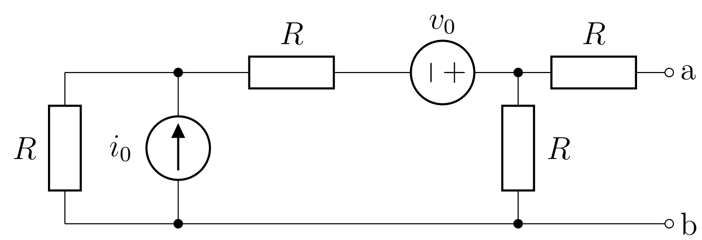
# Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 4/1 2017

**Tillåtna hjälpmedel:** Formelsamling i kretsteori.

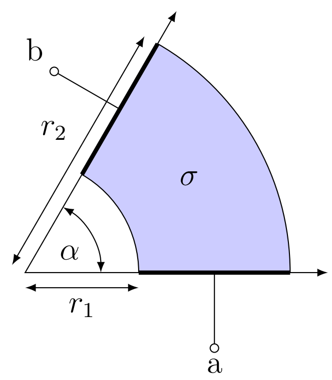
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

## 1



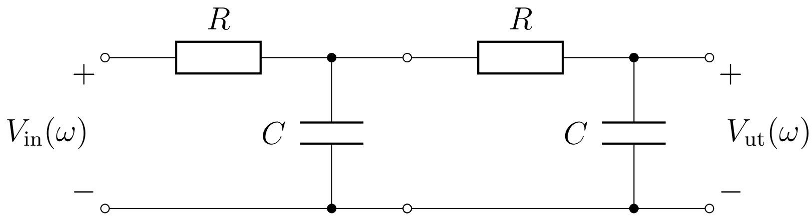

Beräkna Thèveninekvivalenten med avseende på nodparet ab.

## 2




Figuren ovan visar ett område begränsat av en cirkelsektor med öppningsvinkel $\alpha$, radierna $r_1$ och $r_2$ och med tjocklek $d$ in i papperet, samt ledningsförmåga $\sigma$. De tjocka linjerna vid anslutningarna a och b är metallbelagda. Beräkna resistansen $R_{\mathrm{ab}}$.

## 3




Två filter kaskadkopplas enligt ovan.
a) Beräkna överföringsfunktionen $H(\omega) = V_{\text{ut}}(\omega)/V_{\text{in}}(\omega)$.
b) Vilket av nedanstående diagram svarar mot denna överföringsfunktion? Motivera ditt svar tydligt genom att identifiera egenskaper i diagrammet som kan kopplas till ditt svar i a).

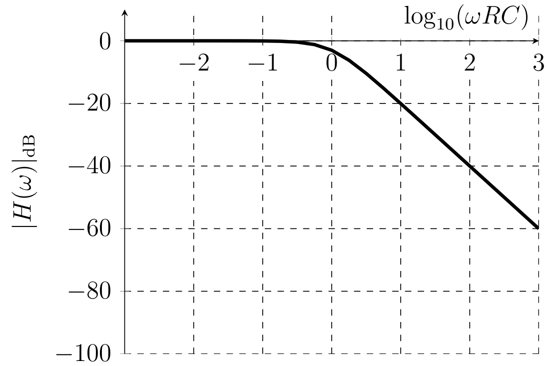



Diagram 1

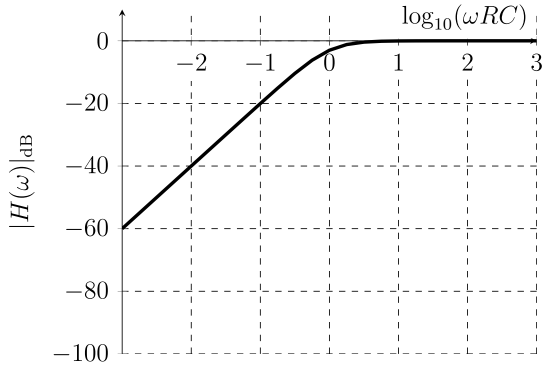



Diagram 2

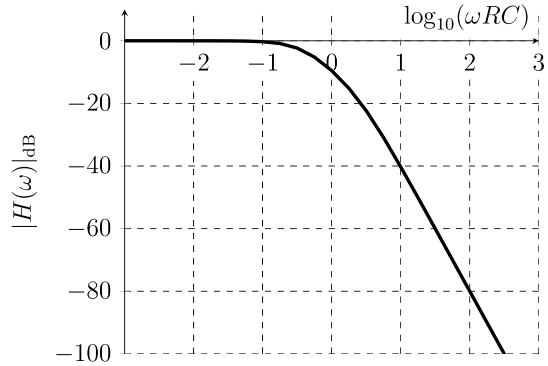



Diagram 3

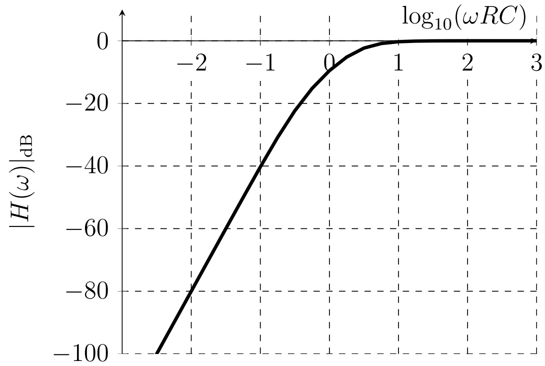
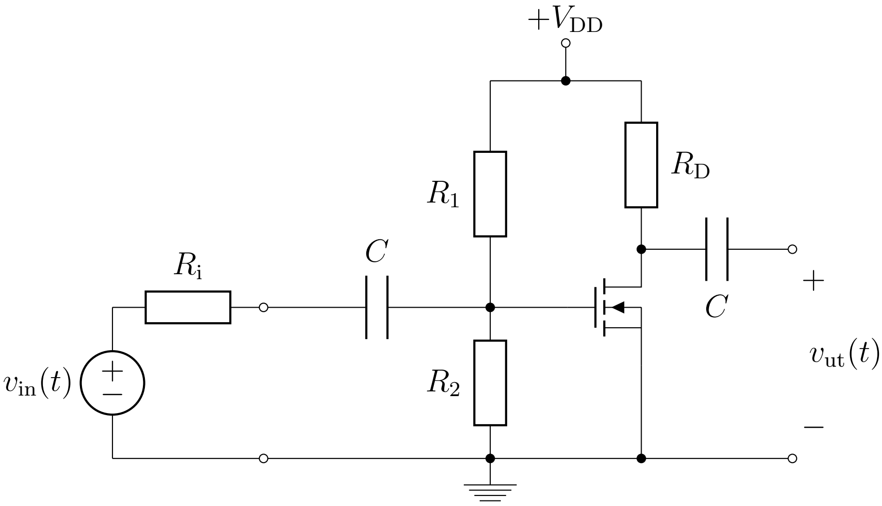


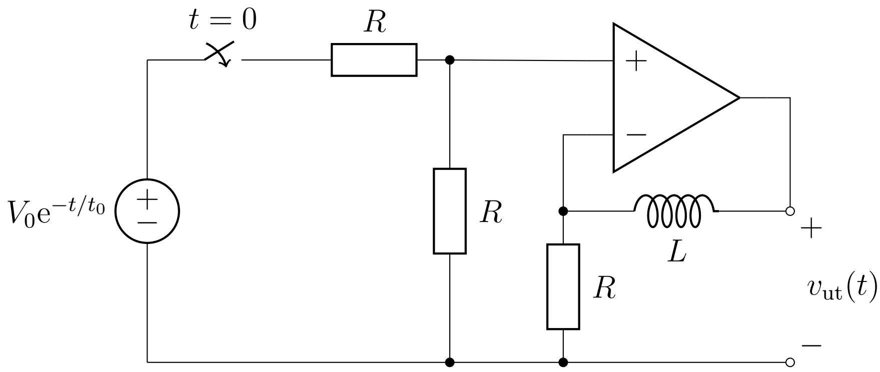

Diagram 4

**4**



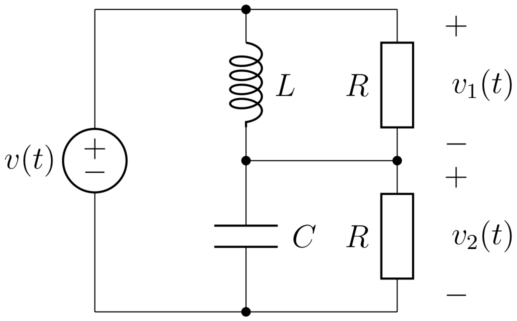

Kapacitanserna i ovanstående krets är kopplingskapacitanser och kan ersättas med kortslutningar för småsignalen. Anta att småsignalparametrarna för transistorn är kända.
a) Rita småsignalschemat för kretsen.
b) Beräkna förstärkningen $v_{\mathrm{ut}}/v_{\mathrm{in}}$.

**5**

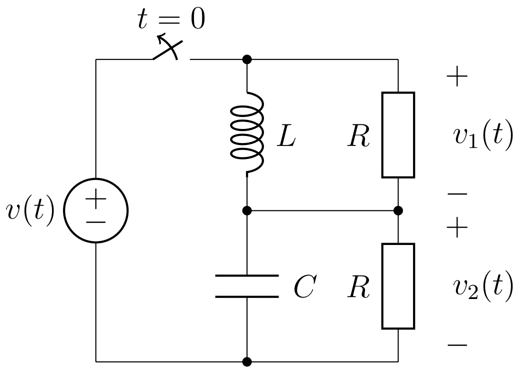



Operationsförstärkaren är ideal, kretsen är energitom för $t < 0$, och strömbrytaren sluts vid $t = 0$. Bestäm $v_{\mathrm{ut}}(t)$ för $t > 0$.

## 6



(a)



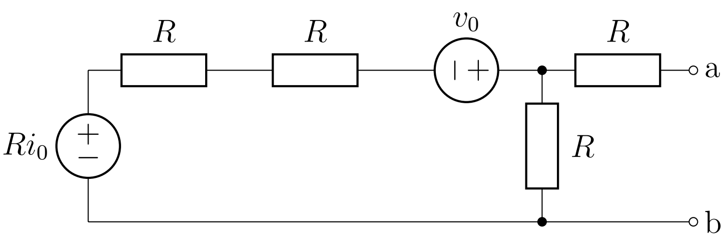
(b)

Spänningskällan ges av $v(t) = V_0 \cos \omega t$, och kretsparametrar och frekvens är valda så att $\omega RC = 1$ och $\omega L/R = 1$.
a) Beräkna $v_1(t)$ och $v_2(t)$ för kretsen i figur (a) ovan.
b) Beräkna $v_1(t)$ och $v_2(t)$ för $t > 0$ i för kretsen i figur (b) ovan, där strömbrytaren är sluten för $t < 0$ och öppnas vid $t = 0$. Om du inte klarat a) får du byta spänningskällan till en likspänningskälla, $v(t) = V_0$, i denna deluppgift.

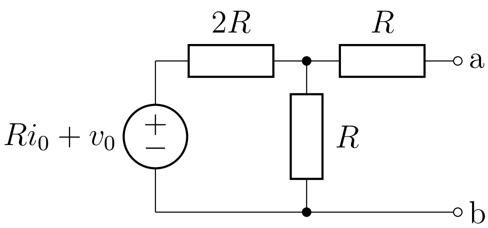
# Lösningar

## 1

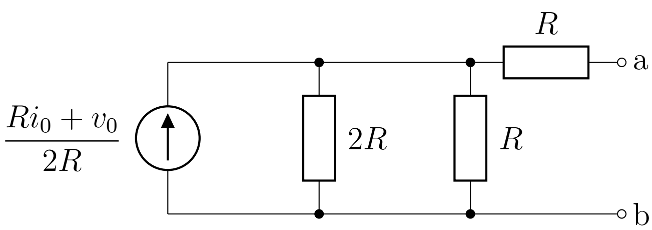
Vi löser problemet genom successiva ekvivalentomvandlingar. Först görs Norton-ekvivalenten längst ut till vänster om till Thèvenin:



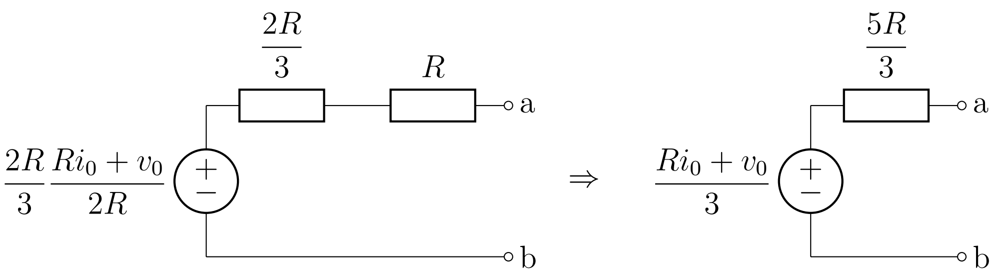

Seriekopplingen i länken till höger kan förenklas till




Länken längst ut till vänster görs om till Norton:



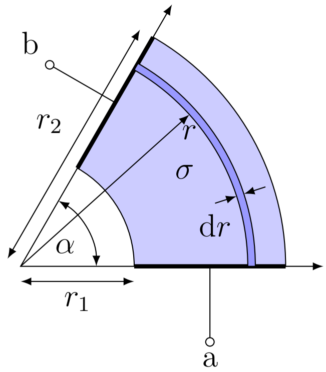

Parallellkopplingen blir $\frac{2RR}{2R+R} = 2R/3$. En sista omvandling till Thèvenin ger nu




<u>Svar:</u> Se ovan.

## 2

Symmetri ger att strömmen går längs cirkelbanor (konstant radie), och vi kan dela upp geometrin i flera parallella rör enligt nedan:




Ett sådant rör har konduktans

$$\mathrm{d}G = \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\ell} = \frac{\sigma d\,\mathrm{d}r}{r\alpha}$$

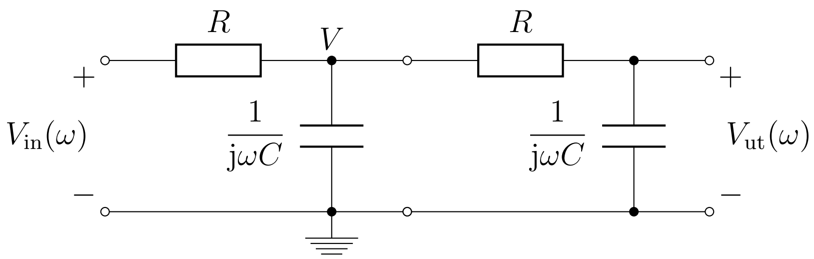
där $\mathrm{d}S = d\,\mathrm{d}r$ är tvärsnittsytan på röret och $\ell = r\alpha$ är dess längd. Samtliga rör är parallellkopplade mellan a och b, varför vi får

$$G = \int \mathrm{d}G = \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{\sigma d\,\mathrm{d}r}{r\alpha} = \frac{\sigma d}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sigma d}{\alpha}[\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma d}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{G} = \frac{\alpha}{\sigma d\ln(r_2/r_1)}$$

Svar: $R = \dfrac{\alpha}{\sigma d\ln(r_2/r_1)}$.

## 3

a) Sätt ut en nodpotential $V$ och jord enligt nedan:




KCL i den högra noden ger

$$\frac{V_{\text{ut}} - V}{R} + V_{\text{ut}}\mathrm{j}\omega C = 0 \quad \Rightarrow \quad V = (1 + \mathrm{j}\omega RC)V_{\text{ut}}$$

KCL i den mittersta noden ger

$$\frac{V - V_{\text{in}}}{R} + V\mathrm{j}\omega C + \frac{V - V_{\text{ut}}}{R} = 0$$

vilket efter multiplikation med $R$ kan skrivas

$$(2 + \mathrm{j}\omega RC)V - V_{\text{ut}} = V_{\text{in}}$$

Insättning av $V = (1 + j\omega RC)V_{\mathrm{ut}}$ ger

$$V_{\mathrm{in}} = (2 + j\omega RC)(1 + j\omega RC)V_{\mathrm{ut}} - V_{\mathrm{ut}} = (2 + 3j\omega RC - (\omega RC)^2 - 1)V_{\mathrm{ut}}$$

vilket ger överföringsfunktionen

$$H(\omega) = \frac{V_{\mathrm{ut}}}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{1}{1 - (\omega RC)^2 + 3j\omega RC}$$

b) Vi noterar de asymptotiska beteendena

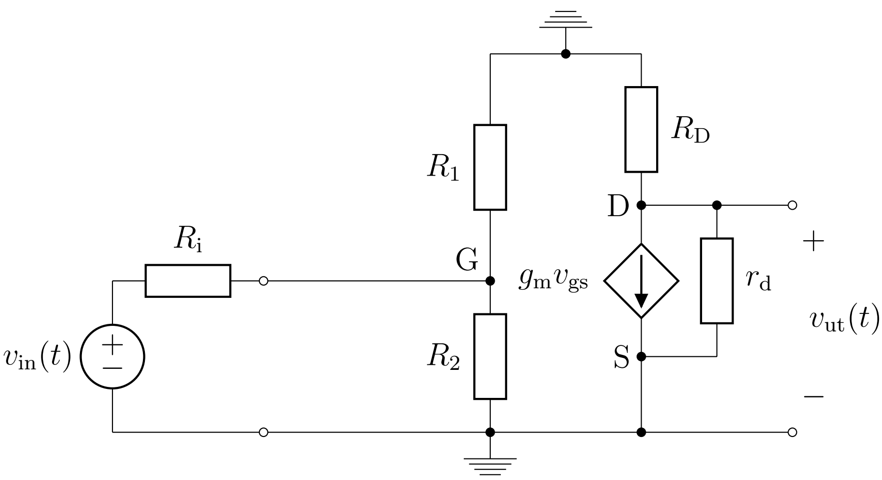
$$\begin{aligned} &H(\omega) \to 1 && \omega \to 0 \\ &H(\omega) \to \frac{-1}{(\omega RC)^2} && \omega \to \infty \end{aligned}$$

I dB-skala betyder detta att amplituden är 0 dB för låga frekvenser, och avtar med 40 dB per frekvensdekad för höga frekvenser. Detta stämmer med Diagram 3, medan inget av de andra diagrammen överensstämmer med detta beteende.

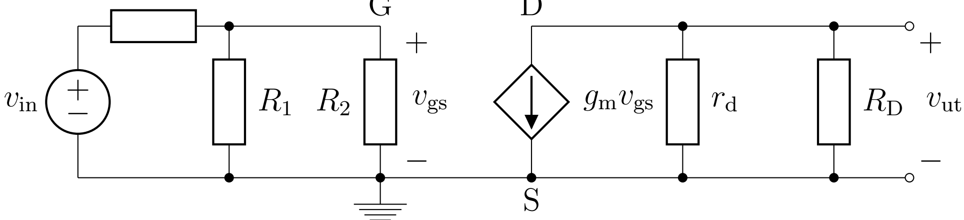
Svar: a) $H(\omega) = \dfrac{V_{\mathrm{ut}}}{V_{\mathrm{in}}} = \dfrac{1}{1 - (\omega RC)^2 + 3j\omega RC}$. b) Diagram 3 stämmer med $H(\omega)$.

# 4

a) Småsignalschemat fås genom att ersätta alla kopplingskapacitanser och likspänningskällor med kortslutningar, samt ersätta transistorn med sin småsignalmodell. Vi får då




Vi renritar enligt



b) Vi finner nu att

$$v_{\mathrm{gs}} = \frac{R_1 \| R_2}{R_1 \| R_2 + R_{\mathrm{i}}} v_{\mathrm{in}} = \frac{1}{1 + R_{\mathrm{i}}/(R_1 \| R_2)} = \frac{1}{1 + R_{\mathrm{i}}(1/R_1 + 1/R_2)} v_{\mathrm{in}}$$

Utspänningen är

$$v_{\mathrm{ut}} = -(r_{\mathrm{d}} \| R_{\mathrm{D}}) g_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{gs}} = -\frac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{D}}} \frac{1}{1 + R_{\mathrm{i}}(1/R_1 + 1/R_2)} v_{\mathrm{in}}$$

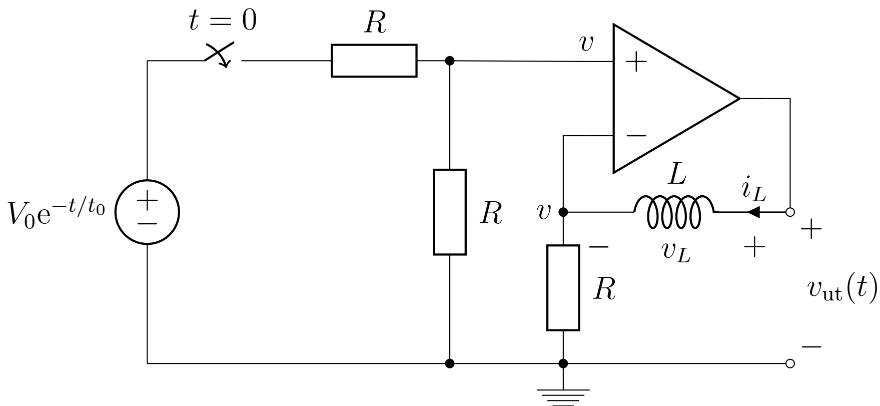
Förstärkningen är då

$$\frac{v_{\mathrm{ut}}}{v_{\mathrm{in}}} = -\frac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{D}}} \frac{1}{1 + R_{\mathrm{i}}(1/R_1 + 1/R_2)}$$

Svar: a) Se figur ovan. b) Förstärkningen är $\dfrac{v_{\mathrm{ut}}}{v_{\mathrm{in}}} = -\dfrac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{D}}} \dfrac{1}{1 + R_{\mathrm{i}}(1/R_1 + 1/R_2)}$.

# 5

Att kretsen är energitom för $t < 0$ betyder att strömmen genom induktansen är noll vid $t = 0$. Introducera nodpotential $v$ vid OP:ns ingångar (samma potential vid båda ingångarna eftersom negativ återkoppling används).




Eftersom ingen ström kan gå in vid operationsförstärkarens ingångar kan den vänstra delen av kretsen analyseras fristående. Spänningsdelning ger

$$v = \frac{1}{2} V_0 e^{-t/t_0}$$

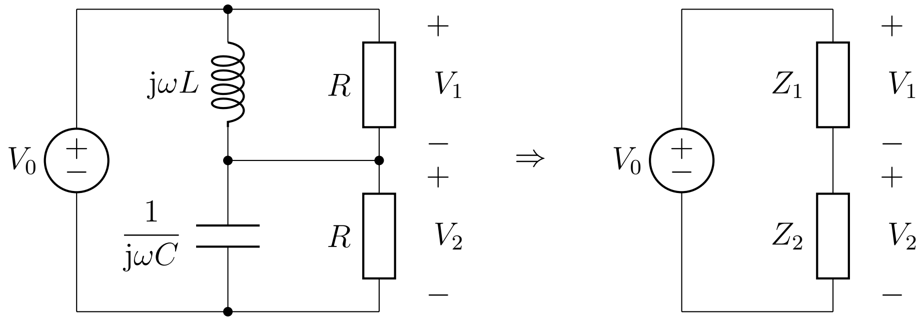
Resistansen kopplad till OP:ns negativa ingång ger att $i_L = v/R$. Vi har sedan den totala utspänningen som summan av spänningen över resistansen och induktansen,

$$v_{\mathrm{ut}} = v + v_L = v + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} V_0 e^{-t/t_0} + \frac{LV_0}{2R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-t/t_0} = \frac{V_0}{2}\left(1 - \frac{L}{Rt_0}\right) e^{-t/t_0}$$

Svar: Utspänningen är $v_{\mathrm{ut}}(t) = \dfrac{V_0}{2}\left(1 - \dfrac{L}{Rt_0}\right) e^{-t/t_0}$ för $t > 0$.

## 6

a) Källan är tidsharmonisk så vi löser problemet i frekvensdomänen för de komplexa amplituderna $V_1$ och $V_2$:




Impedanserna ges av parallellkopplingar, $\omega RC = 1$ och $\omega L/R = 1$,

$$Z_1 = \frac{\mathrm{j}\omega LR}{\mathrm{j}\omega L + R} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{1 + \mathrm{j}\omega L/R} = \frac{\mathrm{j}R}{1+\mathrm{j}}$$
$$Z_2 = \frac{R/(\mathrm{j}\omega C)}{R + 1/(\mathrm{j}\omega C)} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{R}{1+\mathrm{j}}$$

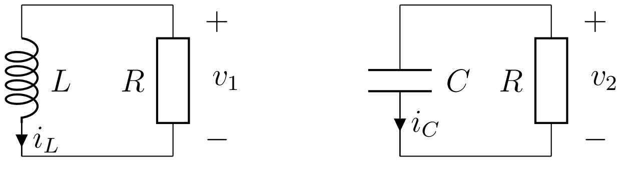
De komplexa amplituderna är

$$V_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V_0 = \frac{\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} V_0 = \frac{\mathrm{j}(1-\mathrm{j})}{(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})} = \frac{1+\mathrm{j}}{2} V_0 = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}}{\sqrt{2}} V_0$$
$$V_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_0 = \frac{1}{1+\mathrm{j}} V_0 = \frac{1-\mathrm{j}}{(1+\mathrm{j})(1-\mathrm{j})} = \frac{1-\mathrm{j}}{2} V_0 = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}}{\sqrt{2}} V_0$$

De tidsberoende spänningarna blir då

$$v_1(t) = \mathrm{Re}\{V_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \cos(\omega t + \pi/4)$$
$$v_2(t) = \mathrm{Re}\{V_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 \cos(\omega t - \pi/4)$$

b) Då strömbrytaren slås av kan ingen ström flöda mellan slingorna, och de kan betraktas oberoende av varandra:




Respektive krets laddar ur sin uppladdade energi svarande mot begynnelsevärden $i_L(0)$ och $v_2(0)$ via ett exponentiellt tidsförlopp. Detta kan härledas genom de konstitutiva relationerna för induktansen, kapacitansen och resistansen (notera minustecknen som uppstår på grund av referensriktningarna):

$$v_1 = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -Ri_L \qquad\qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_2}{R}$$

Lösningarna till dessa differentialekvationer är

$$
\begin{aligned}
&i_L(t) = i_L(0)\mathrm{e}^{-tR/L} \quad \Rightarrow \quad v_1(t) = -Ri_L(t) = -Ri_L(0)\mathrm{e}^{-tR/L} \\
&v_2(t) = v_2(0)\mathrm{e}^{-t/(RC)}
\end{aligned}
$$

Begynnelsevärdena kan beräknas från lösningen i a). Den komplexa amplituden för strömmen ges av

$$
I_L = \frac{V_1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{\frac{\mathrm{j}V_0}{1+\mathrm{j}}}{\mathrm{j}R} = \frac{1}{1+\mathrm{j}}\frac{V_0}{R} = \frac{1-\mathrm{j}}{2}\frac{V_0}{R} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}}{\sqrt{2}}\frac{V_0}{R}
$$

med tidsberoendet

$$
i_L(t) = \mathrm{Re}\{I_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{V_0}{R}\cos(\omega t - \pi/4)
$$

Eftersom strömmen genom en induktans är kontinuerlig, och spänningen över en kapacitans är kontinuerlig, så får vi begynnelsevärdena (där vi använder att $\cos(\pm\pi/4) = 1/\sqrt{2}$)

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{1}{2}\frac{V_0}{R} \quad &\Rightarrow \quad v_1(t) &= -\frac{1}{2}V_0\mathrm{e}^{-tR/L}, \quad t > 0 \\
v_2(0) &= \frac{1}{2}V_0 \quad &\Rightarrow \quad v_2(t) &= \frac{1}{2}V_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad t > 0
\end{aligned}
$$

Om spänningskällan i stället hade varit tidskonstant, $v(t) = V_0$, hade vi fått $i_L(0) = V_0/R$ och $v_2(0) = V_0$, eftersom induktansen då ser ut som en kortslutning och kapacitansen som ett avbrott för $t < 0$.

Svar: a)

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= \mathrm{Re}\{V_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_0\cos(\omega t + \pi/4) \\
v_2(t) &= \mathrm{Re}\{V_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_0\cos(\omega t - \pi/4)
\end{aligned}
$$

respektive b)

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= -\frac{1}{2}V_0\mathrm{e}^{-tR/L}, \quad t > 0 \\
v_2(t) &= \frac{1}{2}V_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad t > 0
\end{aligned}
$$

För en tidskonstant källa $v(t) = V_0$ är svaret till b-uppgiften

$$
\begin{aligned}
v_1(t) &= -V_0\mathrm{e}^{-tR/L}, \quad t > 0 \\
v_2(t) &= V_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad t > 0
\end{aligned}
$$