x/3 - y/2$



Ytmåttet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{r}_x(x, y) \times \boldsymbol{r}_y(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1/3, 1/2, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Lösningsskiss 3, forts.

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_D (18z, -12, 3y)\cdot(1/3, 1/2, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^6 \left(\int_0^{4-2x/3} (6(2 - x/3 - y/2) - 6 + 3y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^6 \left(\int_0^{4-2x/3} (6 - 2x)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^6 (4 - 2x/3)(6 - 2x)\mathrm{d}x = 24$$

Lösningsskiss 4

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (z, x, y)$$

och kurvan L är en storcirkel på enhetscirkeln som parameterframställs genom (tecken beroende på omloppsriktning) $\boldsymbol{r}(\theta) = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \cos\theta)$, där $\theta \in [0, 2\pi)$. Linjemåttet blir

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, -\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}
\int_L \boldsymbol{A} \times \,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \pm\int_0^{2\pi} (z, x, y) \times (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, -\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pm\int_0^{2\pi} (\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta) \times (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta, -\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pm\int_0^{2\pi} (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta, \frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Lösningsskiss 4, forts.

Med hjälp av $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta = \pi$ och $\int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = 0$ får vi

$$\int_L \boldsymbol{A} \times \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}\pi, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\pi) = \pm\frac{\pi}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$