Vektoranalys I

Mariana Dalarsson

Institutionen för elektro- och informationsteknik

2 september 2019

Översikt över de tre föreläsningarna

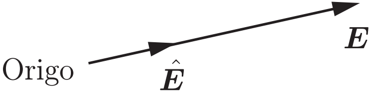
1. Grundläggande begrepp inom vektoranalysen, nablaoperatorn samt kroklinjiga koordinatsystem. Övningar.
2. Kurvor och ytor samt olika slags integraler. Övningar.
3. Gauss och Stokes satser. Övningar.

Översikt

1. **Vektorer & vektorfält, Kap. 1.1**
2. **Vektoroperationer**
   - Skalära fält och vektorfält
3. **Nablaoperatorn, Kap. 1.2**
   - Räkneregler
4. **Kroklinjiga koordinater, Kap. 1.4**
   - Kartesiska koordinater
   - Cylindriska (polära) koordinater
   - Sfäriska koordinater
   - Lathund transformation mellan enhetsvektorer
5. **Övningar**
   - Svar
   - Lösningsskisser

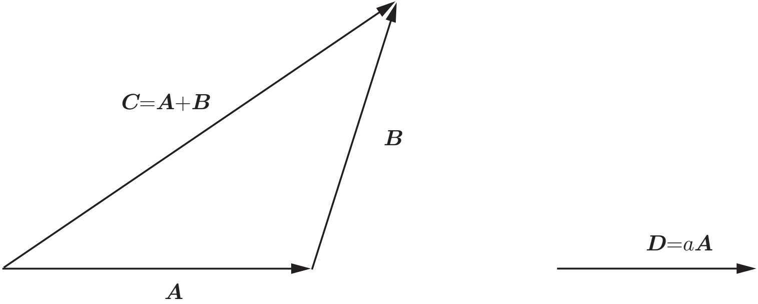
Vektorer — Elementär diskussion I

- Vektorer är riktade sträckor (representerar storheter med både storlek och riktning, t.ex. hastighet, kraft, acceleration)
- Beteckning: $\boldsymbol{E}$,
  - längd (storlek) $|\boldsymbol{E}| = E$
  - riktning $\hat{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}/E$ (enhetslängd)



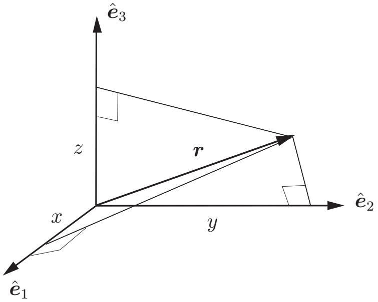
Vektorer — Elementär diskussion II

- Vektorer är element i ett linjärt rum (vektorrum), d.v.s. de kan adderas (subtraheras) och multipliceras med en skalär så att resultatet förblir ett element inom samma rum



Koordinatsystem

- För att representera vektorer använder vi ett ortonormerat kartesiskt koordinatsystem och en skalärprodukt
- Ortsvektorn: $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}$ $(= x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3)$

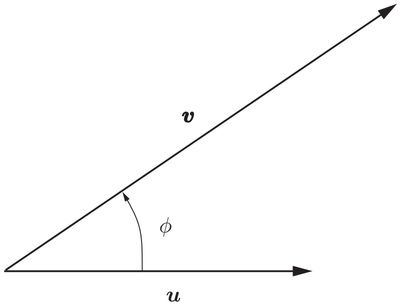


- Basvektorer: $\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{e}}_1$, $\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{e}}_2$, $\hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{e}}_3$
- Ortsvektorns komponenter: x, y och z (eller x_1, x_2 och x_3)

Vektoroperationer I

- **Skalärprodukt:** definierar vinklar mellan vektorer

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = uv \cos\phi$$

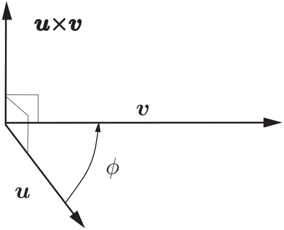


- **Vektorprodukt:** Två (polära) vektorer, $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, definierar en ny (axial) vektor $\boldsymbol{w}$, genom vektorprodukten

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$$

Den nya vektorn ges av determinantschemat

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_1 & \hat{\boldsymbol{e}}_2 & \hat{\boldsymbol{e}}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

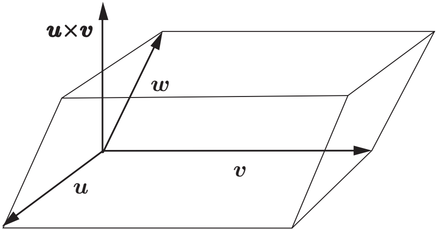


$\boldsymbol{w}$ är vinkelrät mot både $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$, $|\boldsymbol{w}| = uv \sin\phi$

Vektoroperationer III

- **Skalär trippelprodukt**

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \begin{cases} V & \text{om } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ positivt orienterade} \\ -V & \text{om } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \text{ negativt orienterade} \end{cases}$$



V är parallellepipedens volym som spänns upp av $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ och $\boldsymbol{w}$
Cyklisk permutation:
$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{w}$

Vektoroperationer IV

- BAC-CAB-regeln

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$$

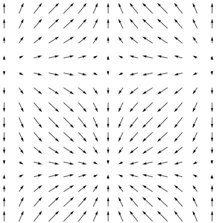
Bevis genom ”råräkning” möjligt.

Skalära fält och vektorfält I

- Ett **fält** är en funktion av $\mathbb{R}^3$ (eventuellt $\mathbb{R}^2$)
- Fältet är **skalärt** om värdemängden är $\mathbb{R}$
  - Temperaturen i en kropp
  - Trycket i en vätska
  - Elektriska potentialen $V(\boldsymbol{r})$ från en laddningsfördelning
- Fältet kallas **vektorfält** om funktionens värdemängd är $\mathbb{R}^3$ (eventuellt $\mathbb{R}^2$)
  - Gravitationskraften
  - Elektriska fältet från en laddningsfördelning

Skalära fält och vektorfält II

- Skalärt fält: $\psi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
- Vektorfält: $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$
  Exempel i två dimensioner $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$



Källor och sänkor

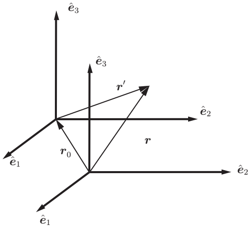
Translation av koordinatsystem

- I ett translaterat koordinatsystem, translation $\boldsymbol{r}_0$, representeras ortsvektorn med komponenterna x', y' och z':

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y\hat{\boldsymbol{e}}_2 + z\hat{\boldsymbol{e}}_3 = x'\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y'\hat{\boldsymbol{e}}_2 + z'\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

- Samband mellan komponenterna kan ges som

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$



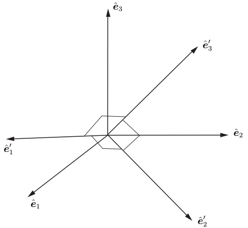
Rotation av koordinatsystem

- I ett roterat koordinatsystem, nya enhetsvektorer $\hat{\mathbf{e}}'_1$, $\hat{\mathbf{e}}'_2$, $\hat{\mathbf{e}}'_3$, representeras ortsvektorn med komponenterna x'_1, x'_2 och x'_3:

$$\boldsymbol{r} = x_1\hat{\mathbf{e}}_1 + x_2\hat{\mathbf{e}}_2 + x_3\hat{\mathbf{e}}_3 = x'_1\hat{\mathbf{e}}'_1 + x'_2\hat{\mathbf{e}}'_2 + x'_3\hat{\mathbf{e}}'_3$$

- Samband mellan komponenterna kan ges som

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$$



Definition av skalärt fält

En funktion ψ är ett skalärfält om funktionens värde är detsamma vid rotation av koordinatsystem

$$\psi'(x_1', x_2', x_3') = \psi(x_1, x_2, x_3)$$

Definition av vektorfält, Kap. 1.1.5 I

- Ett vektorfält $\boldsymbol{v}$ är en storhet vars komponenter transformeras som ortsvektorn vid rotation av koordinatsystem

$$\begin{pmatrix} v_1'(x_1', x_2', x_3') \\ v_2'(x_1', x_2', x_3') \\ v_3'(x_1', x_2', x_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

eller

$$v_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, 3$$

Nablaoperatorn I

Differentiering av vektorfält utförs med nablaoperatorn

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z} \ \left(= \hat{\boldsymbol{e}}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\boldsymbol{e}}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\boldsymbol{e}}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

1. Gradienter på skalära fält ψ

$$\nabla\psi(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

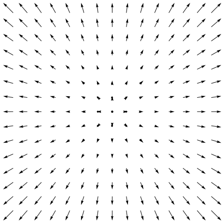
- Anger riktning och storlek på ψ:s variationer
- Gradienten transformerar ett skalärt fält till ett vektorfält, d.v.s. det är en vektor
- Riktningsderivatan av ψ i en riktning $\hat{\boldsymbol{e}}$ ges av $\frac{\partial\psi(\boldsymbol{r})}{\partial e} = \hat{\boldsymbol{e}}\cdot\nabla\psi(\boldsymbol{r})$

Nablaoperatorn II

2. Divergens på vektorfält $\boldsymbol{E}$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial E_x(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \frac{\partial E_y(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \frac{\partial E_z(\boldsymbol{r})}{\partial z}$$

- Kvantifierar hur mycket ett vektorfält "sprider ut sig" från punkten $\boldsymbol{r}$



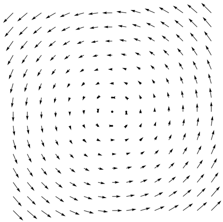
- Divergensen transformerar ett vektorfält till ett skalärt fält

Nablaoperatorn III

3. Rotationen (Curl) på ett vektorfält $\boldsymbol{E}$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

- Kvantifierar hur mycket ett vektorfält "snurrar" runt punkten $\boldsymbol{r}$



- Rotationen transformerar ett vektorfält till ett nytt vektorfält

Flera viktiga vektoroperationer

1. $\nabla \times (\nabla \psi(\boldsymbol{r})) = \mathbf{0}$
2. $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) = 0$
3. Laplace-operatorn $\nabla \cdot (\nabla \psi(\boldsymbol{r})) = \nabla^2 \psi(\boldsymbol{r}) = \Delta \psi(\boldsymbol{r})$

Omvändningen

1. $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{0} \Rightarrow$ existerar ett skalärt fält V (ej entydigt, kallat vektorfältets potential): $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})$
2. $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \Rightarrow$ existerar ett vektorfält $\boldsymbol{A}$ (ej entydigt, kallat vektorfältets vektorpotential): $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$

Exempel: Elektrisk potential $V(\boldsymbol{r})$:

$$\boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(\boldsymbol{r})}$$

Räkneregler I

1. $\nabla(\varphi+\psi)=\nabla\varphi+\nabla\psi$
2. $\nabla(\varphi\psi)=\psi\nabla\varphi+\varphi\nabla\psi$
3. $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})$
4. $\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=-\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})$
   $+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$

5. $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\cdot\boldsymbol{a}+\nabla\cdot\boldsymbol{b}$
6. $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\nabla\varphi)\cdot\boldsymbol{a}$
7. $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$

8. $\nabla\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\nabla\times\boldsymbol{a}+\nabla\times\boldsymbol{b}$
9. $\nabla\times(\varphi\boldsymbol{a})=\varphi(\nabla\times\boldsymbol{a})+(\nabla\varphi)\times\boldsymbol{a}$
10. $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}$

Räkneregler II

11. $\nabla \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) =$
$-\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})+2(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a})$

12. $\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi$
13. $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}$
14. $\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$
15. $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}) = 0$
16. $\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\nabla^2\psi + \psi\nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$

17. $\nabla r = \hat{\boldsymbol{r}}$
18. $\nabla \times \boldsymbol{r} = \mathbf{0}$
19. $\nabla \times \hat{\boldsymbol{r}} = \mathbf{0}$
20. $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$
21. $\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = 2/r$

Räkneregler III

22. $\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}$ konstant vektor
23. $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}$
24. $(\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\hat{\boldsymbol{r}} = \left(\boldsymbol{a} - \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a} \cdot \hat{\boldsymbol{r}})\right)/r = \boldsymbol{a}_{\perp}/r$
25. $\nabla^2(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}) = 2\nabla \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r} \cdot (\nabla^2 \boldsymbol{a})$

26. $\nabla u(f) = (\nabla f)\frac{du}{df}$
27. $\nabla \cdot \boldsymbol{F}(f) = (\nabla f) \cdot \frac{d\boldsymbol{F}}{df}$
28. $\nabla \times \boldsymbol{F}(f) = (\nabla f) \times \frac{d\boldsymbol{F}}{df}$
29. $\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \nabla) - \hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \nabla)$

Kroklinjiga koordinater

I Kartesiska koordinater beskrivs (representeras) ortsvektorn $\boldsymbol{r}$ med komponenterna x, y och z (eller x_1, x_2 och x_3) så att

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

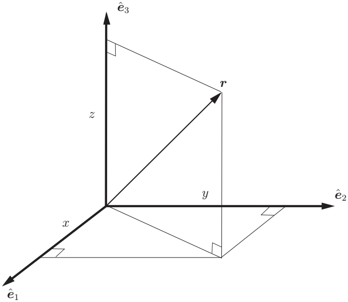
Det finns andra möjligheter att representera ortsvektorn som är mer lämpliga i speciella geometrier, s.k. kroklinjiga koordinater
De viktigaste i denna kurs är:

1. Kartesiska koordinater x, y och z (eller x_1, x_2 och x_3)
2. Cylindriska koordinater (polära koordinater): r_c, ϕ och z
3. Sfäriska koordinater: r, θ och ϕ

så att

$$\boxed{\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = r_\mathrm{c}\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c} + z\hat{\boldsymbol{z}} = r\hat{\boldsymbol{r}}}$$

Kartesiska koordinater



- Enhetsvektorer: $\{\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3\} = \{\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$
- Koordinater: $\{x, y, z\}$

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + y\hat{\boldsymbol{e}}_2 + z\hat{\boldsymbol{e}}_3, \qquad \boldsymbol{A} = A_x\hat{\boldsymbol{e}}_1 + A_y\hat{\boldsymbol{e}}_2 + A_z\hat{\boldsymbol{e}}_3$$

Differentiering i Kartesiska koordinater

$$\nabla\psi = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

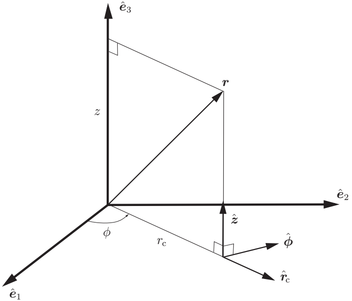
$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{y}}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{\boldsymbol{z}}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{x}}\nabla^2 A_x + \hat{\boldsymbol{y}}\nabla^2 A_y + \hat{\boldsymbol{z}}\nabla^2 A_z$$

Cylindriska (polära) koordinater



$$\boxed{x = r_c \cos\phi\ ,\ \ y = r_c \sin\phi\ ,\ \ z = z}$$

alt.

$$\begin{cases} r_c = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

- Enhetsvektorer: $\{\hat{\boldsymbol{r}}_c, \hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{z}}\}$
- Koordinater: $\{r_c, \phi, z\}$

$$\boldsymbol{r} = r_c\hat{\boldsymbol{r}}_c + z\hat{\boldsymbol{z}}, \qquad \boldsymbol{A} = A_c\hat{\boldsymbol{r}}_c + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}$$

Differentiering i cylindriska (polära) koordinater

$$\nabla\psi = \hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c}\frac{\partial\psi}{\partial r_\mathrm{c}} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

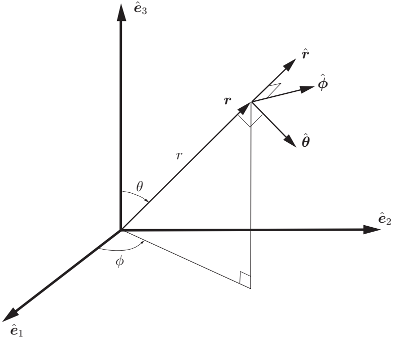
$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial r_\mathrm{c}}\left(r_\mathrm{c}\frac{\partial\psi}{\partial r_\mathrm{c}}\right) + \frac{1}{r_\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial}{\partial r_\mathrm{c}}(r_\mathrm{c}A_\mathrm{c}) + \frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c}\left(\frac{1}{r_\mathrm{c}}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\frac{\partial A_\mathrm{c}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r_\mathrm{c}}\right)\\ &\quad + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{1}{r_\mathrm{c}}\left(\frac{\partial}{\partial r_\mathrm{c}}(r_\mathrm{c}A_\phi) - \frac{\partial A_\mathrm{c}}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} &= \hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c}\left(\nabla^2 A_\mathrm{c} - \frac{A_\mathrm{c}}{r_\mathrm{c}^2} - \frac{2}{r_\mathrm{c}^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r_\mathrm{c}^2} + \frac{2}{r_\mathrm{c}^2}\frac{\partial A_\mathrm{c}}{\partial\phi}\right)\\ &\quad + \hat{\boldsymbol{z}}\nabla^2 A_z\end{aligned}$$

Sfäriska koordinater



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

alt.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

θ är polvinkeln och ϕ azimutvinkeln

- Enhetsvektorer: $\{\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\}$
- Koordinater: $\{r, \theta, \phi\}$

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{A} = A_r\hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Differentiering i sfäriska koordinater I I

$$
\nabla\psi = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}
\end{aligned}
$$

Differentiering i sfäriska koordinater II

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} = {} & \hat{\boldsymbol{r}}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right) \\ & + \hat{\boldsymbol{\theta}}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{A} = {} & \hat{\boldsymbol{r}}\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2}A_\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) \\ & + \hat{\boldsymbol{\theta}}\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right) \\ & + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\end{aligned}$$

Lathund transformation mellan enhetsvektorer

$(r,\theta,\phi) \longrightarrow (x,y,z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}} \sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\theta\sin\phi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\phi \end{cases}$$

$(x,y,z) \longrightarrow (r_{\mathrm{c}},\phi,z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} \cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin\phi \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos\phi \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$(x,y,z) \longrightarrow (r,\theta,\phi)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta\cos\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta\cos\phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin\phi \\ \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta\sin\phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos\phi \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \end{cases}$$

$(r,\theta,\phi) \longrightarrow (r_{\mathrm{c}},\phi,z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} \sin\theta + \hat{\boldsymbol{z}} \cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{z}} \sin\theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{cases}$$

$(r_{\mathrm{c}},\phi,z) \longrightarrow (x,y,z)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} = \hat{\boldsymbol{x}} \cos\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \sin\phi = (\hat{\boldsymbol{x}}x + \hat{\boldsymbol{y}}y)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{\boldsymbol{x}} \sin\phi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos\phi = (-\hat{\boldsymbol{x}}y + \hat{\boldsymbol{y}}x)/\sqrt{x^2+y^2} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases}$$

$(r_{\mathrm{c}},\phi,z) \longrightarrow (r,\theta,\phi)$

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{c}} = \hat{\boldsymbol{r}} \sin\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos\theta \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{r}} \cos\theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin\theta \end{cases}$$

Övningar vektorer

1. Visa att $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ genom att använda a) kartesiska koordinater, b) cylindriska koordinater, c) sfäriska koordinater.
2. Låt $\psi(\boldsymbol{r}) = 3x^2 + 5y^2 + 7z^2$. Beräkna riktningsderivatan av ψ i riktningen $\hat{\boldsymbol{e}} = (3, 4, 5)/\sqrt{50}$ i punkten $\boldsymbol{r} = (1, 1, -1)$.
3. Låt $\psi(\boldsymbol{r}) = zr^{-3}$. Beräkna gradienten av ψ.
4. Låt $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (3z^2 - r^2)\boldsymbol{r}$. Beräkna divergensen av $\boldsymbol{A}$.
5. Låt $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}$ där $\boldsymbol{a}$ är en konstant vektor och $f(r)$ en differentierbar skalär funktion av avståndet r. Beräkna $\nabla \times \boldsymbol{A}$.
6. Låt $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}$ där $\boldsymbol{a}$ är en konstant vektor. Bestäm den skalära funktionen $f(r)$ så att $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$.
7. Problem 1.8 i Griffiths

Övningar vektorer — svar

1. –
2. $\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{r}) = -\frac{6\sqrt{2}}{5}$ då $\boldsymbol{r} = (1, 1, -1)$
3. $\nabla\psi(\boldsymbol{r}) = -\frac{3xz}{r^5}\hat{\boldsymbol{e}}_1 - \frac{3yz}{r^5}\hat{\boldsymbol{e}}_2 + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{e}}_3$
4. $\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 5r^2(3\cos^2\theta - 1) = (15z^2 - 5r^2)$
5. $\nabla \times \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})f(r)$ oberoende av f:s form
6. $f(r) = \frac{C}{r^4}$, C godtycklig konstant

Lösningsskiss 1

Använd $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = r_c\hat{\boldsymbol{r}}_c + z\hat{\boldsymbol{z}} = r\hat{\boldsymbol{r}}$. Det ger $A_x = x$, $A_y = y$, $A_z = z$, $A_{r_c} = r_c$, $A_\phi = 0$, $A_r = r$, $A_\theta = 0$. För divergensen gäller då enligt formelsamlingen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial y} = 3$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r_c}\frac{\partial}{\partial r_c}(r_c A_{r_c}) + \frac{\partial A_z}{\partial y} = 2 + 1 = 3$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) = 3$$

Lösningsskiss 2

Vi börjar med att beräkna gradienten av $\psi(\boldsymbol{r}) = 3x^2 + 5y^2 + 7z^2$.

$$\nabla\psi(\boldsymbol{r}) = 6x\hat{\boldsymbol{x}} + 10y\hat{\boldsymbol{y}} + 14z\hat{\boldsymbol{z}}$$

Riktningsderivatan ges av $\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{r})$, d.v.s.

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \nabla\psi(\boldsymbol{r}) &= (3\hat{\boldsymbol{x}} + 4\hat{\boldsymbol{y}} + 5\hat{\boldsymbol{z}}) \cdot (6x\hat{\boldsymbol{x}} + 10y\hat{\boldsymbol{y}} + 14z\hat{\boldsymbol{z}})\,/\sqrt{50} \\ &= (18x + 40y + 70z)\,/\sqrt{50}\end{aligned}$$

Speciellt i punkten $\boldsymbol{r} = (1, 1, -1)$ blir riktningsderivatan

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}} \cdot \nabla\psi(1, 1-1) &= (18 + 40 - 70)\,/\sqrt{50} \\ &= -12/\sqrt{50} = -6\sqrt{2}/5\end{aligned}$$

Lösningsskiss 3

Beräkna gradienten av $\psi(\boldsymbol{r}) = zr^{-3}$ genom räkneregel 2 för nabla-operatorn, och evaluera gradienterna i kartesiska respektive sfäriska koordinater.

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(zr^{-3}\right) &= r^{-3}\nabla z + z\nabla r^{-3} = r^{-3}\hat{\boldsymbol{z}} - 3zr^{-4}\hat{\boldsymbol{r}} \\
&= r^{-5}\left(x^2+y^2+z^2\right)\hat{\boldsymbol{z}} - 3zr^{-5}\left(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}}\right) \\
&= -\frac{3xz}{r^5}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{3yz}{r^5}\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right)\hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
$$

Lösningsskiss 4

Låt $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (3z^2 - r^2)\boldsymbol{r}$. Det finns flera sätt att bestämma $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$. Ett sätt är att utrycka $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ i kartesiska koordinater och kartesiska enhetsvektorer. Ett annat sätt är att utrrycka $\boldsymbol{A}$ i sfäriska koordinater. I det sistnämnda fallet gäller (notera att $z = r\cos\theta$)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_r \hat{\boldsymbol{r}} = (3\cos^2\theta - 1)r^3 \hat{\boldsymbol{r}}$$

Formelsamlingen ger

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) = (3\cos^2\theta - 1)5r^2 = 15z^2 - 5r^2$$

Lösningsskiss 5

Beräkna rotationen av $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}$ genom räknereglerna 9 och 2.

$$\begin{aligned}\nabla\times((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\nabla\times\boldsymbol{r} + \nabla\left((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\right)\times\boldsymbol{r}\\ &= \left(f(r)\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\right) + \left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\right)\nabla f(r)\right)\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

eftersom $\nabla\times\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$. Nu gäller för konstant vektor $\boldsymbol{a}$ att

$$\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{a}$$

och att

$$\nabla f(r)\times\boldsymbol{r} = f'(r)\hat{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$$

Således $\nabla\times A = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})f(r)$ oberoende av f:s form

Lösningsskiss 6

Beräkna divergensen av $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}$ genom räknereglerna 6 och 2.

$$\begin{aligned}\nabla\cdot((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r} + \nabla\left((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\right)\cdot\boldsymbol{r}\\ &= 3(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r) + \left(f(r)\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\right) + \left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\right)\nabla f(r)\right)\cdot\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

eftersom $\nabla\cdot\boldsymbol{r} = 3$. Nu gäller för konstant vektor $\boldsymbol{a}$ att

$$\nabla\left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}\right) = \boldsymbol{a}$$

och att

$$\nabla f(r)\cdot\boldsymbol{r} = f'(r)\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r} = rf'(r)$$

Således gäller

$$\nabla\cdot((\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})f(r)\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\left(4f(r) + rf'(r)\right)$$

Lösningsskiss 6, forts.

Om divergensen skall vara noll krävs att

$$f'(r) = -\frac{4f(r)}{r}$$

med lösning $f(r) = \frac{C}{r^4}$, C godtycklig konstant

Lösningsskiss 7

Ekvation (29) ger

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{pmatrix} \overline{B}_y \\ \overline{B}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

Bilda skalärprodukten i det roterade systemet

$$\begin{aligned} \overline{A}_y\overline{B}_y + \overline{A}_z\overline{B}_z &= (A_y\cos\phi + A_z\sin\phi)(B_y\cos\phi + B_z\sin\phi) \\ &\quad + (-A_y\sin\phi + A_z\cos\phi)(-B_y\sin\phi + B_z\cos\phi) \\ &= A_yB_y\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + A_zB_z\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) \\ &= A_yB_y + A_zB_z \end{aligned}$$