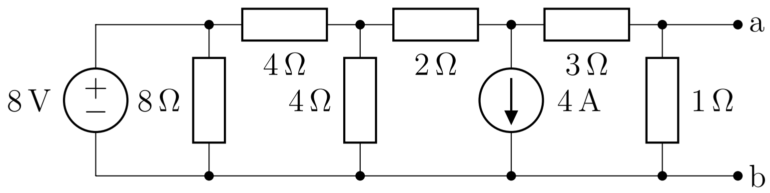
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 3/6 2017

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

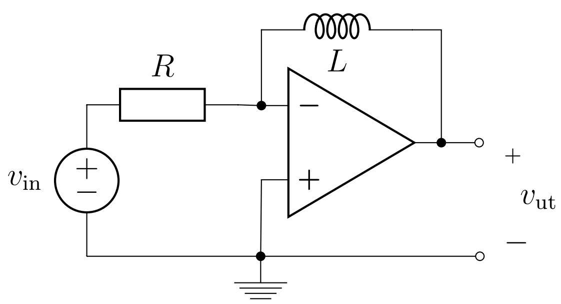


(a) Bestäm Théveninekvivalenten med avseende på nodparet ab.

(b) Bestäm Nortonekvivalenten med avseende på nodparet ab.

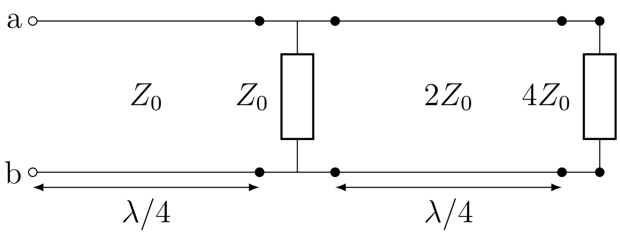
2

Bestäm utsignalen $v_{\mathrm{ut}}(t)$ för en känd insignal $v_{\mathrm{in}}(t)$.
Operationsförstärkaren kan anses ideal.



3

Bestäm inimpedansen mellan nodparet ab. Kopplingen består av två transmissionsledningar med karakteristiska impedanser Z_0 och $2Z_0$ med vardera längd $\lambda/4$, där λ betecknar våglängden.

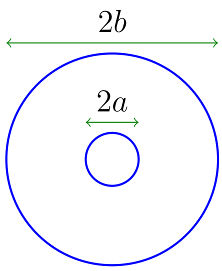


4

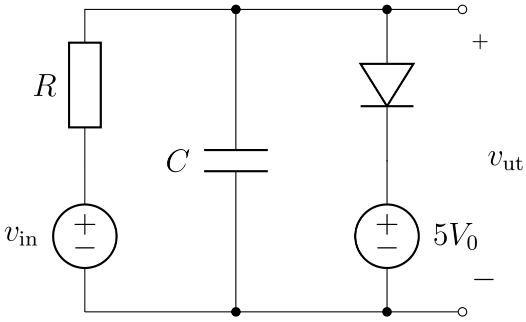
Betrakta en koaxialkabel med radie a på innerledaren och radie b på ytterledaren. Du kan anta fri rymd ($\epsilon = \epsilon_0$) mellan ledarna.

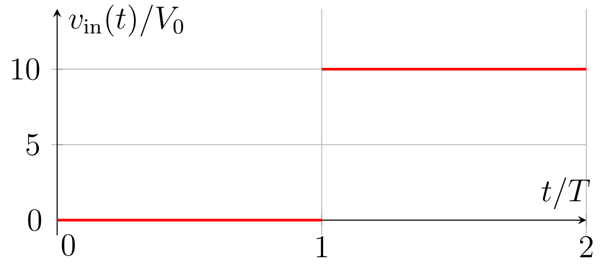
(a) Bestäm den upplagrade energin i koaxialkabeln över en längd, ℓ, med laddning q på innerledaren.

(b) Bestäm kapacitansen per längdenhet för koaxialkabeln.



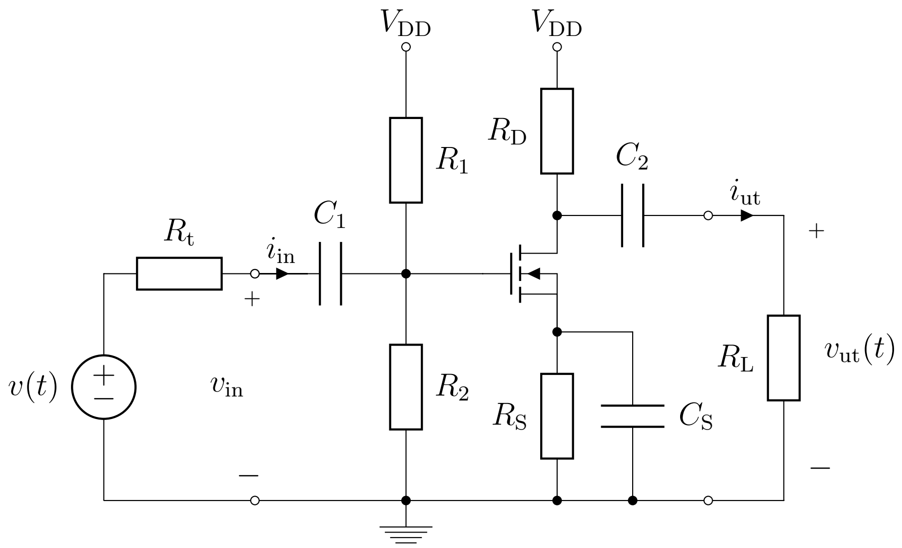
5





Bestäm utsignalen $v_{\mathrm{ut}}(t)$ för $t \geq 0$ då $v_{\mathrm{in}}(t) = 0\,\mathrm{V}$ för $t < T$ och $v_{\mathrm{in}}(t) = 10V_0 > 0$ för $t \geq T$. Dioden kan anses vara ideal.

6



Figuren visar en 'common source' förstärkare med en NMOS transistor. Likspänningskällan V_{DD} och motstånden R_1, R_2, R_{S} är valda så att transistorn är i mättnadsområdet. Insignalen $v_{\mathrm{in}}(t) = V_{\mathrm{in}} \cos(\omega t)$ är vald så att $|V_{\mathrm{in}}| \ll V_{\mathrm{DD}}$ och så att kopplingskapacitansernas impedanser kan försummas. Tröskelspänningen V_{t} och konstanten K för transistorn är kända.

a) Skissa de två kurvor i $\{V_{\mathrm{GS}}, I_{\mathrm{D}}\}$-planet vars skärningspunkt ger arbetspunkten, dvs V_{GSQ} och I_{DQ}.

b) Bestäm småsignalschemat för förstärkaren. Antag att r_{d} i småsignalmodellen av transistorn är mycket stor och kan ersättas med ett avbrott.

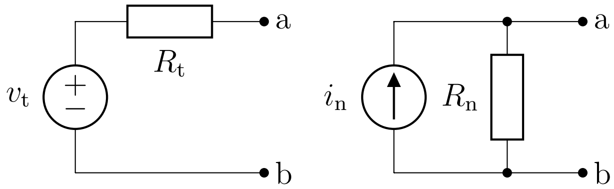
c) Vad är transkonduktansen g_{m}? Uttryck svaret i I_{DQ} och K.

d) Bestäm förstärkningen, $A = v_{\mathrm{ut}}/v_{\mathrm{in}}$.

Lösningar

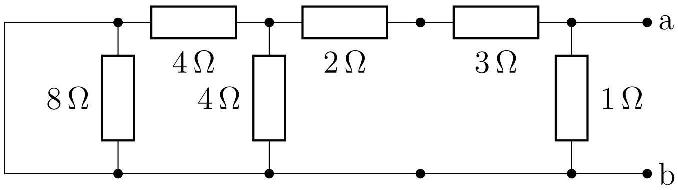
1

Thévenin- och Nortonekvivalenterna är

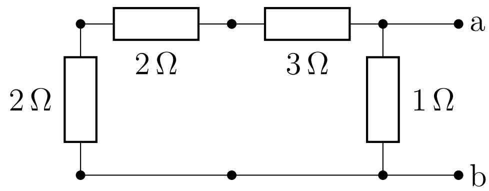


där tomgångsspänningen ger $v_{ab} = v_t = i_n R_n$ och nollställning av källorna $R_n = R_t$.

Nollställ källorna för att bestämma $R_n = R_t$



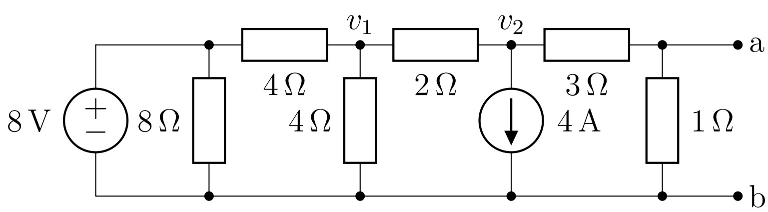
Förenkla kretsen från insidan



som ger

$$R_t = R_n = \frac{7}{7+1}\,\Omega = \frac{7}{8}\,\Omega$$

Använd nodanalys för att bestämma tomgångsspänningen $v_{ab} = v_t = i_n R_n$



KCL på nod 1 ger

$$\frac{v_1 - 8\,\mathrm{V}}{4} + \frac{v_1 - 0}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} = 0 \Rightarrow 2v_1 - v_2 = 4\,\mathrm{V} \Rightarrow 2v_1 = v_2 + 4\,\mathrm{V}$$

och på nod 2

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + 4\,\mathrm{V} + \frac{v_2 - 0}{4} = 0 \Rightarrow 3v_2 - 2v_1 = -16\,\mathrm{V}$$

och

$$3v_2 - (v_2 + 4\,\mathrm{V}) = 2v_2 - 4\,\mathrm{V} = -16\,\mathrm{V} \Rightarrow v_2 = -6\,\mathrm{V}$$

spänningsdelning ger slutligen

$$v_{\mathrm{ab}} = v_2 \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}\,\mathrm{V} = v_{\mathrm{t}}$$

Nortonekvivalenten har slutligen strömmen

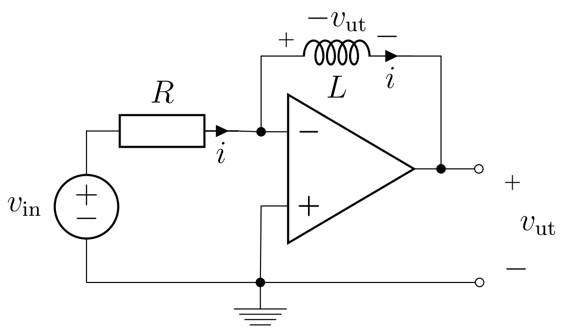
$$i_{\mathrm{n}} = v_{\mathrm{t}}/R_{\mathrm{t}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{7}\,\mathrm{A} = -\frac{12}{7}\,\mathrm{A}$$

Kan alternativt bestämma ekvivalenterna med källtransformationer.

Svar:

$$R_{\mathrm{t}} = R_{\mathrm{n}} = \frac{7}{8}\,\Omega, \quad v_{\mathrm{t}} = -\frac{3}{2}\,\mathrm{V} \quad \text{och } i_{\mathrm{n}} = -\frac{12}{7}\,\mathrm{A}$$

2



Inga strömmar och ingen spänning mellan operationsförstärkarens ingångar.

Potentialen på den negativa ingången är 0 vilket ger strömmen $i = v_{\mathrm{in}}/R$ genom resistansen R spänningen $-v_{\mathrm{ut}}$ över induktansen. Samma ström i går genom induktansen L och därmed spänningen

$$v_{\mathrm{ut}} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}t}$$

Svar:

$$v_{\mathrm{ut}} = -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}t}$$

Alternativ: Laplacetransformera och nodanalys. Här antar vi att insignalen är noll för negativa tider (enkelsidig Laplacetransform).

$$\frac{0 - V_{\mathrm{in}}}{R} + \frac{0 - V_{\mathrm{ut}}}{sL} = 0$$

som ger

$$V_{\mathrm{ut}} = -\frac{sL}{R}V_{\mathrm{in}}$$

och med en invers Laplacetransform

$$v_{\mathrm{ut}} = -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{in}}}{\mathrm{d}t}$$

3

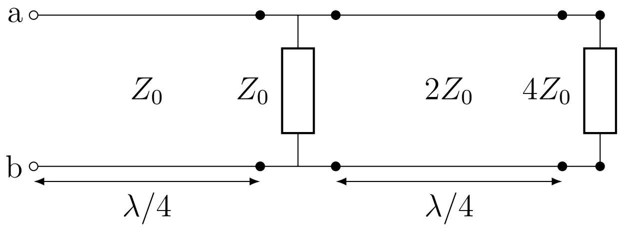
Kvartsvågstransformator för en transmissionsledning med karakteristisk impedans Z_0 och last Z_L

$$Z_\mathrm{in} = \frac{Z_0^2}{Z_\mathrm{L}}$$

som ses av $l\beta = l2\pi/\lambda = \pi/2$ och från formelsamlingen

$$Z_\mathrm{in} = Z_0 \frac{0 + \mathrm{j}Z_0}{0 + \mathrm{j}Z_\mathrm{L}} = \frac{Z_0^2}{Z_\mathrm{L}}$$

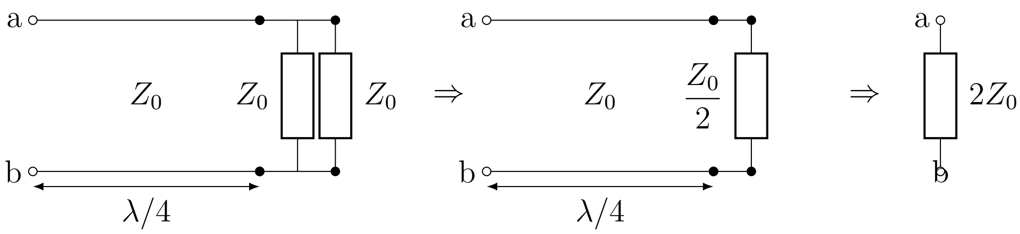
Förenkla



från insidan

$$Z_\mathrm{in} = \frac{(2Z_0)^2}{4Z_0} = Z_0$$

till



där vi använt

$$Z_\mathrm{ab} = \frac{Z_0^2}{Z_0/2} = 2Z_0$$

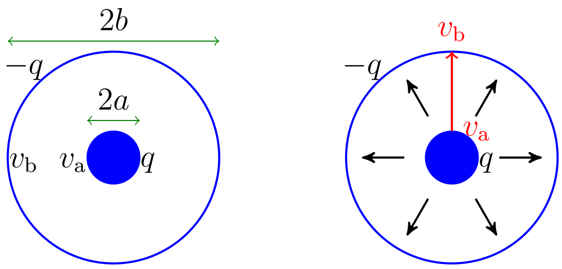
<u>Svar:</u>

$$Z_\mathrm{ab} = 2Z_0$$

4

(a) Bestäm den upplagrade energin från E-fältet som $\frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{dV} = \frac{\epsilon_0}{2}\int |\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{dV}$

(1) antag en laddning q på innerledaren och $-q$ på ytterledaren över en längd ℓ av koaxialkabeln.



(2) använd Gauss lag för att beräkna $\boldsymbol{D}$ från q. Koaxialkabelns rotationssymmetri medför att den elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ är riktad i radiens riktning $\boldsymbol{e}_{\mathrm{r_c}}$ och enbart beror på avståndet $r_{\mathrm{c}} = |\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}|$ (från centrum av koaxialkabeln). Vi kan därmed uttrycka $\boldsymbol{D}$ som

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = D(r_{\mathrm{c}})\boldsymbol{e}_{\mathrm{r_c}}.$$

(3) Omslut (en längd ℓ av) innerledaren med en cylinderyta S med längd ℓ och radie $r_{\mathrm{c}1}$. Gauss lag ger

$$\begin{aligned} q = \oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}S = \int_{\text{mantelytan}} D(r_{\mathrm{c}})\boldsymbol{e}_{\mathrm{r_c}} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{r_c}}\, \mathrm{d}S \\ = D(r_{\mathrm{c}}) \int_{r_{\mathrm{c}}=r_{\mathrm{c}1}} \mathrm{d}S = D(r_{\mathrm{c}1}) 2\pi r_{\mathrm{c}1}\ell \end{aligned}$$

eftersom enbart mantelytan ($r_{\mathrm{c}} = r_{\mathrm{c}1}$) med area $2\pi r_{\mathrm{c}1}\ell$ bidrar ($\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$ för ändytorna). $\boldsymbol{D}$ ges därmed av

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{2\pi r_{\mathrm{c}}\ell}\boldsymbol{e}_{\mathrm{r_c}} \quad \text{för } a \leq r_{\mathrm{c}} \leq b$$

(4) beräkna energin mellan ledarna genom att integrera E-fältet ($\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$) från inner- till ytterledaren över en längd ℓ:

$$\begin{aligned} W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2\, \mathrm{d}V = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{2} \int_{r_{\mathrm{c}}=a}^{b} |E(r_{\mathrm{c}})|^2 r_{\mathrm{c}}\, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}} \\ = \pi\epsilon_0\ell \int_a^b \frac{q^2}{\epsilon_0^2\ell^2 4\pi^2 r_{\mathrm{c}}}\, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}} = \frac{q^2}{\epsilon_0\ell 4\pi}\big[\ln r_{\mathrm{c}}\big]_a^b = \frac{q^2}{\epsilon_0\ell 4\pi} \ln\frac{b}{a} \end{aligned}$$

(b) vilket ger kapacitansen per längdenhet ($W = Cv^2/2 = q^2/(2C)$)

$$\frac{C}{\ell} = \frac{q^2}{2W\ell} = \frac{\epsilon_0 2\pi}{\ln\frac{b}{a}}$$

Svar:

(a)

$$W = \frac{q^2}{\epsilon_0\ell 4\pi} \ln\frac{b}{a}$$

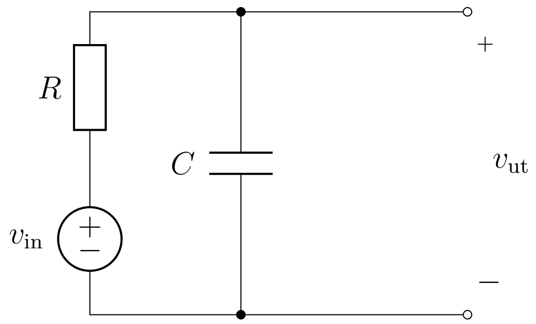
(b)

$$\frac{C}{\ell} = \frac{\epsilon_0 2\pi}{\ln\frac{b}{a}}$$

5

För $v_{\mathrm{ut}}(t) \leq 5V_0$ kan dioden ersättas av ett avbrott och $v_{\mathrm{ut}}(t)$ kan inte vara $> 5V_0$.

Betrakta först tider då $v_{\mathrm{ut}}(t) \leq 5V_0$ och förenkla kretsen till



Nodanalys (KCL) ger

$$\frac{v_{\mathrm{ut}} - v_{\mathrm{in}}}{R} + C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{ut}}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{ut}}}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\mathrm{ut}}}{RC} = \frac{v_{\mathrm{in}}}{RC} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{ut}}}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\mathrm{ut}}}{\tau} = \frac{v_{\mathrm{in}}}{\tau}$$

där $\tau = RC$. Lösning (integrerande faktor $\mathrm{e}^{t/\tau}$) från

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{t/\tau}v_{\mathrm{ut}}) = \mathrm{e}^{t/\tau}\frac{v_{\mathrm{in}}}{\tau}$$

och ($v_{\mathrm{in}} = 0$ för $t < T$)

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{ut}}(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{t_1/\tau}\frac{v_{\mathrm{in}}(t_1)}{\tau}\,\mathrm{d}t_1 &= 10V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\int_{T}^{t} \mathrm{e}^{t_1/\tau}\frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t_1 = 10V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left[\mathrm{e}^{t_1/\tau}\right]_T^t \\ &= 10V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}(\mathrm{e}^{t/\tau} - \mathrm{e}^{T/\tau}) = 10V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/\tau}) \end{aligned}$$

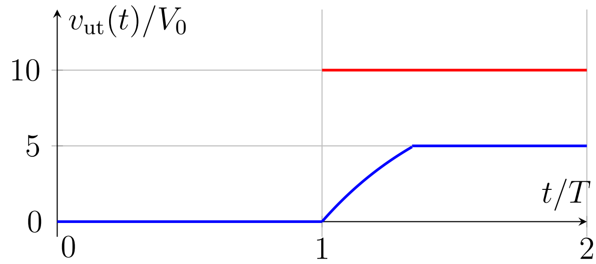
Lösningen gäller fram till $v_{\mathrm{ut}}(t) = 5V_0$ dvs

$$10V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/\tau}) = 5V_0 \Rightarrow 5 = 10\mathrm{e}^{(T-t)/\tau} \Rightarrow \ln 2 = (t - T)/\tau \Rightarrow t = T + \tau\ln 2$$

Kan alternativt använda Laplacetransform för att beräkna spänningen. Använd då först att kondensatorn är urladdad (laddas ut genom resistansen (RC krets) eftersom spänningskällan är av för $t < T$).

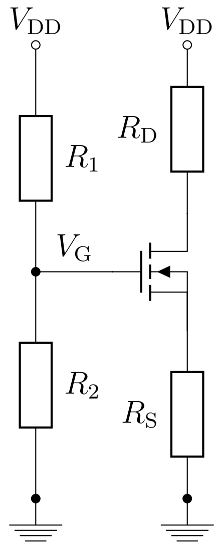
Svar:

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 10V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/\tau}) & T \le t \le T + \tau\ln 2 \\ 5V_0 & t > T + \tau\ln 2 \end{cases}$$



6

Använd att kopplingskapacitanserna är avbrott för drivspänningen vilket ger kretsen



a) Arbetspunkten, Q, för transistorn kan bestämmas med belastningslinjen. KVL över R_2, G, S och R_S i figuren ger

$$V_G - V_{GS} - I_D R_S = 0$$

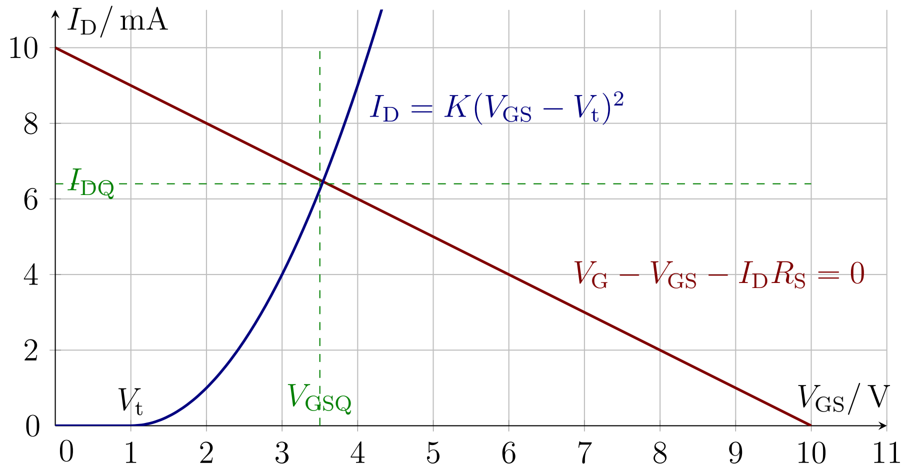
där (spänningsdelning)

$$V_G = V_{DD}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

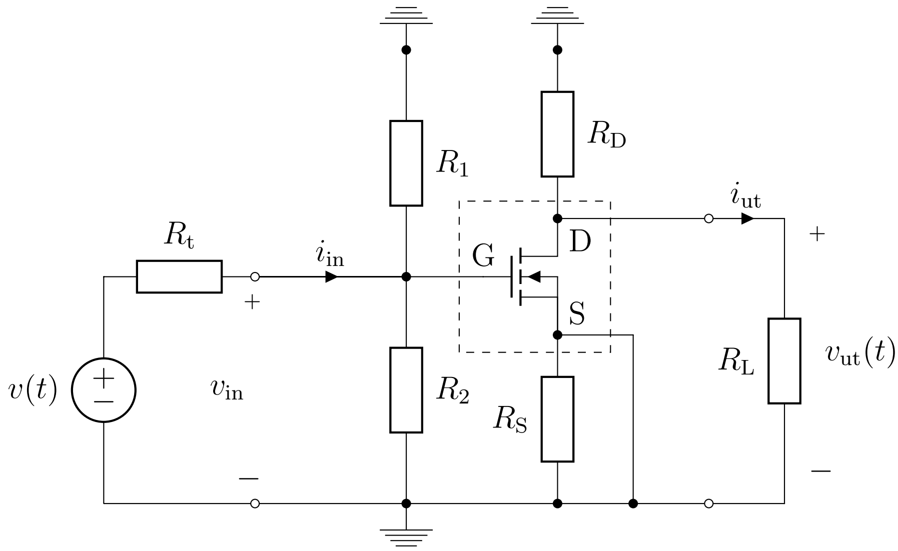
är potentialen i G. Sambandet i mättnadsområdet är

$$I_D = K(V_{GS} - V_t)^2$$

Lösningen av ekvationssystemet ger arbetspunkten I_{DQ}, V_{GSQ}.

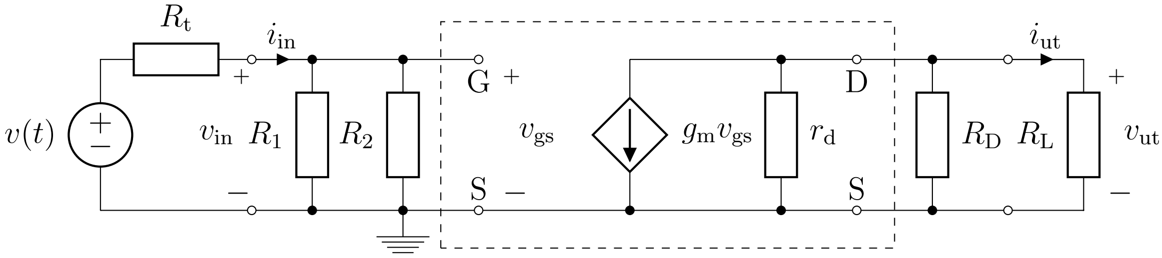


b) Småsignalschemat fås genom att ersätta kopplingskondensatorerna och likspänningskällan



med kortslutningar.

och



c) Transkonduktansen ges av $g_{\mathrm{m}} = \partial I_{\mathrm{D}}/\partial V_{\mathrm{GS}} = 2K(V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}}) = 2\sqrt{KI_{\mathrm{DQ}}}$.

d) Spänningen $v_{\mathrm{GS}} = v_{\mathrm{in}}$ och förstärkningen

$$A = \frac{v_{\mathrm{ut}}}{v_{\mathrm{in}}} = \frac{-g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{G}} + 1/R_{\mathrm{L}}}$$

där $g_{\mathrm{m}} = 2\sqrt{KI_{\mathrm{DQ}}}$ enligt ovan.