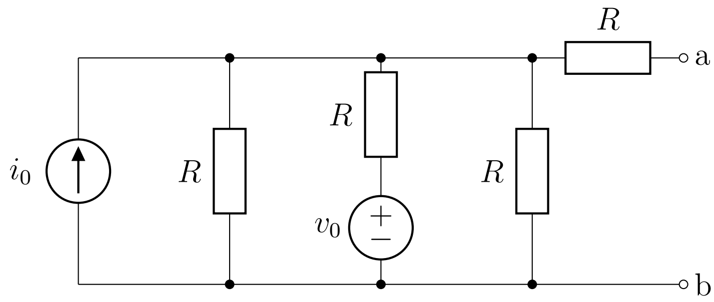
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 4/6 2015

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

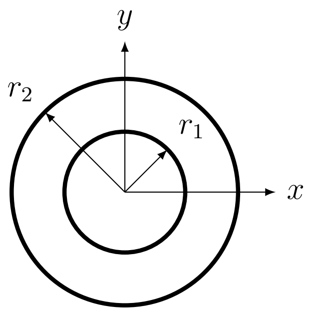
1



Beräkna Théveninekvivalenten med avseende på nodparet a–b.

2

En ledningstråd med längd ℓ består av två material med ledningsförmågor σ_1 och σ_2. Tvärsnittsgeometrin är enligt nedan (där cylinderradien är $r_c = \sqrt{x^2 + y^2}$):

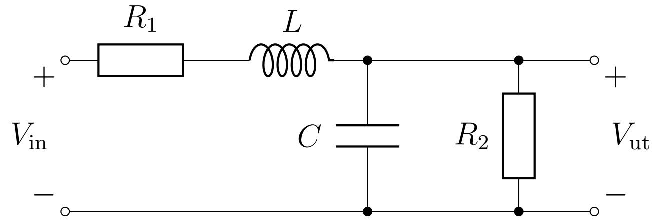


$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 < r_c < r_1 \\ \sigma_2 & r_1 < r_c < r_2 \end{cases}$$

a) I denna deluppgift metalliseras tråden vid ytorna $z = 0$ och $z = \ell$, och en spänning kopplas mellan dessa ytor. Beräkna resistans per längdenhet, R/ℓ.

b) I denna deluppgift låter vi i stället ytorna $r_c = r_1$ och $r_c = r_2$ metalliseras för $0 < z < \ell$, och en spänning kopplas mellan dessa ytor. Beräkna konduktans per längdenhet, $G/\ell = 1/(R\ell)$.

3



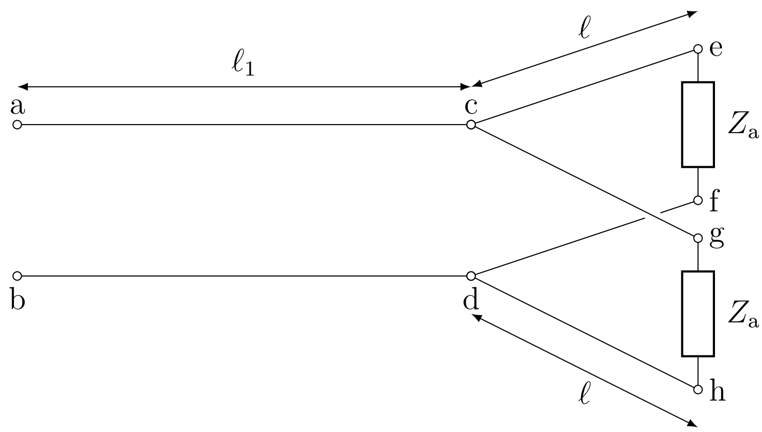
a) Beräkna överföringsfunktionen $H = V_{\text{ut}}/V_{\text{in}}$ för ovanstående krets.

b) Vad är $H(\omega)$ då vinkelfrekvensen $\omega \to 0$ respektive $\omega \to \infty$?

c) Hur många dB minskar $|H(\omega)|$ med då ω ökar med en faktor 10 i parameterområdet $R_1 \ll \mathrm{j}\omega L$, $R_2 \gg 1/(\mathrm{j}\omega C)$ och $\omega \gg 1/\sqrt{LC}$? Dvs, vad är $|H(10\omega)/H(\omega)|_{\text{dB}}$ under dessa förutsättningar?

4

Du vill koppla in två antenner till samma transmissionsledning. Antennerna är identiska och kan modelleras med impedans $Z_{\text{a}} = Z_0$. För att säkerställa att även de parallellkopplade antennerna har impedans $Z_{\text{ab}} = Z_0$, kan nedanstående krets användas.

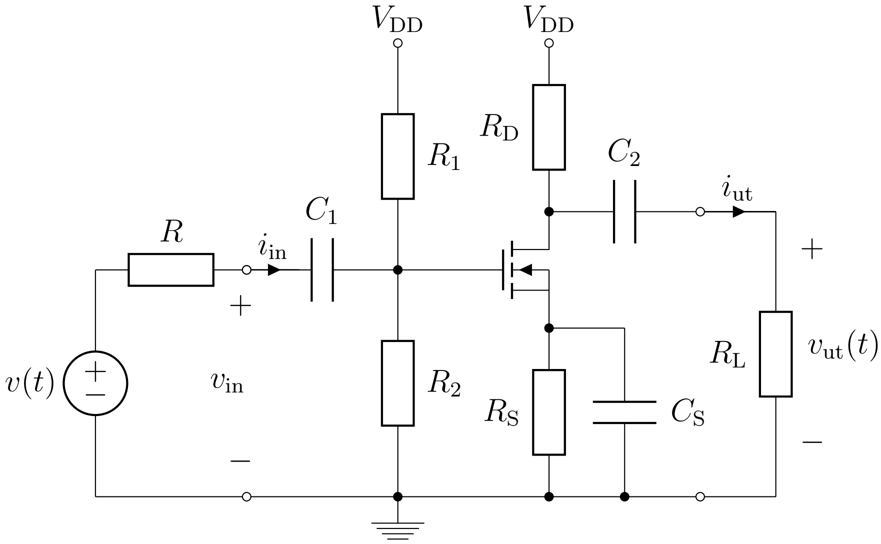


Transmissionsledningarna mellan cd–ef och cd–gh är identiska och har längd ℓ, karakteristisk impedans Z_0 och vågtal $\beta = 2\pi/\lambda$, där λ är våglängden på ledningen. Transmissionsledningen mellan ab–cd har längd $\ell_1 = \lambda_1/4$, karakteristisk impedans Z_1 och vågtal $\beta_1 = 2\pi/\lambda_1$.

a) Vilken ekvivalent impedans ses vid nodparet cd betraktat från ledningen mellan ab–cd?

b) Hur ska Z_1 väljas för att impedansen vid nodparet ab ska bli Z_0?

5

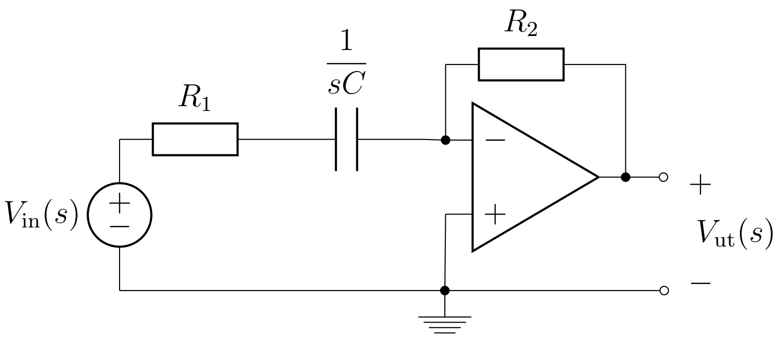


Kapacitanserna i figuren är att betrakta som kopplingskapacitanser, som används för att ge olika nätverk för arbetspunkten och för småsignalen.

a) Rita schema för likspänningarna som sätter arbetspunkten för transistorn. Antag att du har en given ström-spänning-karakteristik $i_{\mathrm{D}}(v_{\mathrm{DS}})$ för transistorn (i form av ett diagram eller en ekvation); beskriv hur du kan bestämma arbetspunkten $(I_{\mathrm{DQ}}, V_{\mathrm{DSQ}})$.

b) Rita småsignalschema för kretsen, och bestäm förstärkningen $v_{\mathrm{ut}}/v_{\mathrm{in}}$.

6



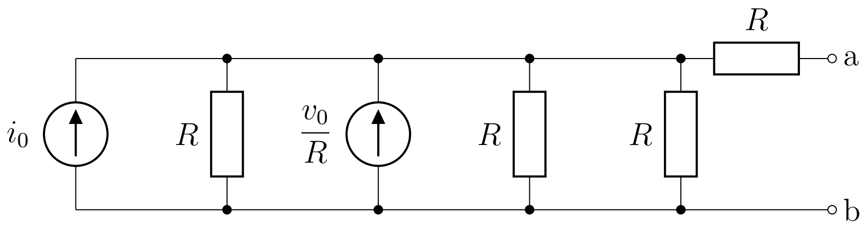
a) Beräkna $V_{\mathrm{ut}}(s)/V_{\mathrm{in}}(s)$.

b) Vad blir $v_{\mathrm{ut}}(t)$ då $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0 \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$? Här betecknar $\mathrm{u}(t)$ enhetssteget, dvs $\mathrm{u}(t) = 0$ för $t < 0$ och $\mathrm{u}(t) = 1$ för $t > 0$.

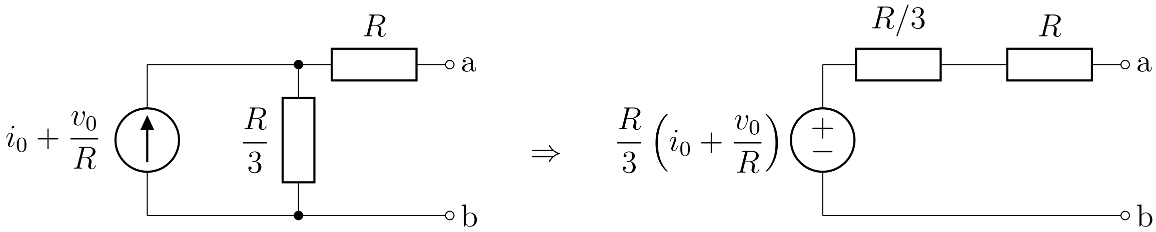
Lösningar

1

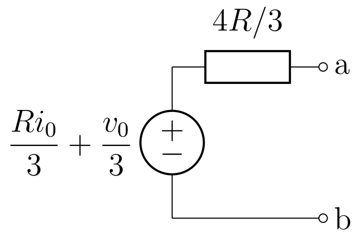
Vi löser problemet med successiva omvandlingar mellan Thévenin- och Nortonekvivalanter. Omvandla först grenen med spänningskälla och resistans i serie till en Nortonekvivalent:



Förenkla parallellkopplingarna och omvandla till Théveninekvivalent:



Slutligen får vi



2

a) Symmetri ger att elektriska fältet är i cylinderaxelns riktning vinkelrätt mot tvärsnittsytan i xy-planet, $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{e}_z$. Detta leder till att den totala resistansen svarar mot en parallellkoppling av två resistanser som ges av formeln för en rak ledare,

$$R_{1,2} = \frac{\ell}{\sigma_{1,2}A_{1,2}}, \quad A_1 = \pi r_1^2, \quad A_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$$

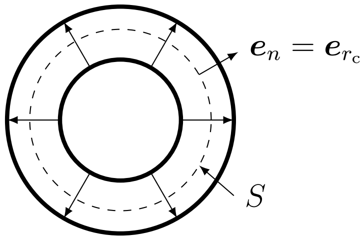
Vi får därmed

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{\frac{\sigma_1 A_1}{\ell} + \frac{\sigma_2 A_2}{\ell}} = \frac{\ell}{\sigma_1 \pi r_1^2 + \sigma_2 \pi (r_2^2 - r_1^2)}$$

och resistans per längdenhet blir

$$\frac{R}{\ell} = \frac{1/\pi}{\sigma_1 r_1^2 + \sigma_2(r_2^2 - r_1^2)}$$

b) Med anslutningar mellan $r_\mathrm{c} = r_1$ och $r_\mathrm{c} = r_2$ ger symmetri att $\boldsymbol{E} = E(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}}$ i området $r_1 < r_\mathrm{c} < r_2$.



Med total ström I från innerledare till ytterledare får vi

$$I = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{e}_n \,\mathrm{d}S = \int_{r_\mathrm{c}=\text{konstant}} \sigma(r_\mathrm{c})E(r_\mathrm{c})\boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \,\mathrm{d}S = \sigma_2 E(r_\mathrm{c}) 2\pi r_\mathrm{c} \ell$$

då $r_1 < r_\mathrm{c} < r_2$. Detta ger $E(r_\mathrm{c}) = I/(\sigma_2 2\pi r_\mathrm{c}\ell)$, och spänningen blir

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \int_{r_\mathrm{c}=r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{r_\mathrm{c}=r_1}^{r_2} \frac{I}{\sigma_2 2\pi r_\mathrm{c}\ell} \boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \cdot \boldsymbol{e}_{r_\mathrm{c}} \,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = \frac{I}{\sigma_2 2\pi\ell} \int_{r_\mathrm{c}=r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{r_c} = \frac{I}{\sigma_2 2\pi\ell} [\ln r_\mathrm{c}]_{r_1}^{r_2} \\ &= \frac{I}{\sigma_2 2\pi\ell} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned}$$

Konduktansen per längdenhet blir

$$\frac{G}{\ell} = \frac{1}{R\ell} = \frac{I}{(v_1 - v_2)\ell} = \frac{\sigma_2 2\pi}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

3

a) Överföringsfunktionen fås genom spänningsdelning. Vi beräknar först impedansen för parallellkopplingen

$$Z_{C\|R_2} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2}{1 + \mathrm{j}\omega R_2 C}$$

Utspänningen fås sedan genom spänningsdelning:

$$V_\mathrm{ut} = \frac{Z_{C\|R_2}}{Z_{C\|R_2} + R_1 + \mathrm{j}\omega L} = \frac{\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega R_2 C}}{\frac{R_2}{1+\mathrm{j}\omega R_2 C} + R_1 + \mathrm{j}\omega L} V_\mathrm{in} = \frac{1}{1 + \frac{R_1 + \mathrm{j}\omega L}{R_2}(1 + \mathrm{j}\omega R_2 C)} V_\mathrm{in}$$

Överföringsfunktionen är

$$H = \frac{V_\mathrm{ut}}{V_\mathrm{in}} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}(1 + \mathrm{j}\omega L/R_1)(1 + \mathrm{j}\omega R_2 C)}$$

b) Gränsvärdena för överföringsfunktionen för små och stora frekvenser är

$$H(\omega) \to \begin{cases} \frac{1}{1+R_1/R_2} & \omega \to 0 \\ -\frac{1}{\omega^2 LC} \to 0 & \omega \to \infty \end{cases}$$

c) Med antagandena $R_1 \ll \mathrm{j}\omega L$ och $R_2 \gg 1/(\mathrm{j}\omega C)$ får vi

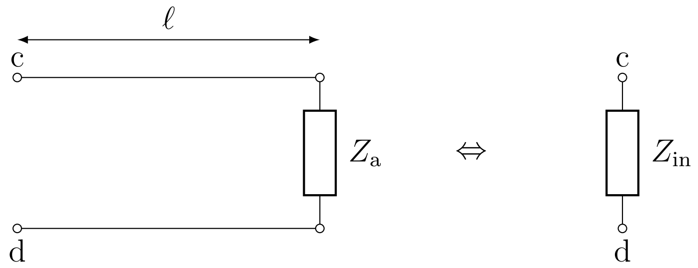
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}(1 + \mathrm{j}\omega L/R_1)(1 + \mathrm{j}\omega R_2 C)} \approx \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}\mathrm{j}\omega L \frac{1}{R_1}\mathrm{j}\omega R_2 C} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

Då $\omega \gg 1/\sqrt{LC}$ får vi $H(\omega) = -1/(\omega^2 LC)$, och $|H(10\omega)/H(\omega)| = \frac{1}{100}$, dvs ett avtagande med $20\log_{10}(1/100) = -40\,\mathrm{dB}$.

Svar: $|H(\omega)|$ avtar med $-40\,\mathrm{dB}$ per dekad i ω.

4

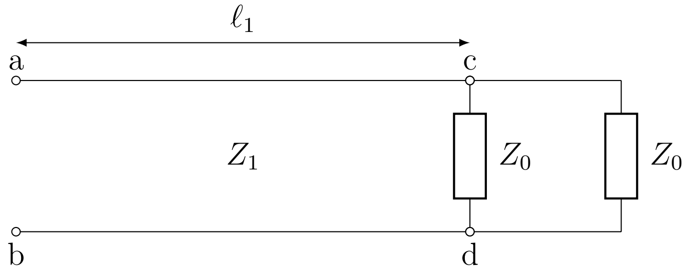
a) Vi studerar först den ekvivalenta impedansen för en av antenngrenarna:



där formelsamlingen ger att

$$Z_{\mathrm{in}} = Z_0 \frac{1 + \varGamma \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}{1 - \varGamma \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}, \qquad \varGamma = \frac{Z_{\mathrm{a}} - Z_0}{Z_{\mathrm{a}} + Z_0}$$

Med $Z_{\mathrm{a}} = Z_0$ har vi reflektionsfaktor $\varGamma = 0$ och $Z_{\mathrm{in}} = Z_0$ oavsett ℓ. Vi kan då ersätta det ursprungliga schemat med nedanstående:



De två parallellkopplade impedanserna till höger ger $Z_{\mathrm{ekv}} = Z_0/2$.

Svar: Den ekvivalenta impedansen vid cd är $Z_0/2$.

b) Reflektionskoefficienten vid cd är

$$\varGamma_{\mathrm{cd}} = \frac{Z_0/2 - Z_1}{Z_0/2 + Z_1}$$

Med $\ell_1 = \lambda_1/4$ och $\beta_1 = 2\pi/\ell_1$ får vi $\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta_1\ell_1} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi} = -1$, och

$$Z_{\mathrm{ab}} = Z_1 \frac{1 + \varGamma_{\mathrm{cd}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta_1\ell_1}}{1 - \varGamma_{\mathrm{cd}} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta_1\ell_1}} = Z_1 \frac{1 - \frac{Z_0/2 - Z_1}{Z_0/2 + Z_1}}{1 + \frac{Z_0/2 - Z_1}{Z_0/2 + Z_1}} = Z_1 \frac{2Z_1}{2Z_0/2} = \frac{Z_1^2}{Z_0/2}$$

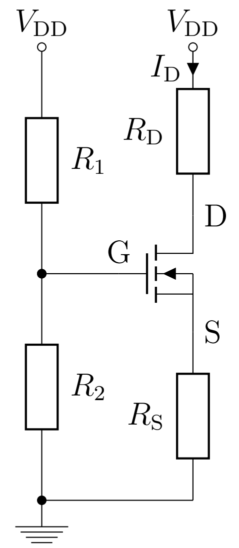
Om vi önskar $Z_{\mathrm{ab}} = Z_0$ får vi

$$Z_1 = \sqrt{\frac{Z_0^2}{2}} = \frac{Z_0}{\sqrt{2}}$$

<u>Svar:</u> $Z_1 = Z_0/\sqrt{2}$.

5

a) Ersätt kapacitanserna med avbrott.

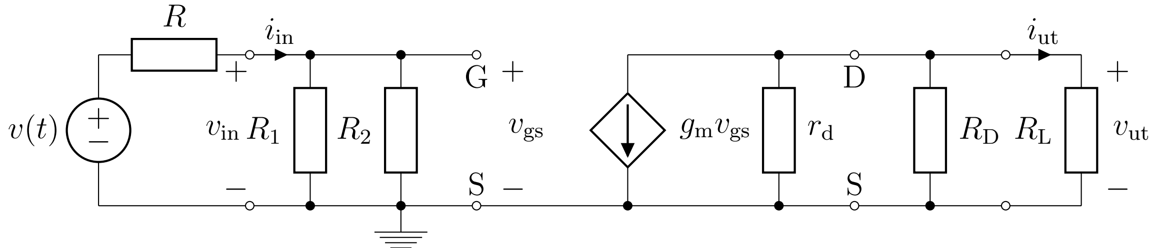


KVL ger $V_{\mathrm{DD}} - R_{\mathrm{D}}I_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{DS}} - R_{\mathrm{S}}I_D = 0$, vilket medför arbetslinjen

$$V_{\mathrm{DS}} + (R_{\mathrm{D}} + R_{\mathrm{S}})I_{\mathrm{D}} = V_{\mathrm{DD}}$$

Tillsammans med komponentkarakteristiken $i_{\mathrm{D}}(v_{\mathrm{DS}})$ ger detta två samband som kan användas för att beräkna arbetspunkten $(I_{\mathrm{DQ}}, V_{\mathrm{DSQ}})$, antingen grafiskt (skärningspunkten mellan arbetslinjen och karakteristiken i ett diagram med i_{D} och v_{DS} längs axlarna) eller med formler, beroende på hur $i_{\mathrm{D}}(v_{\mathrm{DS}})$ är given.

b) Småsignalschemat fås genom att ersätta kapacitanserna med kortslutningar och matningsspänningen med signaljord.

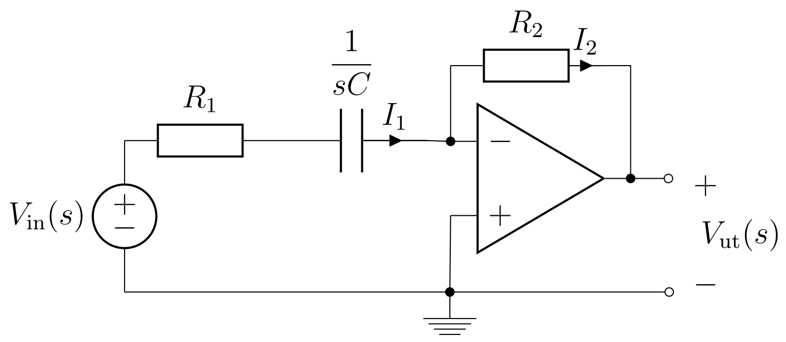


Utspänningen ges av

$$v_{\mathrm{ut}} = -\frac{1}{\frac{1}{r_{\mathrm{d}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{D}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{L}}}} g_{\mathrm{m}}v_{\mathrm{gs}} = -\frac{1}{\frac{1}{r_{\mathrm{d}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{D}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{L}}}} g_{\mathrm{m}}v_{\mathrm{in}}$$

<u>Svar:</u> $v_{\mathrm{ut}}/v_{\mathrm{in}} = -\frac{g_{\mathrm{m}}}{\frac{1}{r_{\mathrm{d}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{D}}} + \frac{1}{R_{\mathrm{L}}}}$.

6



a) Negativ återkoppling ger att potentialen vid minus-ingången är noll. Utspänningen är $V_{\mathrm{ut}} = -R_2 I_2$, där $I_2 = I_1$ eftersom ingen ström går in i OP:ns negativa ingång. Strömmen I_1 ges av $I_1 = V_{\mathrm{in}}/(R_1 + 1/(sC))$, och vi får

$$V_{\mathrm{ut}}(s) = -\frac{R_2}{R_1 + 1/(sC)} V_{\mathrm{in}}(s) = -\frac{sR_2C}{1 + sR_1C} V_{\mathrm{in}}(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{\mathrm{ut}}(s)}{V_{\mathrm{in}}(s)} = -\frac{sR_2C}{1 + sR_1C}$$

b) Från formelsamlingen finner vi att $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0 \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{u}(t)$ svarar mot $V_{\mathrm{in}}(s) = V_0/(s+a)$, och vi får

$$V_{\mathrm{ut}}(s) = -\frac{sR_2C}{1 + sR_1C} \frac{V_0}{s+a} = -\frac{V_0 R_2}{R_1} \frac{s}{(s + \frac{1}{R_1C})(s+a)}$$

Vi identifierar $1/(R_1C) = b$ och använder formelsamlingen för att finna

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{ut}}(t) = -\frac{V_0R_2}{R_1} \frac{a\mathrm{e}^{-at} - b\mathrm{e}^{-bt}}{a-b} \mathrm{u}(t) &= -\frac{V_0R_2}{R_1} \frac{a\mathrm{e}^{-at} - \frac{1}{R_1C}\mathrm{e}^{-t/(R_1C)}}{a - 1/(R_1C)} \mathrm{u}(t) \\ &= \frac{V_0R_2Ca}{1 - R_1Ca} \left(\mathrm{e}^{-at} - \frac{1}{R_1Ca} \mathrm{e}^{-t/(R_1C)} \right) \mathrm{u}(t) \end{aligned}$$