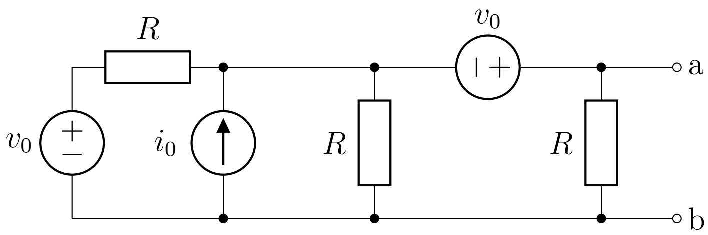
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 19/8 2016

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

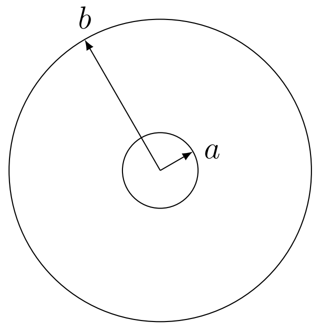
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1



Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet ab för ovanstående krets.

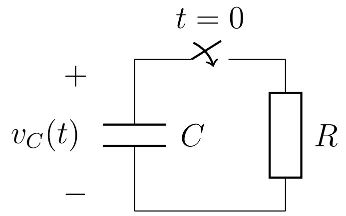
2



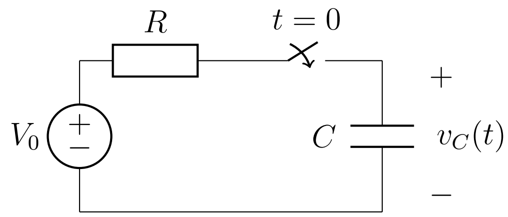
Ovanstående bild är en tvärsnittsgeometri av en koaxialkabel. Den inre ledaren har ytterradie a, och den yttre ledaren har innerradie b. Området mellan ledarna är fyllt med luft. Härled ett uttryck för kapacitansen per längdenhet.

3

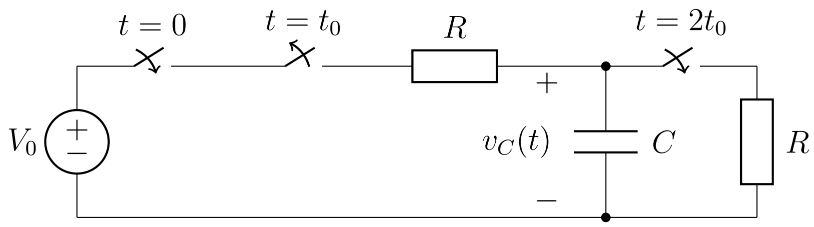
a) Vid $t = 0$ är $v_C(0) = V_0$ i nedanstående krets. Visa att $v_C(t) = V_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$ för $t > 0$.



b) Vid $t = 0$ är $v_C(0) = 0$ i nedanstående krets. Visa att $v_C(t) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)})$ för $t > 0$.

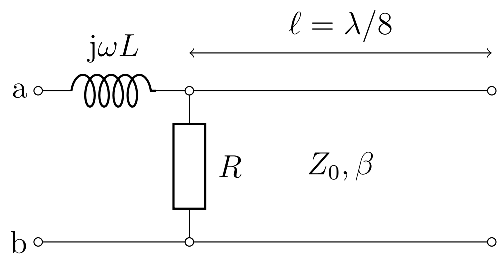


c) I nedanstående krets är den vänstra strömbrytaren öppen fram till $t = 0$, då den sluts. Den mittersta strömbrytaren är sluten fram till $t = t_0$, då den öppnas. Den högra strömbrytaren är öppen fram till $t = 2t_0$, då den sluts. Tiden t_0 är positiv, $t_0 > 0$. Kapacitansen C är energitom för $t < 0$.



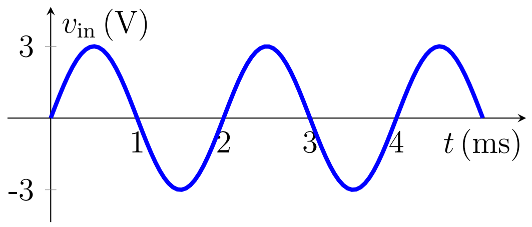
Rita kretsschema där strömbrytarna ersätts med avbrott eller kortslutning för vart och ett av fallen $0 < t < t_0$, $t_0 < t < 2t_0$, och $t > 2t_0$. Beräkna $v_C(t)$ för $t > 0$, med hjälp av formlerna från a) och b) ovan.

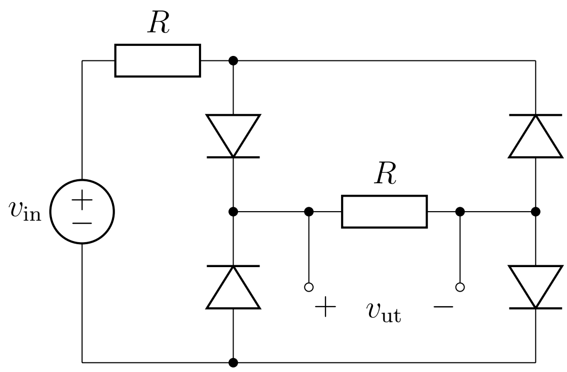
4



I ovanstående tidsharmoniska krets är en induktans L sammankopplad med en resistiv last R och en förlustfri transmissionsledning med längd $\lambda/8$, karakteristisk impedans Z_0 och vågtal $\beta = 2\pi/\lambda$. Ledningen har en öppen avslutning till höger (oändlig lastimpedans). Bestäm L så att impedansen Z_{ab} blir helt reell.

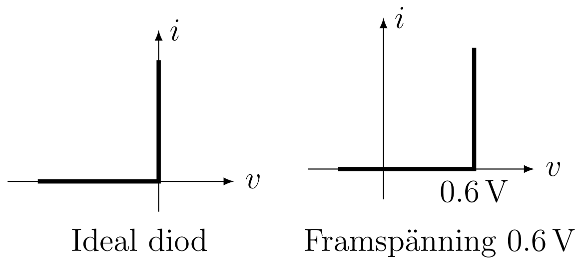
5



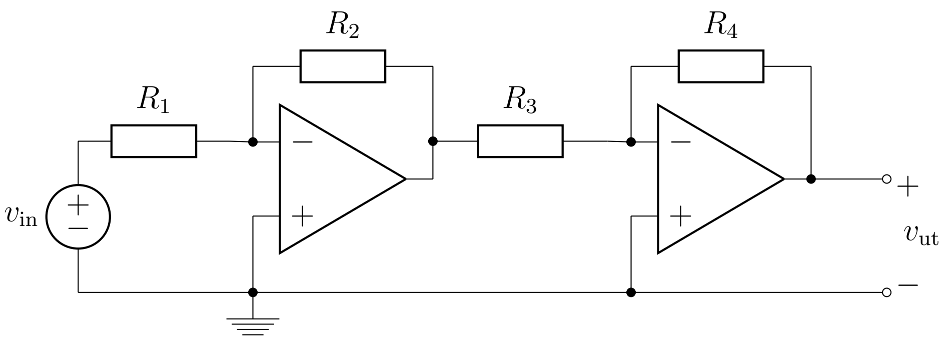


a) Antag att dioderna är ideala. Skissa utsignalen $v_{ut}(t)$.
b) Antag att dioderna kräver en framspänning 0.6 V för att kunna leda. Skissa utsignalen $v_{ut}(t)$ för detta fall. Vad blir maximala amplituden för v_{ut}?

Ström-spänningskarakteristik för dioderna



6

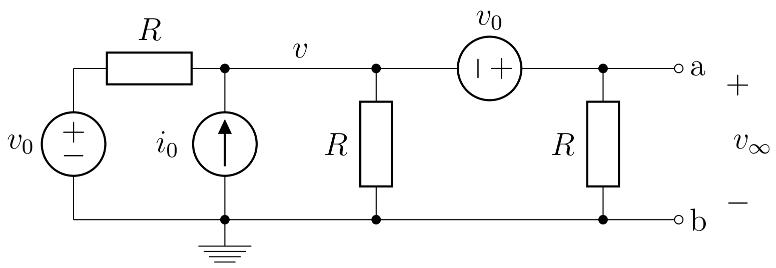


Operationsförstärkarna i kretsen ovan är ideala. Beräkna förstärkningen v_{ut}/v_{in}.

Lösningar

1

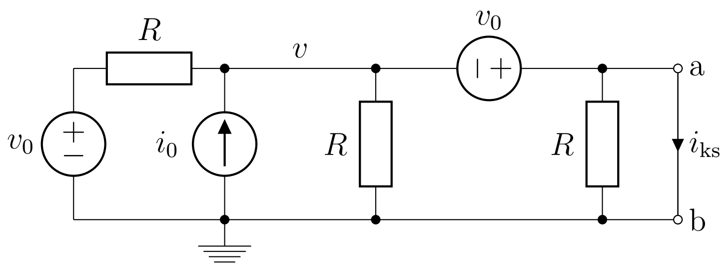
Vi börjar med att bestämma tomgångsspänningen v_∞.



Nodpotentialen v ges direkt av KVL som $v = v_\infty - v_0$. KCL i noden ovanför strömkällan är då

$$0 = \frac{v - v_0}{R} - i_0 + \frac{v}{R} + \frac{v_\infty}{R} = \frac{v_\infty - 2v_0}{R} - i_0 + \frac{v_\infty - v_0}{R} + \frac{v_\infty}{R} \quad \Rightarrow \quad v_\infty = v_0 + \frac{Ri_0}{3}$$

Kortslutningsströmmen i_{ks} ges av nedanstående krets:



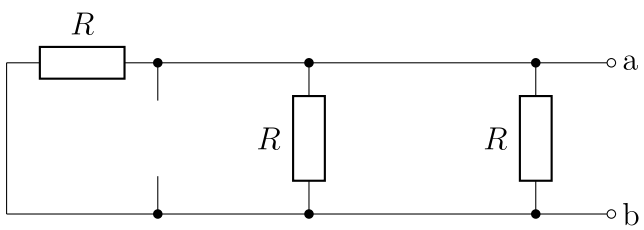
Nodpotentialen v är i detta fall $v = -v_0$. Kortslutningen gör att ingen ström går genom resistansen mellan a och b, alltså går strömmen i_{ks} åt höger genom den liggande spänningskällan. KCL i noden ovanför strömkällan ger då

$$0 = \frac{v - v_0}{R} - i_0 + \frac{v}{R} + i_{\text{ks}} = \frac{-2v_0}{R} - i_0 - \frac{v_0}{R} + i_{\text{ks}} \quad \Rightarrow \quad i_{\text{ks}} = \frac{3v_0}{R} + i_0$$

Théveninresistansen R_{t} blir då

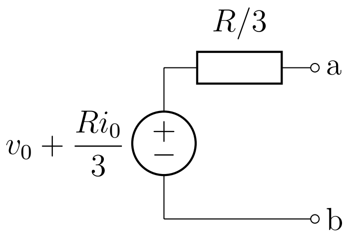
$$R_{\text{t}} = \frac{v_\infty}{i_{\text{ks}}} = \frac{v_0 + \frac{Ri_0}{3}}{\frac{3v_0}{R} + i_0} = \frac{R}{3}$$

Vi kan alternativt också beräkna den inre resistansen då spänningskällorna ersätts med kortslutningar och strömkällan med avbrott:



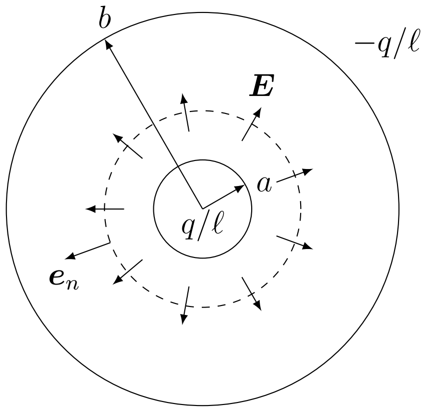
$$\Rightarrow \quad R_{\text{t}} = R_{\text{ab}} = \frac{R}{3}$$

Svar: Théveninekvivalenten till kretsen är



2

Ansätt en laddning q/ℓ per längdenhet på innerledaren, och $-q/\ell$ på ytterledaren. Av symmetriskäl kommer det elektriska fältet endast peka i cylinderradiens riktning, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}}$.



Använd Gauss lag och integrera utflödet av elektriskt fält genom en cylinderyta S med radie r_c och längd ℓ som omger innerledaren (streckad cirkel i tvärsnittsbilden ovan), resultatet blir alltid lika med den inneslutna laddningen oavsett radien r_c:

$$q = \oint_S \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_n \,\mathrm{d}S = \int_{\text{mantelytan}} \epsilon_0 E(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \,\mathrm{d}S = \epsilon_0 E(r_\mathrm{c}) 2\pi r_\mathrm{c}\ell \quad \Rightarrow \quad E(r_\mathrm{c}) = \frac{q/\ell}{2\pi r_\mathrm{c}}$$

Integralen reduceras till en integral över mantelytan eftersom $\boldsymbol{E}$ är vinkelrät mot ytnormalen på cylinderns kortändor. Integranden $\epsilon_0 E(r_\mathrm{c})$ är dessutom konstant på denna yta, så integralen svarar bara mot multiplikation med mantelytan $2\pi r_\mathrm{c}\ell$.

När vi nu känner elektriska fältet, kan vi integrera det för att erhålla spänningen mellan metallcylindrarna:

$$v_a - v_b = \int_{r_\mathrm{c}=a}^{b} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b E(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = \int_a^b E(r_\mathrm{c}) \,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = \frac{q/\ell}{2\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{r_\mathrm{c}} = \frac{q/\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

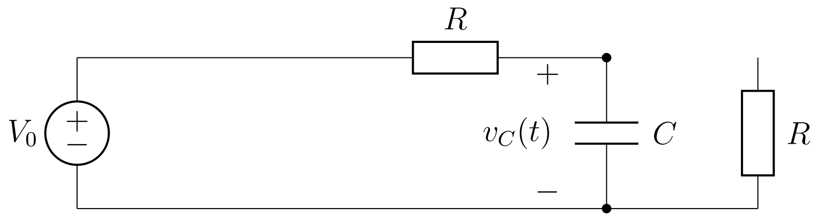
Kapacitansen är då

$$C = \frac{q}{v_a - v_b} = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln\frac{b}{a}} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{\ell} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$$

<u>Svar:</u> $\dfrac{C}{\ell} = \dfrac{2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$.

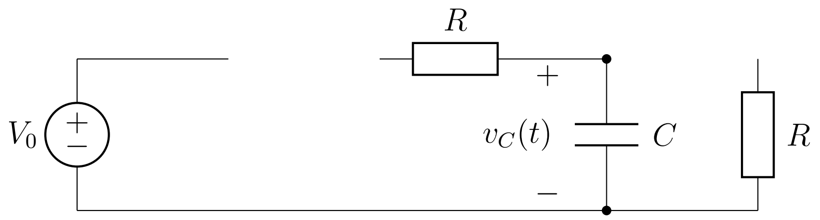
3

a) Se kursboken för härledning av $v_C(t) = V_0 \mathrm{e}^{-t/(RC)}$.
b) Se kursboken för härledning av $v_C(t) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)})$.
c) Kapacitansen är energitom för negativa tider, vilket ger $v_C(0) = 0$. För $0 < t < t_0$ har vi följande krets:



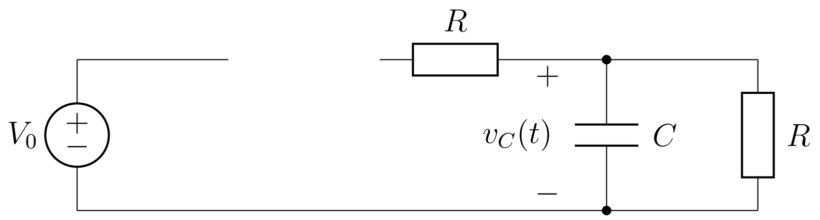
Spänningen $v_C(t)$ svarar nu mot uppladdning av en kapacitans, $v_C(t) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)})$.

För $t_0 < t < 2t_0$ har vi följande krets:



Spänningen är nu konstant, $v_C(t) = v_C(t_0) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t_0/(RC)})$.

För $t > 2t_0$ har vi följande krets:



Spänningen $v_C(t)$ svarar nu mot urladdning av en kapacitans med begynnelsevärde $v_C(2t_0) = v_C(t_0) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t_0/(RC)})$. Detta ger

$$v_C(t) = v_C(2t_0)\mathrm{e}^{-(t-2t_0)/(RC)} = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t_0/(RC)})\mathrm{e}^{-(t-2t_0)/(RC)}$$

<u>Svar:</u> Spänningen $v_C(t)$ för positiva tider ges av

$$v_C(t) = \begin{cases} V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}) & 0 < t < t_0 \\ V_0(1 - \mathrm{e}^{-t_0/(RC)}) & t_0 < t < 2t_0 \\ V_0(1 - \mathrm{e}^{-t_0/(RC)})\mathrm{e}^{-(t-2t_0)/(RC)} & t > 2t_0 \end{cases}$$

4

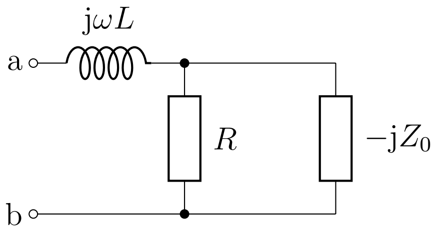
En förlustfri transmissionsledning med karakteristisk impedans Z_0, längd ℓ och vågtal β avslutad med en lastimpedans Z_L kan ersättas med en ekvivalent in-impedans (se formelsamlingen)

$$Z_\mathrm{in} = Z_0 \frac{1 + \mathit{\Gamma} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}{1 - \mathit{\Gamma} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}, \quad \mathit{\Gamma} = \frac{Z_\mathrm{L} - Z_0}{Z_\mathrm{L} + Z_0}$$

Med en öppen avslutning har vi $Z_\mathrm{L} = \infty$, och därmed $\Gamma = 1$. Vi får då (där vi använder $\beta = 2\pi/\lambda$ och $\ell = \lambda/8$ för att finna $2\beta\ell = \pi/2$)

$$Z_\mathrm{in} = Z_0 \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}} = Z_0 \frac{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}} = Z_0 \frac{1 - \mathrm{j}}{1 + \mathrm{j}} = -\mathrm{j}Z_0$$

Kretsen blir då



med impedans

$$Z_\mathrm{ab} = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-\mathrm{j}Z_0}} = \mathrm{j}\omega L + \frac{\frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}Z_0}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_0}\right)^2} = \mathrm{j}\omega L + \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_0}\right)^2} - \mathrm{j}\frac{\frac{1}{Z_0}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_0}\right)^2}$$

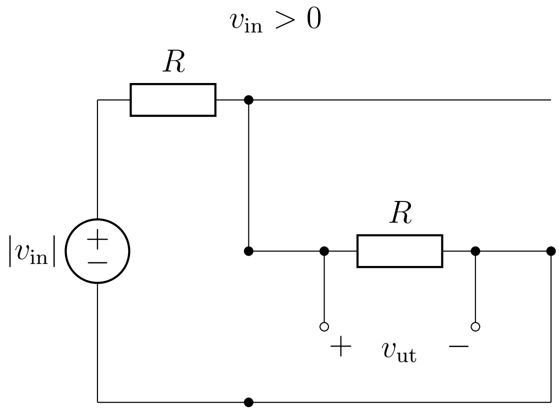
Sätter vi imaginärdelen av detta uttryck till noll kan vi lösa ut L som

$$L = \frac{1}{\omega}\frac{\frac{1}{Z_0}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_0}\right)^2} = \frac{Z_0/\omega}{1 + (Z_0/R)^2}$$

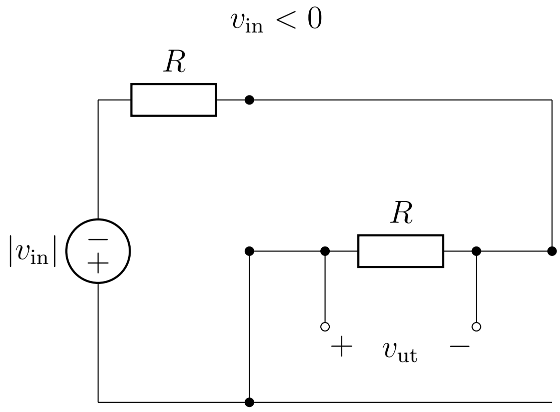
Svar: $L = \dfrac{Z_0/\omega}{1 + (Z_0/R)^2}$.

5

a) För ideala dioder och $v_\mathrm{in} > 0$ och $v_\mathrm{in} < 0$ gäller

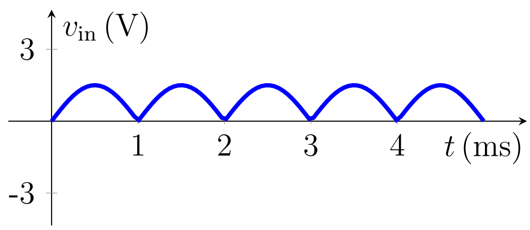


$v_\mathrm{ut} = |v_\mathrm{in}|/2$



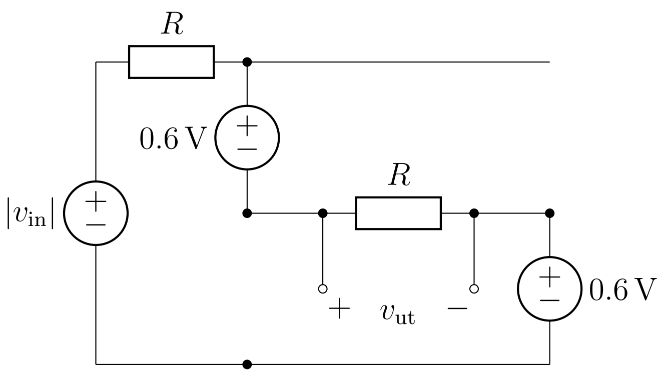
$v_\mathrm{ut} = |v_\mathrm{in}|/2$

Utsignalen blir då



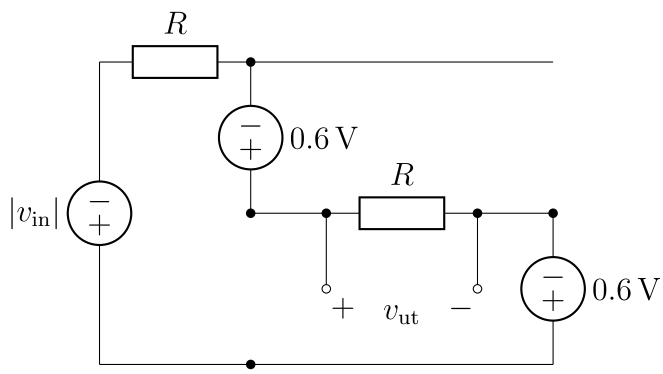
b) Om dioderna kräver 0.6 V för att leda, gäller att ingen ström kan gå genom resistansen där v_{ut} är definierad så länge $|v_{\text{in}}| < 2 \cdot 0.6\,\text{V}$. Utsignalen är därmed $v_{\text{ut}} = 0$ för $|v_{\text{in}}| < 1.2\,\text{V}$. För övriga fall har vi (där maximala amplituden ges av $(3 - 1.2)/2 = 0.9\,\text{V}$)

$v_{\text{in}} > 1.2\,\text{V}$



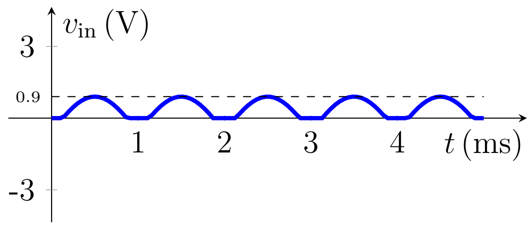
$v_{\text{ut}} = (|v_{\text{in}}| - 1.2\,\text{V})/2$

$v_{\text{in}} < -1.2\,\text{V}$



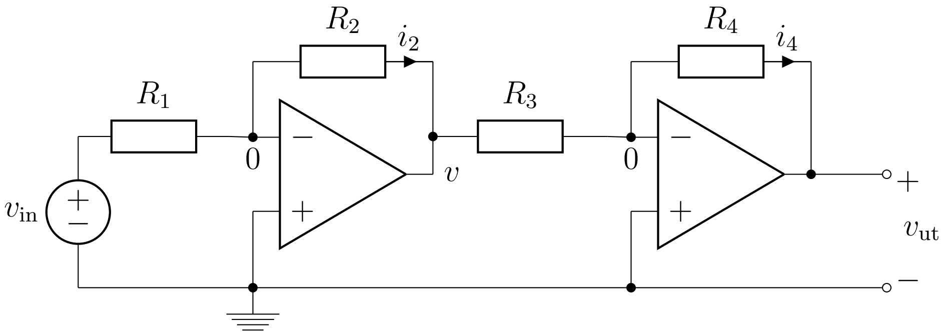
$v_{\text{ut}} = (|v_{\text{in}}| - 1.2\,\text{V})/2$

Utsignalen blir då



6

De två operationsförstärkarna är båda negativt återkopplade, vilket leder till att potentialen på deras ingångar är lika (alla lika med noll eftersom plus-ingångarna är jordade). Inför nodpotential v och strömmar i_2 och i_4 enligt nedan:



Eftersom ingen ström kan gå in i minusingången på den vänstra OP:n, går strömmen i_2 även genom resistansen R_1. Vi har då

$$i_2 = \frac{v_{\text{in}}}{R_1} \quad \Rightarrow \quad v = -R_2 i_2 = -\frac{R_2}{R_1} v_{\text{in}}$$

Räkningen upprepas för OP:n till höger, dvs i_4 går även genom R_3 vilket ger

$$i_4 = \frac{v}{R_3} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{ut}} = -R_4 i_4 = -\frac{R_4}{R_3} v = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1} v_{\text{in}}$$

Svar: Förstärkningen är $v_{\text{ut}}/v_{\text{in}} = \frac{R_4 R_2}{R_3 R_1}$.