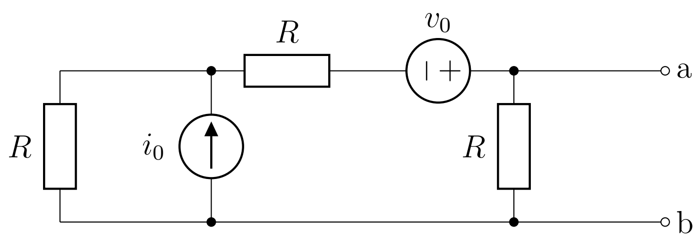
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 25/8 2015

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

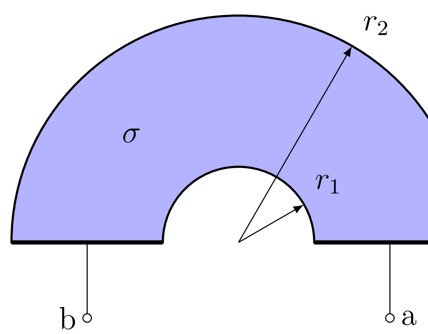
1

Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet a–b.



2

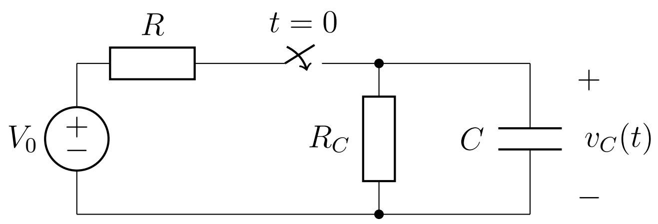
En ledningsbana beskriven av två halvcirkelbågar med radier r_1 och r_2 enligt nedanstående figur beläggs med metall längs sina kortändar. Ledaren har ledningsförmåga σ och tjocklek t i normalriktningen mot papperets plan.



a) Bestäm resistansen R_{ab}.
b) Vad blir R_{ab} då $r_1 \to r_2$, dvs $r_2 - r_1 = d$ blir mycket litet i förhållande till r_2? [Tips: $\ln(1 + x) \to x$ då $x \to 0$.]

3

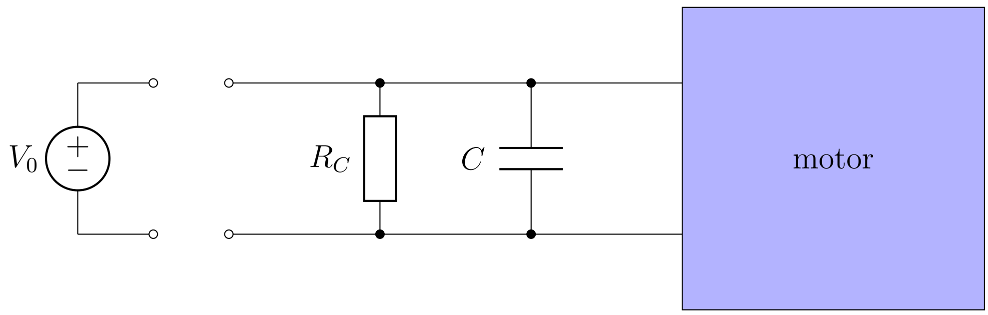
I nedanstående krets har strömbrytaren varit öppen under lång tid innan den sluts vid $t = 0$.



a) Beräkna spänningen $v_C(t)$ för $t > 0$.
b) Vad är den upplagrade energin i kapacitansen C då $t \to \infty$?
c) Vilken effekt utvecklas i resistansen R_C då $t \to \infty$?

4

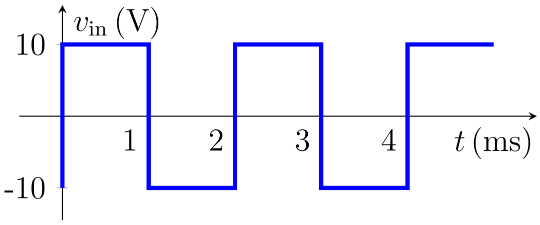
En elmotor består av en spole och drar därmed en viss aktiv och reaktiv effekt. För att undvika att den reaktiva effekten ska förses genom kraftledningsnätet, görs ofta en så kallad faskompensering genom att parallellkoppla en kondensator över motorns anslutningar. Utöver sin kapacitans C, har denna kondensator också en läckresistans R_C.

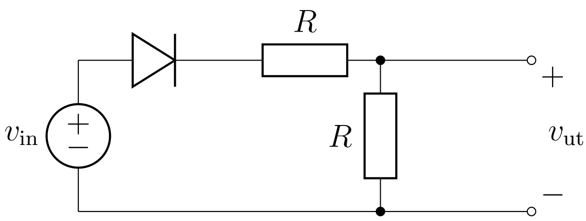


Låt motorns komplexa effekt vid vinkelfrekvens ω ges av $S_\mathrm{m} = P_\mathrm{m}(1+\mathrm{j}\tan\varphi)$. Nätspänningen V_0, vinkelfrekvensen ω, motorns aktiva effekt P_m och fasvinkeln $0 < \varphi < \pi/2$ betraktas som kända.

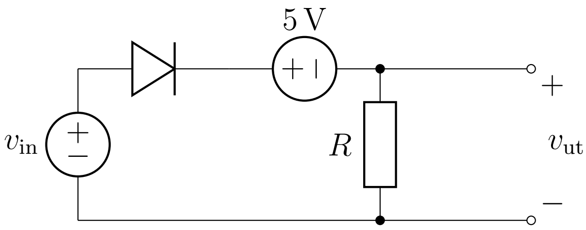
a) Vilken kapacitans C krävs för att den totala reaktiva effekten ska bli noll?
b) Vad blir den aktiva effekten i R_C? Vad är mest fördelaktigt, en liten eller stor resistans R_C?

5

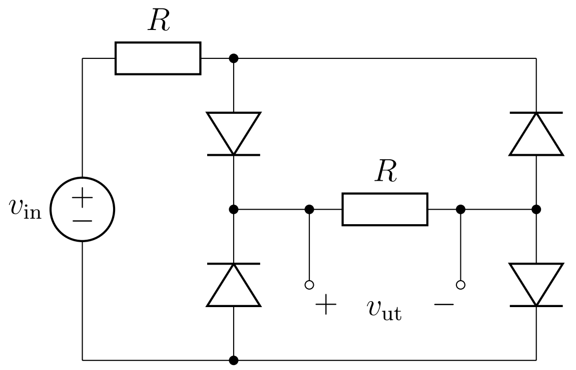




(a)



(b)

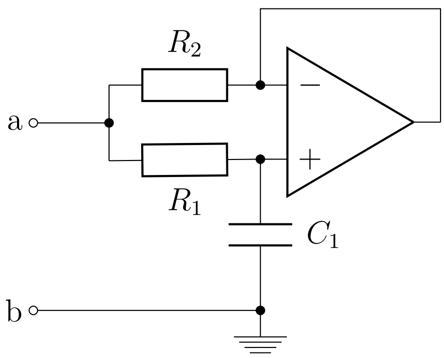


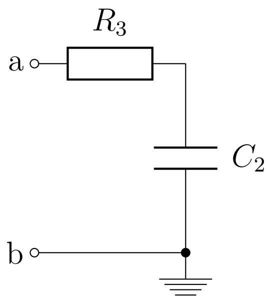
(c)

Dioderna i ovanstående scheman är ideala, och insignalen längst upp till vänster används i alla fallen. Rita graferna för utspänningarna för kretsarna (a), (b) och (c). Ange noga amplituder och tider.

6

Nedanstående krets är en kapacitansmultiplikator, som kan användas för att öka den effektiva kapacitansen i en krets.



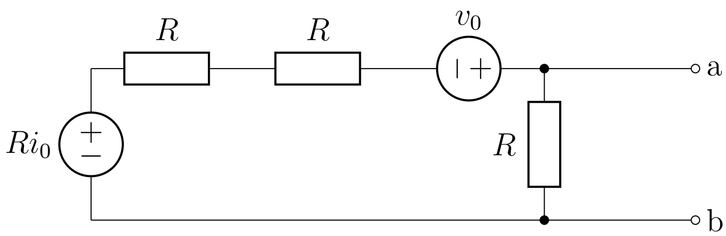


Betrakta R_1, R_2 och C_1 som kända storheter, och OP-förstärkaren som ideal. Visa hur R_3 och C_2 kan väljas så att kretsarna är ekvivalenta betraktade från nodparen a–b. Vad är C_2/C_1?

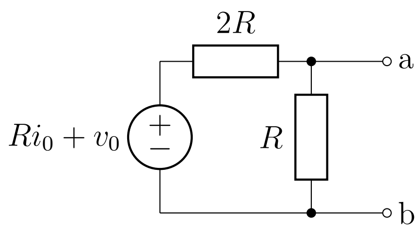
Lösningar

1

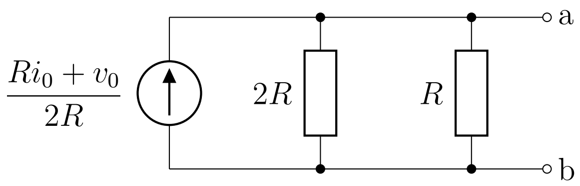
Problemet kan lösas genom successiva transformationer mellan Thévenin- och Nortonekvivalenter. Omvandla den vänstra paralllellkopplingen av en resistans och en strömkälla till en Théveninekvivalent:



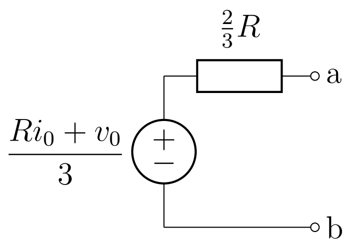
Seriekoppling av spänningskällor och resistanser ger



$\Leftrightarrow$



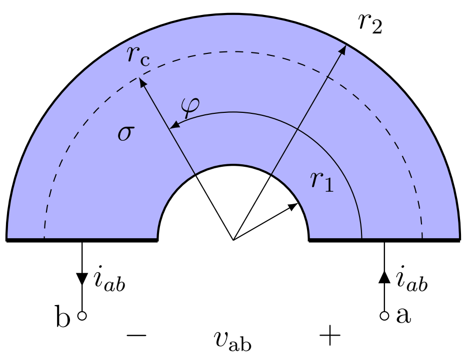
Parallellkopplingen $2R//R$ ger resistansen $\frac{2RR}{2R+R} = \frac{2}{3}R$. En sista transformation ger



vilket utgör den sökta Théveninekvivalenten.

2

Introducera ström i_{ab}, spänning v_{ab}, och koordinater r_c och φ enligt nedan:



Symmetri ger att strömtätheten pekar i φ-riktningen, med en amplitud som endast kan bero på r_c:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = J(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_\varphi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sigma}J(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_\varphi$$

Spänningen fås genom en integral från a till b:

$$v_{ab} = \int_a^b \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{\sigma}J(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_\varphi \cdot \underbrace{\boldsymbol{e}_\varphi r_\mathrm{c}\,\mathrm{d}\varphi}_{=\mathrm{d}\boldsymbol{r}} = \frac{1}{\sigma}J(r_\mathrm{c})r_\mathrm{c}\pi \quad \Rightarrow \quad J(r_\mathrm{c}) = \frac{\sigma}{r_\mathrm{c}\pi}v_{ab}$$

Den totala strömmen i_{ab} ges nu genom en integral över tvärsnittet:

$$i_{ab} = \int_{z=0}^{t}\int_{r_\mathrm{c}=r_1}^{r_2} \underbrace{J(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_\varphi}_{=\boldsymbol{J}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{e}_\varphi\,\mathrm{d}r_\mathrm{c}\,\mathrm{d}z}_{=\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}S} = t\frac{\sigma}{\pi}v_{ab}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{r_\mathrm{c}} = \frac{t\sigma v_{ab}}{\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Detta ger resistansen

$$R_{ab} = \frac{v_{ab}}{i_{ab}} = \frac{\pi}{t\sigma\ln(r_2/r_1)}$$

För att undersöka vad som händer då $r_1 \to r_2$, sätter vi $r_1 = r_2 - d$ och undersöker gränsen $d \to 0$. Vi har

$$\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\frac{r_2}{r_2-d} = \ln\frac{1}{1-d/r_2} = -\ln(1-d/r_2) \to \frac{d}{r_2}, \quad d/r_2 \to 0$$

Detta ger

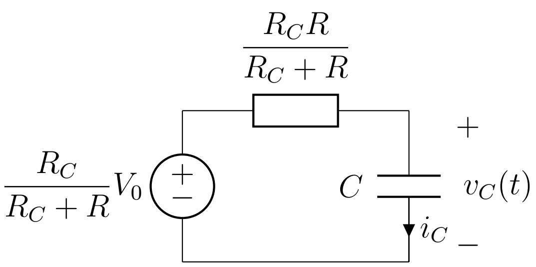
$$R_{ab} \to \frac{\pi r_2}{\sigma t d}, \quad d/r_2 \to 0$$

vilket är det förväntade uttrycket för en lång smal tråd med längd πr_2 och tvärsnittsyta td.

Svar: a) $R_{ab} = \frac{\pi}{t\sigma\ln(r_2/r_1)}$. b) $R_{ab} \to \frac{\pi r_2}{\sigma t d}$ då $d/r_2 \to 0$.

3

a) För $t > 0$ kan vi ersätta kretsen till vänster om kapacitansen med en Théveninekvivalent. Dess tomgångsspänning ges av spänningsdelning mellan R_C och R till $\frac{R_C}{R_C+R}V_0$, och dess inre resistans är $R_C//R = \frac{R_C R}{R_C+R}$. Vi har då



KVL och $i_C = C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}$ ger

$$\frac{R_C}{R_C+R}V_0 - \frac{R_C R}{R_C+R}C\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} - v_C(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + \frac{R_C+R}{R_C RC}v_C = \frac{V_0}{RC}$$

Denna differentialekvation har lösningen (där vi utnyttjar att $v_C(0) = 0$ på grund av att kapacitansen är energitom vid $t = 0$)

$$v_C(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{(t'-t)\frac{R_C+R}{R_C RC}} \frac{V_0}{RC} \,\mathrm{d}t' = \frac{V_0}{RC} \left[\frac{R_C RC}{R_C + R} \mathrm{e}^{(t'-t)\frac{R_C+R}{R_C RC}} \right]_{t'=0}^{t} = V_0 \frac{R_C}{R_C + R} \left(1 - \mathrm{e}^{-t\frac{R_C+R}{R_C RC}} \right)$$

b) Då $t \to \infty$ blir $v_C(\infty) = V_0 \frac{R_C}{R_C+R}$. Den upplagrade energin i kapacitansen är då

$$w_C = \frac{1}{2} C v_C(\infty)^2 = \frac{1}{2} V_0^2 C \left(\frac{R_C}{R_C + R} \right)^2$$

c) Samma spänning ligger över R_C som över C. Detta ger effektutvecklingen

$$P_{R_C} = \frac{v_C(\infty)^2}{R_C} = V_0^2 \frac{R_C}{(R_C + R)^2}$$

Svar: a) $v_C(t) = V_0 \frac{R_C}{R_C+R} \left(1 - \mathrm{e}^{-t\frac{R_C+R}{R_C RC}} \right)$. b) $w_C = \frac{1}{2} V_0^2 C \left(\frac{R_C}{R_C+R} \right)^2$. c) $P_{R_C} = V_0^2 \frac{R_C}{(R_C+R)^2}$.

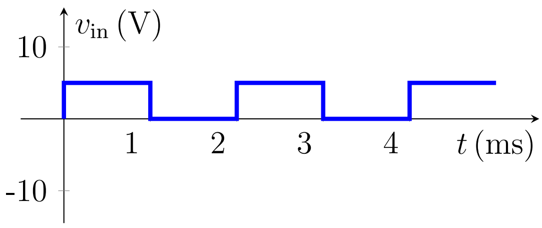
4

a) Den reaktiva effekten i motorn är $Q_\mathrm{m} = P_\mathrm{m} \tan\varphi$. Den reaktiva effekten i kapacitansen är $Q_C = \mathrm{Im}(\frac{1}{2} V I^*) = \mathrm{Im}(\frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{Z_C^*}) = -\frac{1}{2} \omega C |V_0|^2$. För att erhålla $Q_\mathrm{m} + Q_C = 0$ krävs $C = \frac{2P_\mathrm{m} \tan\varphi}{\omega |V_0|^2}$.

b) Samma spänning V_0 ligger över R_C, vilket ger den aktiva effekten $P_{R_C} = \frac{1}{2} \frac{|V_0|^2}{R_C}$. För att minska denna effekt (som är oönskad) är ett högre R_C bättre än ett lägre.

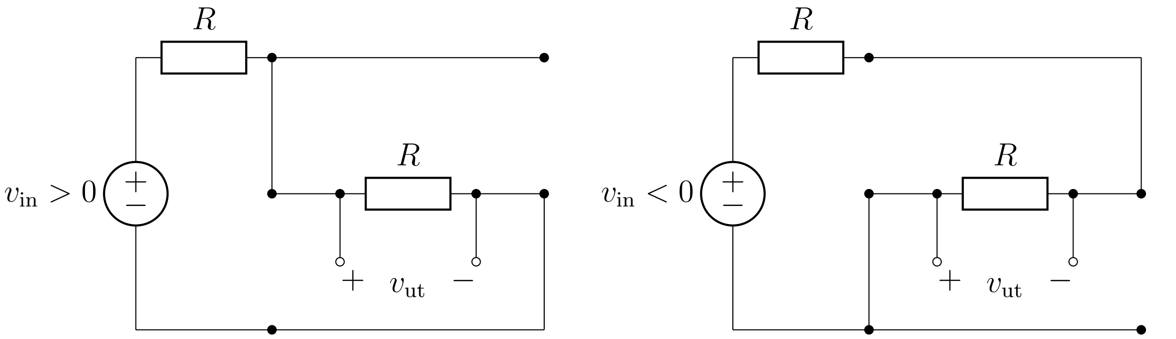
5

a) Dioden spärrar då $v_\mathrm{in} < 0$, vilket ger $v_\mathrm{ut} = 0$. Då $v_\mathrm{in} > 0$ ges $v_\mathrm{ut} = v_\mathrm{in}/2$ genom spänningsdelning.



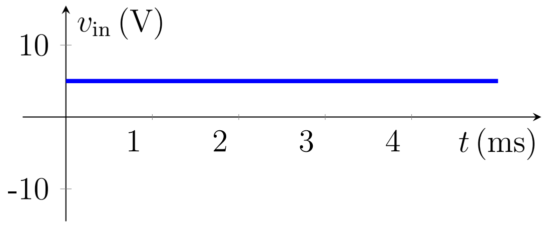
b) Det krävs nu $v_\mathrm{in} > 5\,\mathrm{V}$ för att dioden ska leda. När detta sker blir $v_\mathrm{ut} = v_\mathrm{in} - 5\,\mathrm{V}$, annars är $v_\mathrm{ut} = 0$. Kurvan blir densamma som i uppgift a).

c) Då $v_\mathrm{in} > 0$ leder den övre vänstra och nedre högre dioden, medan de andra spärrar. Då $v_\mathrm{in} < 0$ är situationen den motsatta. Vi har alltså följande två situationer:



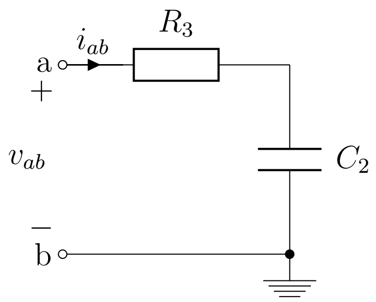
$v_{\rm ut} = v_{\rm in}/2$ $\qquad$ $v_{\rm ut} = -v_{\rm in}/2$

Detta medför $v_{\rm ut} = |v_{\rm in}|/2$, och vi får grafen



6

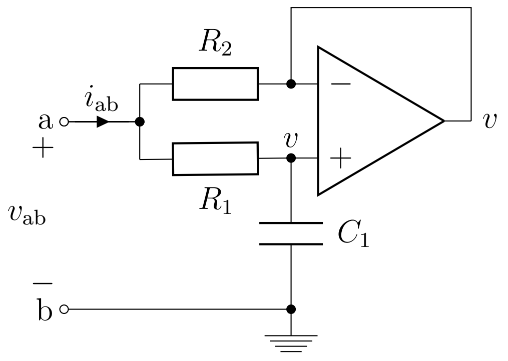
Vi börjar med att härleda förhållandet mellan ström och spänning i kretsen till höger:



Förhållandet mellan ström och spänning över kapacitansen ger

$$i_{ab} = C_2 \frac{\mathrm{d}v_{C_2}}{\mathrm{d}t} = C_2 \frac{\mathrm{d}(v_{ab} - i_{ab}R_3)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}i_{ab}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_3C_2} i_{ab} = \frac{1}{R_3} \frac{\mathrm{d}v_{ab}}{\mathrm{d}t} \qquad (*)$$

Det är inte nödvändigt att lösa denna differentialekvation, vi behöver bara identifiera motsvarande ekvation för kretsen till vänster. I denna krets ger negativ återkoppling att spänningen mellan OP-ingångarna är noll, och vi kan introducera en nodpotential v enligt nedan.



Strömmen i_{ab} är

$$i_{ab} = \frac{v_{ab} - v}{R_1} + \frac{v_{ab} - v}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(v_{ab} - v)$$

Eftersom ingen ström kan gå in i plus-ingången på OP:n har vi också

$$\frac{v_{ab} - v}{R_1} = C_1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Vi kan lösa ut v från den första ekvationen,

$$v = v_{ab} - \frac{i_{ab}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

och kombinera med den andra för att erhålla

$$\frac{v_{ab} - v}{R_1} = \frac{i_{ab}}{R_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = C_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_{ab} - \frac{i_{ab}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}\right) = C_1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

Detta kan skrivas om som en differentialekvation

$$\frac{\mathrm{d}i_{ab}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R_1 C_1} i_{ab} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}v_{ab}}{\mathrm{d}t}$$

Jämför vi med ekvation $(*)$ identifierar vi

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \text{och} \quad R_1 C_1 = R_3 C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{R_1 C_1}{R_3} = C_1 R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

<u>Svar:</u> $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ och $C_2 = C_1(1 + R_1/R_2)$. Kvoten $C_2/C_1 = 1 + R_1/R_2$ kan göras stor om R_1/R_2 görs stor.

Kommentar: uppgiften kan också lösas genom att göra en Fourier- eller Laplace-transform av kretsarna och sätta impedanserna lika för alla frekvenser.