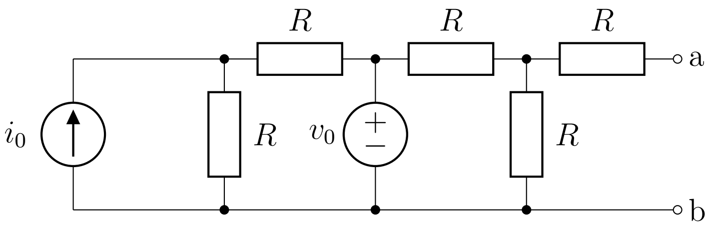
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 4/1 2016

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

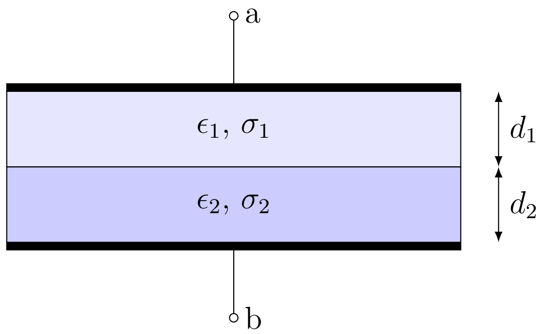
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1



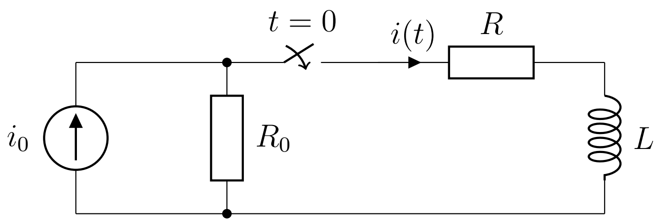
Beräkna Théveninekvivalenten med avseende på nodparet ab.

2



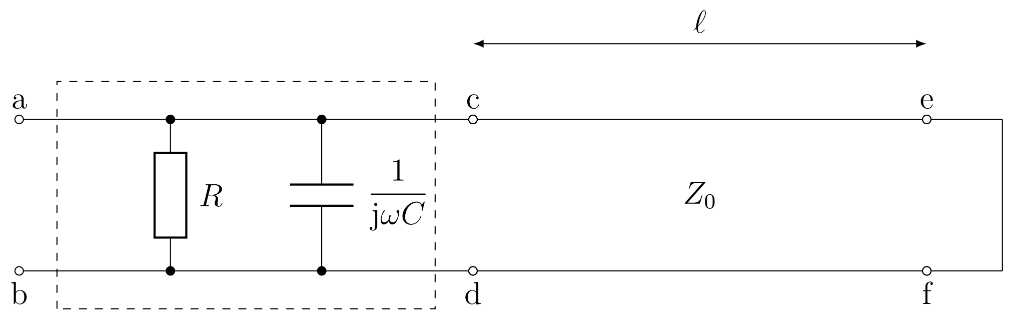
Två plana skivor med permittiviteter $\epsilon_{1,2}$, konduktiviteter $\sigma_{1,2}$ och tjocklekar $d_{1,2}$ enligt ovan är placerade mellan två metallskivor a och b, var och en med yta A.
a) Rita en kretsmodell och beräkna den komplexa impedansen $Z_{\mathrm{ab}}(\omega)$ vid vinkelfrekvensen ω. Du behöver inte härleda formlerna för kretsparametrarna. Svaret ska uttryckas i material- och geometriparametrarna givna ovan.
b) Vad är $Z_{\mathrm{ab}}(0) = \lim_{\omega\to 0} Z_{\mathrm{ab}}(\omega)$ respektive $Z_{\mathrm{ab}}(\infty) = \lim_{\omega\to\infty} Z_{\mathrm{ab}}(\omega)$?

3



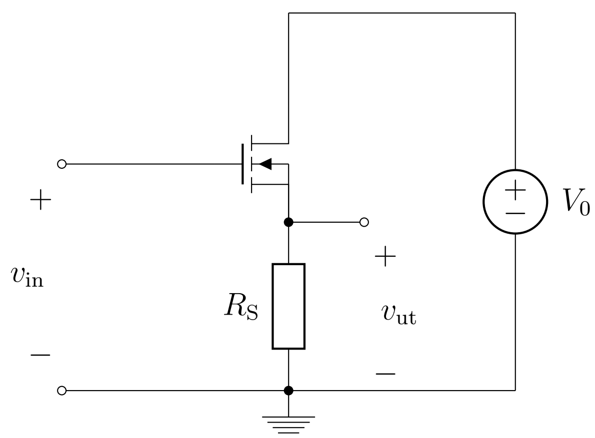
En spole modelleras med en induktans L i serie med en resistans R. Vid $t = 0$ kopplas en källa in enligt figur. Beräkna $i(t)$ för $t > 0$.

4



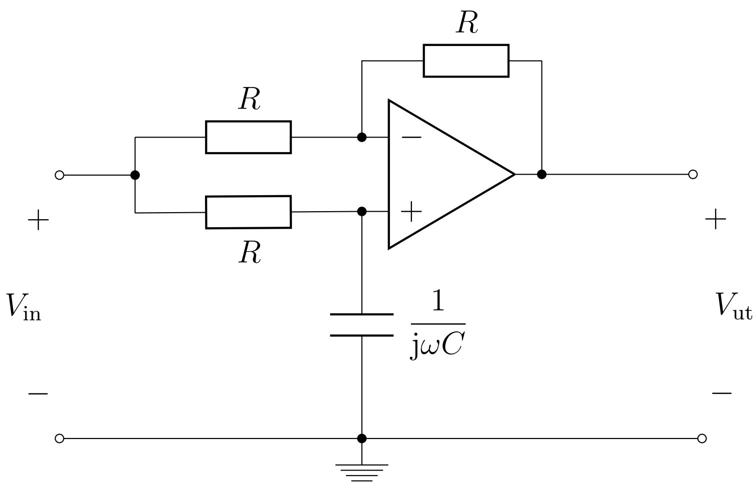
En viss last modelleras av en parallellkopplad resistans R och kapacitans C, se den inringade delen av kretsen ovan. För att omvandla denna till en rent resistiv last vid vinkelfrekvensen ω, kan vi använda en förlustfri transmissionsledning med karakteristisk impedans Z_0 och längd ℓ mellan nodparen cd och ef, som avslutas med en kortslutning mellan e och f. Vågtalet för ledningen är $\beta = \omega/v$, där v är våghastigheten på ledningen.
a) Vad är den kortaste längd ℓ för vilken impedansen Z_{ab} blir helt resistiv ($Z_{\mathrm{ab}} = R$)?
b) Byt ut kapacitansen C mot en induktans L. För vilken kortaste längd ℓ blir nu Z_{ab} helt resistiv ($Z_{\mathrm{ab}} = R$)?

5



Spänningskällan är tidsoberoende (V_0 är konstant), och signalerna $v_{\mathrm{in}}(t)$ och $v_{\mathrm{ut}}(t)$ kan hanteras som småsignaler.
a) Rita småsignalschema för ovanstående koppling.
b) Beräkna småsignalförstärkningen $v_{\mathrm{ut}}/v_{\mathrm{in}}$.

6



Ovanstående koppling är ett all-pass filter, dvs det påverkar endast signalens fas. Operationsförstärkaren är ideal.

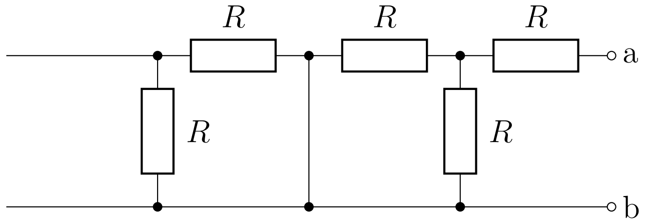
a) Visa att absolutbeloppet av överföringsfunktionen $|V_{\mathrm{ut}}/V_{\mathrm{in}}| = 1$ för alla ω.

b) Beräkna överföringsfunktionens fas, $\arg(V_{\mathrm{ut}}/V_{\mathrm{in}})$, för alla ω.

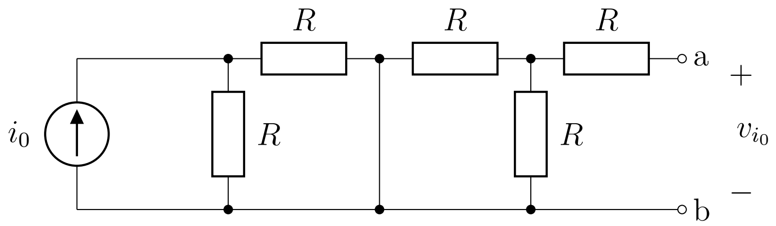
Lösningar

1

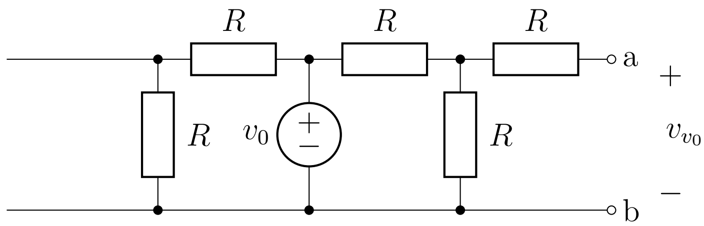
Den inre resistansen erhålls genom att ersätta strömkällan med ett avbrott och spänningskällan med en kortslutning:



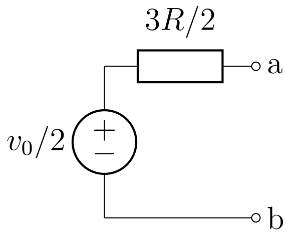
Kortslutningen gör att de två vänstra resistanserna inte ger något bidrag, och vi har $R_{\mathrm{ab}} = R + R \| R = R + R/2 = 3R/2$. Tomgångsspänningen kan beräknas genom superposition. Börja med bidraget från strömkällan (spänningskällan ersätts med kortslutning):



Uppenbarligen gör kortslutningen att $v_{i_0} = 0$. Bidraget från spänningskällan (strömkällan ersätts med avbrott) ges av



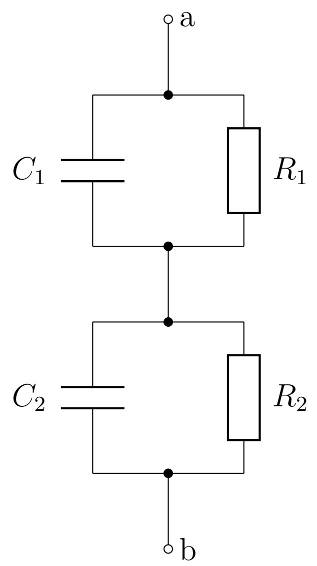
Ingen ström går genom resistansen längst till höger, vilket ger att v_{v_0} kan beräknas genom spänningsdelning över två lika resistanser till $v_{v_0} = v_0/2$. Eftersom tomgångsspänningen $v_{\mathrm{t}} = v_{i_0} + v_{v_0} = v_0/2$, har vi Théveninekvivalenten



Svar: Se sista figuren.

2

Samma ström går genom de två plattorna, där strömmen i respektive platta ges av summan av ett resistivt bidrag och ett kapacitivt bidrag. En ekvivalent krets ges därmed av en seriekoppling av två parallellkopplade resistanser och kapacitanser enligt nedan



där kretsparametrarna ges av (se formelsamlingen)

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 A}{d_1} \qquad C_2 = \frac{\epsilon_2 A}{d_2}$$
$$R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 A} \qquad R_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 A}$$

Impedansen är

$$Z_{\text{ab}}(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \text{j}\omega C_1} + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \text{j}\omega C_2} = \frac{R_1}{1 + \text{j}\omega R_1 C_1} + \frac{R_2}{1 + \text{j}\omega R_2 C_2}$$
$$= \frac{d_1/(\sigma_1 A)}{1 + \text{j}\omega\epsilon_1/\sigma_1} + \frac{d_2/(\sigma_2 A)}{1 + \text{j}\omega\epsilon_2/\sigma_2}$$

Gränsvärdena då ω blir litet respektive stort är

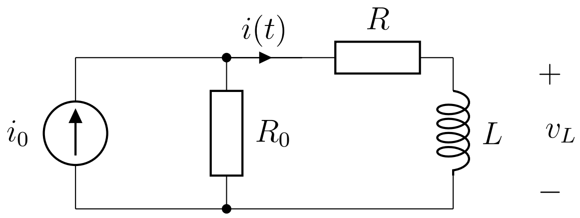
$$Z_{\text{ab}}(0) = \frac{d_1}{\sigma_1 A} + \frac{d_2}{\sigma_2 A}$$
$$Z_{\text{ab}}(\infty) = 0$$

vilket stämmer med det intuitiva resultatet av två seriekopplade resistanser i lågfrekvensgränsen, samt två kapacitanser som svarar mot en kortslutning i högfrekvensgränsen.

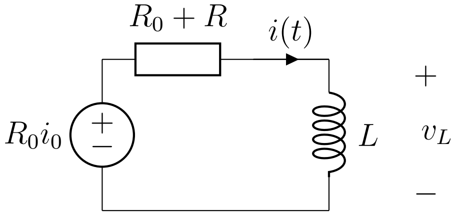
Svar: a) $Z_{\text{ab}} = \frac{d_1/(\sigma_1 A)}{1+\text{j}\omega\epsilon_1/\sigma_1} + \frac{d_2/(\sigma_2 A)}{1+\text{j}\omega\epsilon_2/\sigma_2}$, b) $Z_{\text{ab}}(0) = \frac{d_1}{\sigma_1 A} + \frac{d_2}{\sigma_2 A}$, $Z_{\text{ab}}(\infty) = 0$.

3

För $t > 0$ har vi kretsen



Genom en källtransformation från Norton till Thévenin omvandlar vi denna till



Konstitutiva relationen för en induktans samt KVL ger

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = v_L = R_0 i_0 - (R_0 + R)i$$

vilket ger differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R_0 + R}{L} i = \frac{R_0 i_0}{L}$$

Byt tillfälligt variabel $t \to t'$, multiplicera med integrerande faktor $\mathrm{e}^{t'(R_0+R)/L}$, integrera över t' från 0 till t, samt dividera med $\mathrm{e}^{-t(R_0+R)/L}$:

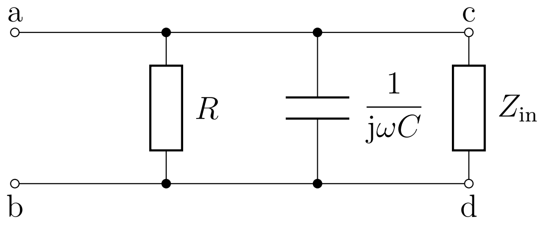
$$\begin{aligned} i(t) = i(0)\mathrm{e}^{-t(R_0+R)/L} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t'-t)(R_0+R)/L} \frac{R_0 i_0}{L} \,\mathrm{d}t' &= \frac{R_0 i_0}{R_0 + R} \left[\mathrm{e}^{(t'-t)(R_0+R)/L}\right]_0^t \\ &= \frac{i_0}{1 + R/R_0} \left(1 - \mathrm{e}^{-t(R_0+R)/L}\right) \end{aligned}$$

där vi utnyttjade att induktansen är strömtrög ($i(0) = 0$).

Svar: För $t > 0$ har vi $i(t) = \frac{i_0}{1+R/R_0}\left(1 - \mathrm{e}^{-t(R_0+R)/L}\right)$.

4

Transmissionsledningen kan ersättas med en ekvivalent impedans Z_{in} vid nodparet cd:



där Z_{in} ges av (lastimpedansen för kortslutningen vid nodparet ef är $Z_{\text{L}} = 0$)

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{Z_{\text{L}} \cos(\beta\ell) + \mathrm{j}Z_0 \sin(\beta\ell)}{Z_0 \cos(\beta\ell) + \mathrm{j}Z_{\text{L}} \sin(\beta\ell)} = \mathrm{j}Z_0 \tan(\beta\ell)$$

Denna impedans är rent reaktiv. Den totala impedansen Z_{ab} ges av parallellkoppling

$$\frac{1}{Z_{\mathrm{ab}}} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}Z_0\tan(\beta\ell)} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{Z_0\tan(\beta\ell)}\right)$$

Imaginärdelen är noll då

$$\beta\ell = \arctan\left(\frac{1}{\omega C Z_0}\right) + n\pi$$

där n är ett heltal. Vi väljer $n = 0$ eftersom det svarar mot den kortaste transmissionsledningen, vilket ger

$$\ell = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{1}{\omega C Z_0}\right) = \frac{v}{\omega}\arctan\left(\frac{1}{\omega C Z_0}\right)$$

Om kapacitansen byts mot en induktans med impedans $\mathrm{j}\omega L$, ger parallellkopplingen i stället villkoret

$$\frac{1}{\omega L} + \frac{1}{Z_0\tan(\beta\ell)} = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta\ell = -\arctan\left(\frac{\omega L}{Z_0}\right) + n\pi$$

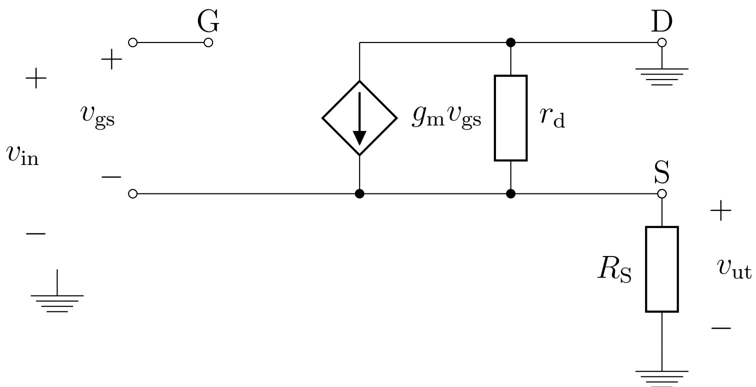
För att erhålla en positiv längd måste vi nu välja $n = 1$, vilket ger

$$\ell = \frac{1}{\beta}\left[\pi - \arctan\left(\frac{\omega L}{Z_0}\right)\right] = \frac{v}{\omega}\left[\pi - \arctan\left(\frac{\omega L}{Z_0}\right)\right]$$

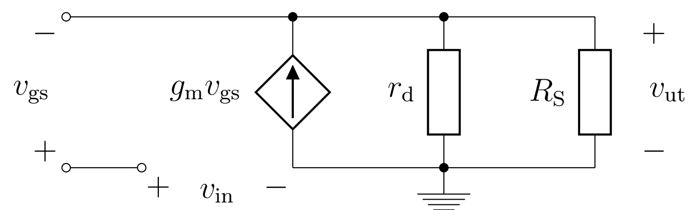
Svar: a) $\ell = \frac{v}{\omega}\arctan\left(\frac{1}{\omega C Z_0}\right)$, b) $\ell = \frac{v}{\omega}\left[\pi - \arctan\left(\frac{\omega L}{Z_0}\right)\right]$.

5

Ersätt transistorn med sin småsignalmodell, och likspänningskällan med en kortslutning (småsignaljord).



Vi ritar rent detta schema till



Utspänningen blir

$$v_{\mathrm{ut}} = \frac{1}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{S}}} g_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{gs}}$$

KVL ger (spänningsvandring moturs genom kretsen)

$$v_{\mathrm{ut}} + v_{\mathrm{gs}} - v_{\mathrm{in}} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{gs}} = v_{\mathrm{in}} - v_{\mathrm{ut}}$$

Insättning i den tidigare ekvationen ger

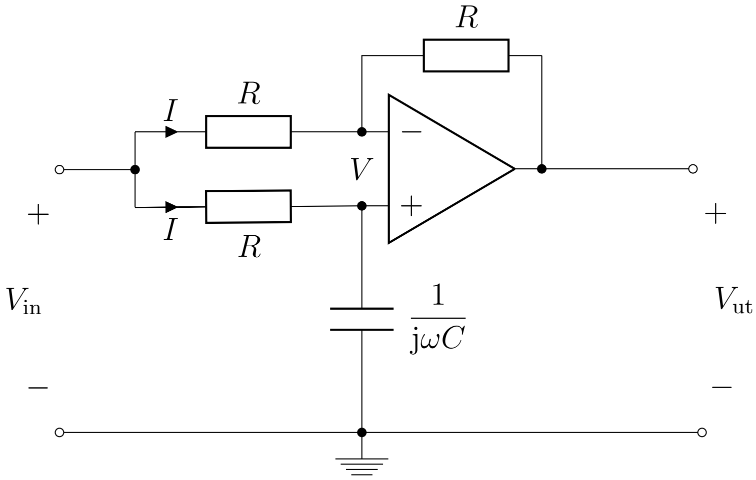
$$v_{\mathrm{ut}} = \frac{1}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{S}}} g_{\mathrm{m}} (v_{\mathrm{in}} - v_{\mathrm{ut}}) \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{ut}} = \frac{1}{1 + \frac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{S}}}} \frac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{S}}} v_{\mathrm{in}}$$

$$= \frac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{S}} + g_{\mathrm{m}}} v_{\mathrm{in}}$$

Svar: a) Se ovan. b) Småsignalförstärkningen är $v_{\mathrm{ut}}/v_{\mathrm{in}} = \frac{g_{\mathrm{m}}}{1/r_{\mathrm{d}} + 1/R_{\mathrm{S}} + g_{\mathrm{m}}}$.

6

Den negativa återkopplingen ger att operationsförstärkarens båda ingångar får samma potential V. Eftersom samma spänning ligger över de två högra resistanserna, går samma ström I genom båda:



Ingen ström går in i den ideala operationsförstärkarens ingångar, vilket ger att strömmen I även går genom kapacitansen, och vi kan lösa för nodpotentialen V:

$$V = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} I = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} \frac{V_{\mathrm{in}} - V}{R} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\omega RC} V_{\mathrm{in}}$$

Utspänningen är

$$V_{\mathrm{ut}} = V - RI = V - (V_{\mathrm{in}} - V) = 2V - V_{\mathrm{in}} = \left(\frac{2}{1 + \mathrm{j}\omega RC} - 1 \right) V_{\mathrm{in}} = \frac{1 - \mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC} V_{\mathrm{in}}$$

Överföringsfunktionen är

$$\frac{V_{\mathrm{ut}}}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{1 - \mathrm{j}\omega RC}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

som har absolutbelopp $|V_{\mathrm{ut}}/V_{\mathrm{in}}| = 1$ (nämnare och täljare är komplexkonjugat till varandra) och fas

$$\arg(V_{\mathrm{ut}}/V_{\mathrm{in}}) = -2 \arctan(\omega RC)$$

Svar: a) Se ovan. b) $\arg(V_{\mathrm{ut}}/V_{\mathrm{in}}) = -2 \arctan(\omega RC)$.