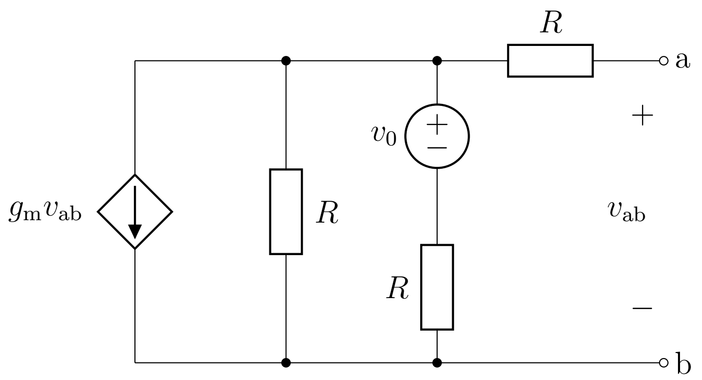
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 4/6 2016

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

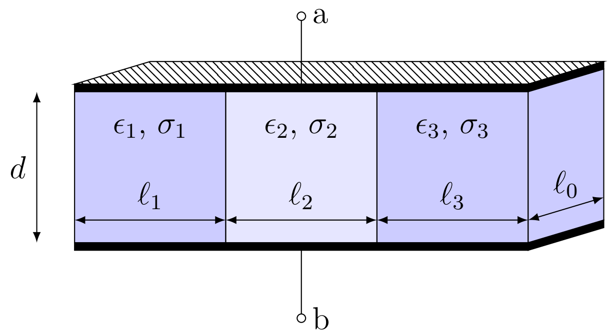
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet ab för nedanstående krets.



2



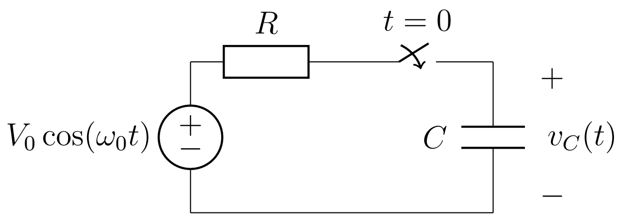
Tre rätblock med permittiviteter $\epsilon_{1,2,3}$, konduktiviteter $\sigma_{1,2,3}$ och bredder $\ell_{1,2,3}$ enligt ovan är placerade mellan två metallskivor a och b. Avståndet mellan plattorna är d, och alla rätblock har längden ℓ_0.

a) Rita en kretsmodell där rätblocken ersätts med resistanser och kapacitanser sammankopplade i ett nät där anslutningarna a och b ska framgå. Resistanser och kapacitanser ska uttryckas i material- och geometriparametrarna givna ovan. Du behöver inte härleda formlerna för kretsparametrarna.

b) Beräkna den komplexa impedansen $Z_{ab}(\omega)$ vid vinkelfrekvensen ω. Svaret kan ges på formen $\frac{a+jb}{c+jd}$.

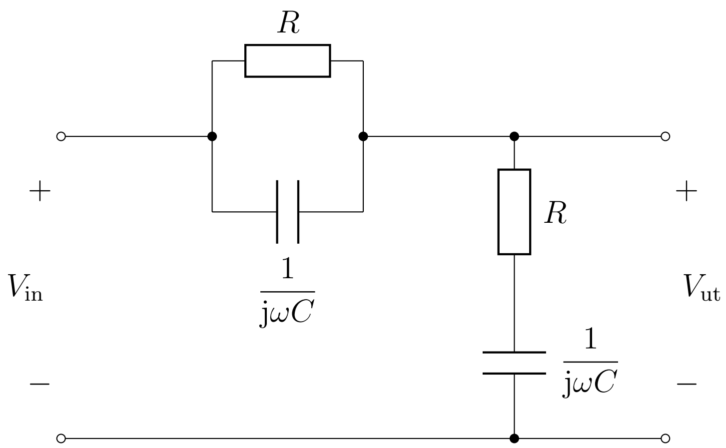
3

Kapacitansen C nedan är energitom vid $t = 0$. Beräkna spänningen $v_C(t)$ för $t > 0$.



Du får använda det matematiska resultatet $\int_0^t e^{at'} \cos(bt')\,dt' = \frac{e^{at}(a\cos(bt)+b\sin(bt))-a}{a^2+b^2}$, eller att inversa Laplacetransformen av $\frac{s}{(s+a)(s^2+b^2)}$ är $\frac{a\cos(bt)+b\sin(bt)-ae^{-at}}{a^2+b^2}\mathrm{u}(t)$.

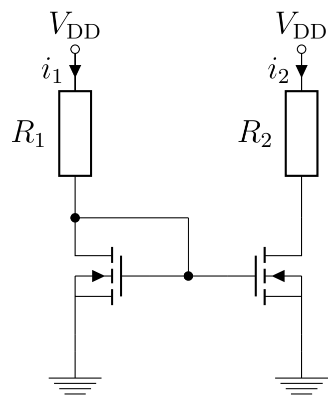
4



a) Bestäm överföringsfunktionen $H(\omega) = V_{\text{ut}}/V_{\text{in}}$.
b) Vid vilken ändlig vinkelfrekvens ω $(0 < \omega < \infty)$ är utsignalen i fas med insignalen? Vad är $H(\omega)$ vid denna vinkelfrekvens?

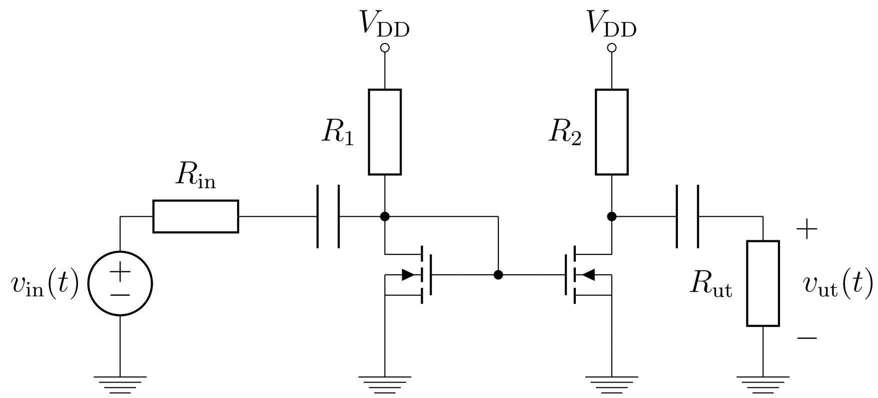
5

a) En så kallad strömspegel kan användas för att kopiera en ström i_1 till en ström i_2 som i kretsen nedan. Vi antar att transistorerna är identiska.



Visa att då båda transistorerna befinner sig i det mättade området gäller $i_2 = i_1$ oavsett val av R_1 och R_2 (ingen uppdelning i småsignal och storsignal behövs).

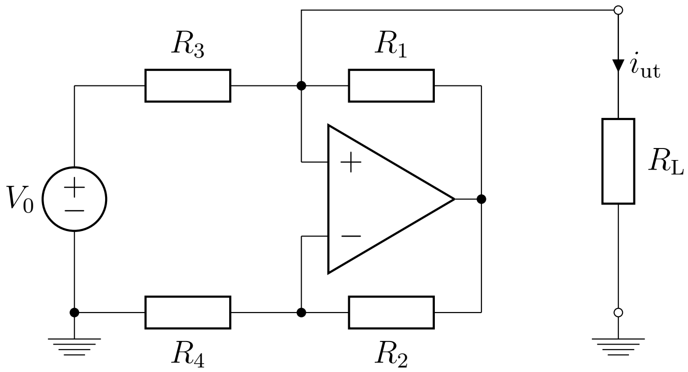
b) Koppla nu in en småsignalkälla till vänster och ta ut en utsignal till höger enligt nedanstående krets, där kapacitanserna kan anses utgöra kortslutningar för småsignalen. I småsignalmodellen för transistorerna kan vi anta att drain-resistansen r_{d} är mycket större än övriga resistanser, och kan därmed försummas.



Rita småsignalschema. Bestäm $v_{\text{ut}}/v_{\text{in}}$.

6

En operationsförstärkare kan användas för att bygga en ideal strömkälla, dvs en som levererar en och samma ström oavsett belastning. I nedanstående krets antas operationsförstärkaren vara ideal, och den negativa återkopplingen antas vara tillräcklig för att stabilisera kretsen.



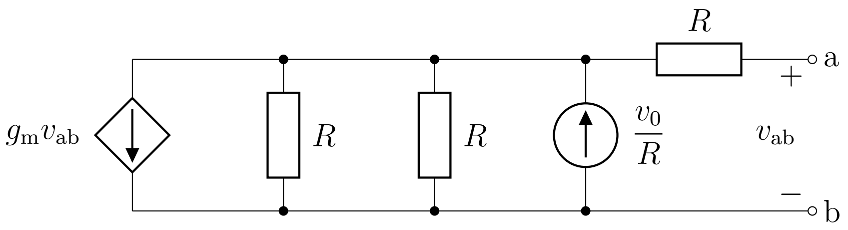
Beräkna i_{ut}. Bestäm ett villkor på R_1, R_2, R_3 och R_4 så att i_{ut} blir oberoende av R_L.

Lösningar

1

Eftersom kretsen innehåller en styrd strömkälla är det enklast att bestämma Thévenin-ekvivalenten genom att bestämma tomgångsspänning och kortslutningsström.

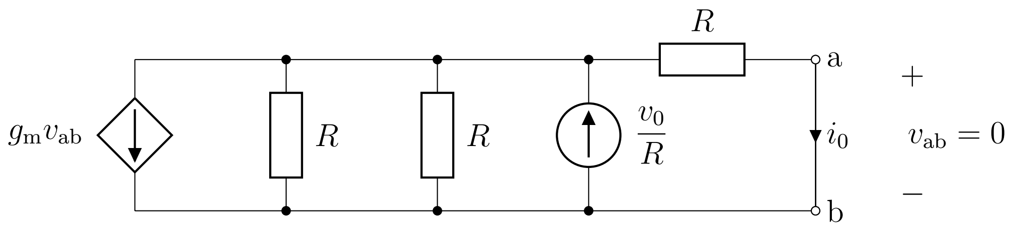
Börja med att omvandla länken med spänningskälla i serie med en resistans till en Norton-ekvivalent:



Tomgångsspänning: Då ingen last kopplas in mellan a och b går ingen ström genom resistansen längst till höger. Tomgångsspänningen $v_\infty = v_\mathrm{ab}$ är då också spänningen över alla de parallellkopplade komponenterna. Kirchhoffs strömlag i den övre vänstra noden är

$$g_\mathrm{m} v_\mathrm{ab} + \frac{v_\mathrm{ab}}{R} + \frac{v_\mathrm{ab}}{R} - \frac{v_0}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{ab} = \frac{v_0}{2 + g_\mathrm{m} R} = v_\infty$$

Kortslutningsström: Denna bestäms genom nedanstående krets.



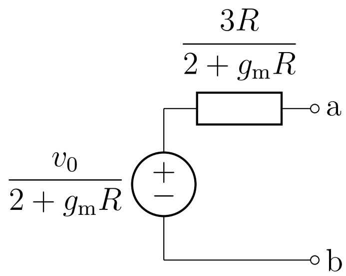
Eftersom $v_\mathrm{ab} = 0$ blir den styrda strömkällan ett avbrott (noll ström). Strömmen i_0 ges då av strömgrening av v_0/R som

$$i_0 = \frac{1/R}{1/R + 1/R + 1/R} \frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{3R}$$

Thévenin-resistansen är kvoten mellan tomgångsspänning och kortslutningsström:

$$R_\mathrm{t} = \frac{v_\infty}{i_0} = \frac{3R}{2 + g_\mathrm{m} R}$$

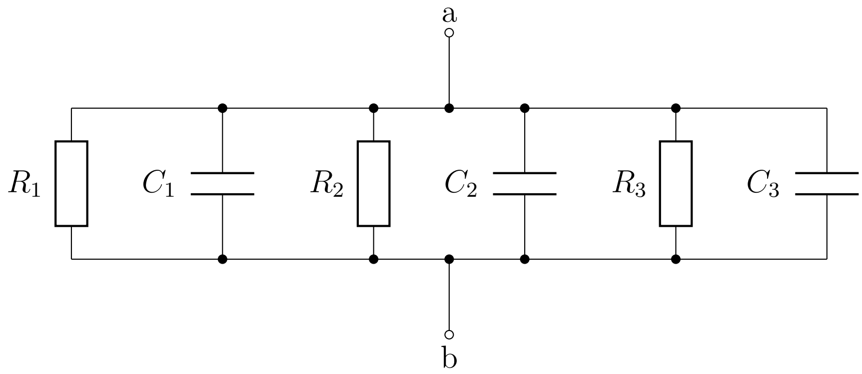
Följaktligen har vi följande Thévenin-ekvivalent:



<u>Svar:</u> Se ovan.

2

a) De tre rätblocken blir parallellkopplade eftersom de är anslutna till samma metallytor. Respektive rätblock består av en resistans parallellkopplad med en kapacitans.



Respektive resistans och kapacitans ges av formler för resistans för en lång rak tråd respektive en plattkondensator, eftersom det elektriska fältet är konstant genom respektive rätblock och riktat i normalriktningen mellan plattorna.

$$R_1 = \frac{d}{\sigma_1 \ell_1 \ell_0} \qquad R_2 = \frac{d}{\sigma_2 \ell_2 \ell_0} \qquad R_3 = \frac{d}{\sigma_3 \ell_3 \ell_0}$$
$$C_1 = \frac{\epsilon_1 \ell_1 \ell_0}{d} \qquad C_2 = \frac{\epsilon_2 \ell_2 \ell_0}{d} \qquad C_3 = \frac{\epsilon_3 \ell_3 \ell_0}{d}$$

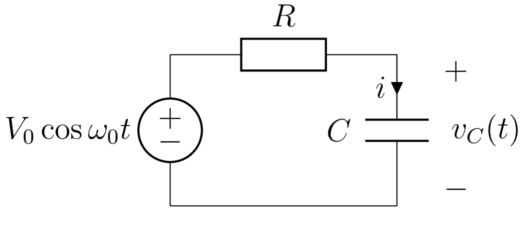
b) Den komplexa impedansen fås genom att beräkna impedansen för tre parallellkopplade resistanser, $R_{\text{ekv}} = 1/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3)$, parallellkopplade med tre parallellkopplade kapacitanser, $C_{\text{ekv}} = C_1 + C_2 + C_3$. Vi får då

$$\begin{aligned} Z_{\text{ab}}(\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{R_{\text{ekv}}} + \mathrm{j}\omega C_{\text{ekv}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \mathrm{j}\omega(C_1 + C_2 + C_3)} \\ &= \frac{d/\ell_0}{\sigma_1\ell_1 + \sigma_2\ell_2 + \sigma_3\ell_3 + \mathrm{j}\omega(\epsilon_1\ell_1 + \epsilon_2\ell_2 + \epsilon_3\ell_3)} \end{aligned}$$

<u>Svar:</u> a) Se kretsmodell ovan. b) $Z_{\text{ab}}(\omega) = \dfrac{d/\ell_0}{\sigma_1\ell_1 + \sigma_2\ell_2 + \sigma_3\ell_3 + \mathrm{j}\omega(\epsilon_1\ell_1 + \epsilon_2\ell_2 + \epsilon_3\ell_3)}$.

3

Då strömbrytaren slutits, $t > 0$, gäller



Kirchhoffs spänningslag ger

$$V_0 \cos \omega_0 t - Ri - v_C = 0$$

Med $i = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$ medför detta differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C}{RC} = \frac{V_0 \cos \omega_0 t}{RC}$$

med lösningen

$$v_C(t) = v_C(0)\mathrm{e}^{-t/(RC)} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t'-t)/(RC)} \frac{V_0 \cos \omega_0 t'}{RC}\,\mathrm{d}t'$$

Eftersom kapacitansen var energitom vid $t = 0$ har vi $v_C(0) = 0$, och det matematiska resultatet

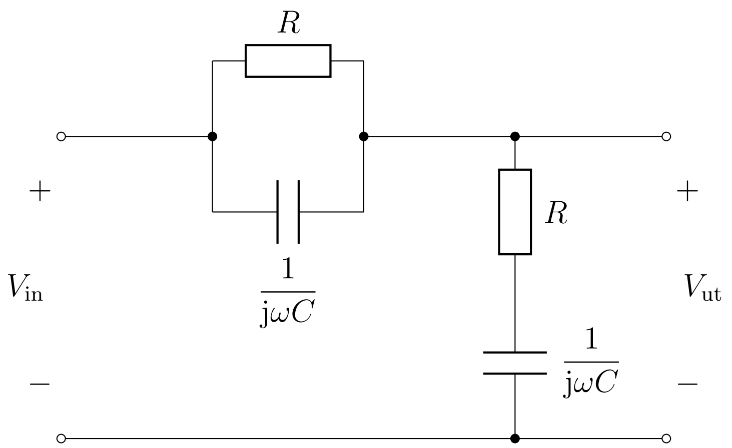
$$\int_0^t \mathrm{e}^{at'} \cos(bt')\,\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{e}^{at}(a\cos(bt) + b\sin(bt)) - a}{a^2 + b^2}$$

ger (med $a = 1/(RC)$ och $b = \omega_0$)

$$\begin{aligned} v_C(t) = \frac{V_0}{RC}\mathrm{e}^{-t/(RC)} \frac{\mathrm{e}^{t/(RC)}(\frac{1}{RC}\cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)) - \frac{1}{RC}}{(\frac{1}{RC})^2 + \omega_0^2} \\ = V_0 \frac{\cos(\omega_0 t) + \omega_0 RC \sin(\omega_0 t) - \mathrm{e}^{-t/(RC)}}{1 + (\omega_0 RC)^2} \end{aligned}$$

Svar: $v_C(t) = V_0 \frac{\cos(\omega_0 t) + \omega_0 RC \sin(\omega_0 t) - \mathrm{e}^{-t/(RC)}}{1+(\omega_0 RC)^2}$ för $t > 0$.

4



a) Utspänningen erhålls genom spänningsdelning:

$$V_{\text{ut}} = \frac{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \frac{1}{1/R + \mathrm{j}\omega C}} V_{\text{in}} = \frac{1 + \mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC + \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}} V_{\text{in}}$$

Detta ger överföringsfunktionen

$$H(\omega) = \frac{V_{\text{ut}}}{V_{\text{in}}} = \frac{1 + \mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC + \frac{\mathrm{j}\omega RC}{1+\mathrm{j}\omega RC}} = \frac{(1 + \mathrm{j}\omega RC)^2}{(1 + \mathrm{j}\omega RC)^2 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{1 - (\omega RC)^2 + 2\mathrm{j}\omega RC}{1 - (\omega RC)^2 + 3\mathrm{j}\omega RC}$$

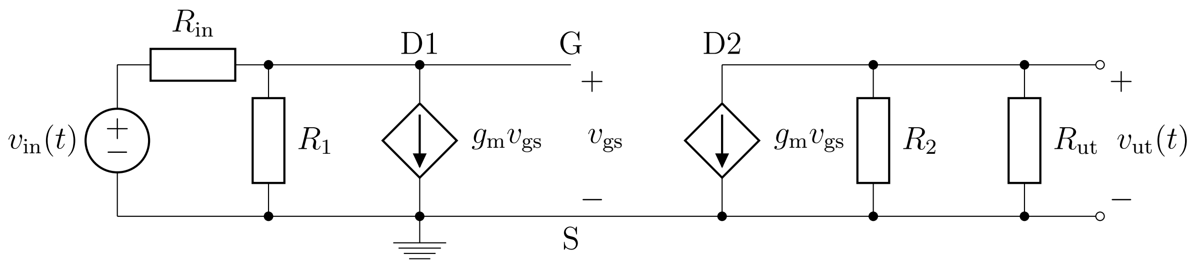
b) V_{ut} är i fas med V_{in} då $H(\omega)$ är reell. Förutom extremvärdena $\omega = 0$ och $\omega \to \infty$, inträffar detta då $1-(\omega RC)^2 = 0$, dvs $\omega = 1/(RC)$. Vid denna frekvens är $H(1/(RC)) = 2/3$.

Svar: a) $H(\omega) = \dfrac{1 - (\omega RC)^2 + 2\mathrm{j}\omega RC}{1 - (\omega RC)^2 + 3\mathrm{j}\omega RC}$. b) Vid $\omega = 1/(RC)$ är ut- och insignal i fas och $H(1/(RC)) = 2/3$.

5

a) Transistorerna antas vara i det mättade området. Då gäller $i_\mathrm{D} = K(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t})^2$, dvs drain-strömmen beror endast på spänningen v_GS. Eftersom båda transistorerna har samma potential på både gate och source, är v_GS densamma för båda och därmed är strömmarna lika, oavsett val av R_1 och R_2 (så länge transistorerna verkligen är i det mättade området). Kopplingen från drain i den vänstra transistorn till gate garanterar att den vänstra transistorn är i mättnadstillstånd, medan den högra i praktiken kräver viss anpassning av R_2 (ingår inte i uppgiften).

b) Småsignalschemat erhålls genom att ersätta kapacitanserna med kortslutningar och likspänningskällorna med kortslutningar till jord. Detta ger (där vi inte tar med drain-resistanserna r_d för transistorerna, eftersom dessa antas vara stora jämfört med övriga resistanser som parallellkopplas med dem)



Utsignalen är $v_\mathrm{ut} = -\frac{R_2 R_\mathrm{ut}}{R_2+R_\mathrm{ut}} g_\mathrm{m} v_\mathrm{gs}$. Spänningen v_gs bestäms genom Kirchhoffs strömlag i noden D1 (samma som G):

$$\frac{v_\mathrm{gs} - v_\mathrm{in}}{R_\mathrm{in}} + \frac{v_\mathrm{gs}}{R_1} + g_\mathrm{m} v_\mathrm{gs} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{gs} = \frac{v_\mathrm{in}/R_\mathrm{in}}{\frac{1}{R_\mathrm{in}} + \frac{1}{R_1} + g_\mathrm{m}} = \frac{v_\mathrm{in}}{1 + \frac{R_\mathrm{in}}{R_1} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{in}}$$

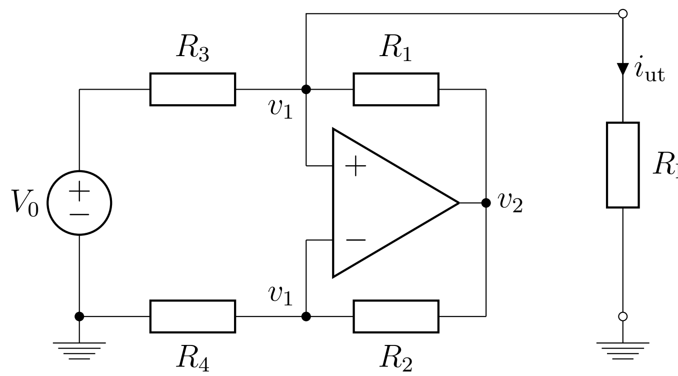
Sammantaget har vi då

$$v_\mathrm{ut} = -\frac{R_2 R_\mathrm{ut}}{R_2 + R_\mathrm{ut}} g_\mathrm{m} v_\mathrm{gs} = -\frac{R_2 R_\mathrm{ut}}{R_2 + R_\mathrm{ut}} g_\mathrm{m} \frac{v_\mathrm{in}}{1 + \frac{R_\mathrm{in}}{R_1} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{in}} = -\frac{g_\mathrm{m} R_\mathrm{ut}}{(1 + \frac{R_\mathrm{ut}}{R_2})(1 + \frac{R_\mathrm{in}}{R_1} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{in})} v_\mathrm{in}$$

Svar: a) Se ovan. b) Se småsignalschema ovan. $\dfrac{v_\mathrm{ut}}{v_\mathrm{in}} = -\dfrac{g_\mathrm{m} R_\mathrm{ut}}{(1 + \frac{R_\mathrm{ut}}{R_2})(1 + \frac{R_\mathrm{in}}{R_1} + g_\mathrm{m} R_\mathrm{in})}$.

6

Den negativa återkopplingen gör att vi kan utgå från att spänningen mellan ingångarna på operationsförstärkaren är noll. Vi sätter ut nodpotentialer v_1 och v_2 enligt nedan.



Eftersom ingen ström kan gå in i operationsförstärkarens ingångar, ger Kirchhoffs strömlag vid den negativa ingången att

$$\frac{v_1}{R_4} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = R_2 \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} \right) v_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_4} \right) v_1$$

Kirchhoffs strömlag i noden kopplad till plusingången ger då

$$0 = \frac{v_1 - V_0}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_1} + \frac{v_1}{R_\text{L}} = \frac{v_1 - V_0}{R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_4} v_1 + \frac{v_1}{R_\text{L}} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{V_0/R_3}{\frac{1}{R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_4} + \frac{1}{R_\text{L}}}$$

Utströmmen blir

$$i_\text{ut} = \frac{v_1}{R_\text{L}} = \frac{V_0/R_3}{R_\text{L} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_4} \right) + 1}$$

Om vi väljer $\frac{1}{R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_4} = 0$, eller $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$, blir detta uttryck oberoende av R_L.

Svar: $i_\text{ut} = \dfrac{V_0/R_3}{R_\text{L} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{R_2}{R_1 R_4} \right) + 1}$. Med $\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$ blir i_ut oberoende av R_L och vi har en ideal strömkälla.