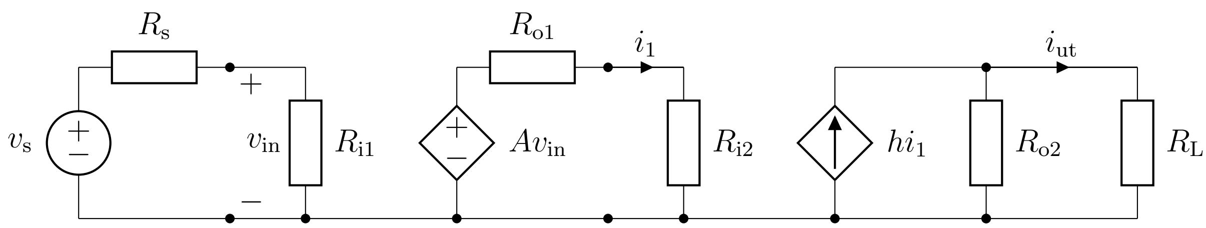
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 10/1 2014

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

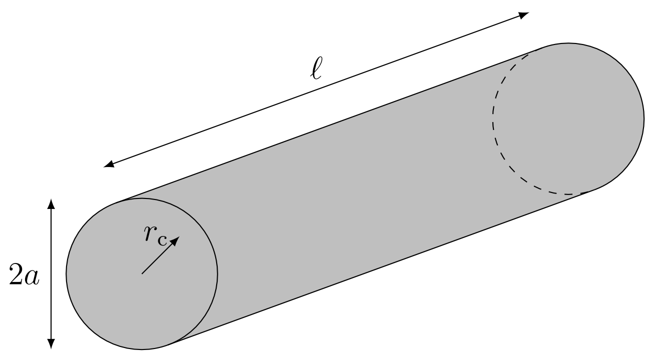
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1



En sensor har inre resistans R_s och tomgångsspänning v_s. Signalen från denna förstärks i två steg, enligt figuren, och ger en ström i_{ut} genom lasten R_L. Alla resistanserna i kretsen och råförstärkningarna A och h är kända. Bestäm förstärkningen $G = \frac{i_{ut}}{v_s}$.

2

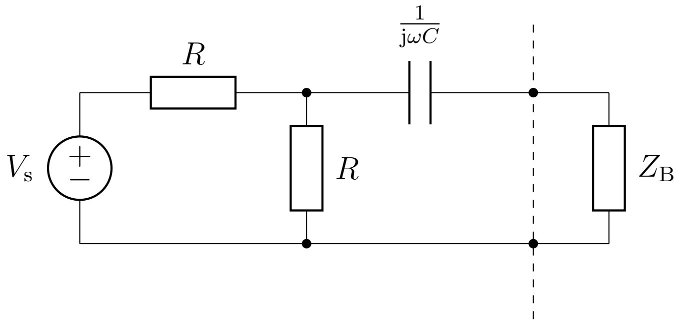


Vid höga frekvenser uppstår ett fenomen som kallas strömförträngning, där strömmen genom en ledare koncentreras till ett område nära ledarens rand. En modell av detta ges av en rumsberoende ledningsförmåga. Betrakta en rät cirkulär cylinder med radie a och längden ℓ enligt ovan. Ledningsförmågan beror på avståndet r_c från cylinderaxeln enligt

$$\sigma(r_c) = \sigma_0 e^{(r_c - a)/\delta}$$

Konstanterna a, ℓ, σ_0 och δ är kända. Beräkna resistansen mellan cylinderns ändytor exakt, samt förenkla uttrycket då $\delta \ll a$.

3



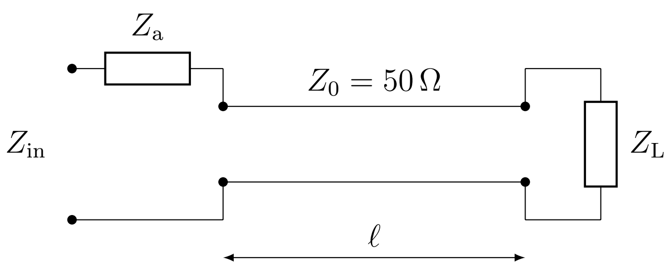
Den komplexa spänningen V_s, vinkelfrekvensen ω samt komponentvärdena R och C är kända.

a) Bestäm Théveninekvivalenten för nätet till vänster om den streckade linjen.

b) En rent resistiv belastning $Z_B = R_B$ kopplas in enligt figuren. Bestäm R_B så att maximal effekt erhålles i belastningen.

c) Bestäm en komplex belastningsimpedans $Z_B = R_B + jX_B$ så att den aktiva effekten i belastningen maximeras. Ange hur denna impedans kan realiseras med verkliga kretselement (något eller några av R, L, C) samt vilka värden du använder. Rita en figur som visar hur de skall kopplas in.

4



En transmissionsledning kan användas för att kompensera reaktansen hos en antenn.

Koppla en förlustfri transmissionsledning med karakteristisk impedans $Z_0 = 50\,\Omega$ och längd ℓ till antennen med inimpedansen $Z_a = R_a + jX_a$ vid vinkelfrekvensen ω enligt figuren.

a) Bestäm längden, ℓ, för transmissionsledningen så att inimpedansen Z_{in} blir rent resistiv för fallet $Z_L = \infty$ (öppen transmissionsledning).

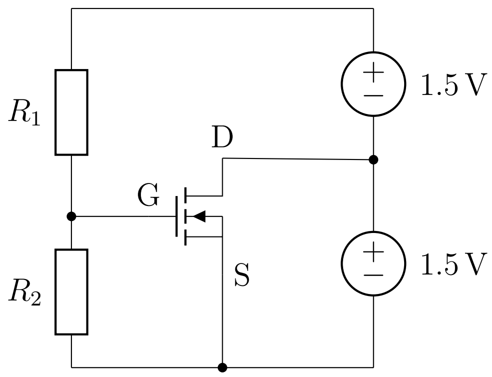
b) Bestäm längden, ℓ, för transmissionsledningen så att inimpedansen Z_{in} blir rent resistiv för fallet $Z_L = 0$ (kortsluten transmissionsledning).

c) Ska man välja en öppen eller kortsluten transmissionsledning om man har en kapacitiv antenn ($X_a < 0$) och önskar kortast möjliga transmissionsledning? (motivera)

Vid vinkelfrekvensen ω är våglängden längs transmissionsledningen λ, vilket ger vågtalet $\beta = 2\pi/\lambda$.

5

Tröskelspänningen för transistorn är 1 V.



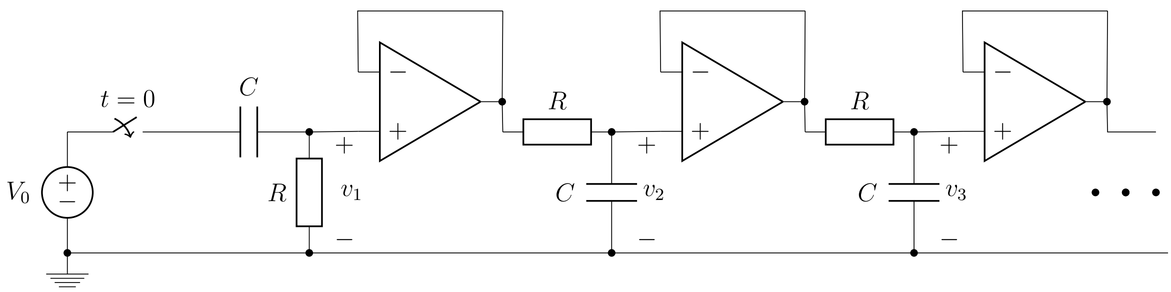
a) Bestäm ett uttryck för v_{GS}.

b) I vilket intervall skall R_1/R_2 ligga för att transistorn skall vara i det strypta området?

c) I vilket intervall skall R_1/R_2 ligga för att transistorn skall vara i det linjära området (triodområdet)?

d) I vilket intervall skall R_1/R_2 ligga för att transistorn skall vara i det mättade området?

6



Kretsen visar de tre första stegen i en lång kedja som för $t > 0$ matas av en likspänning V_0. Från och med det andra steget är alla steg identiska. Kondensatorerna är oladdade vid $t = 0$. Operationsförstärkarna är ideala och V_0, R och C är kända.

a) Bestäm $v_1(t)$ för $t > 0$.

b) Bestäm $v_2(t)$ för $t > 0$.

c) Bestäm $v_n(t)$ för $t > 0$ för ett godtyckligt heltal $n > 2$ om kedjan har minst $n + 1$ enheter.

Lösningar

1

Vi kan bestämma utströmmen genom att börja analysen från höger:

$$
\begin{aligned}
i_{\mathrm{ut}} &= \frac{R_{\mathrm{o2}}}{R_{\mathrm{o2}}+R_{\mathrm{L}}} h i_1 \\
i_1 &= \frac{A v_{\mathrm{in}}}{R_{\mathrm{o1}}+R_{\mathrm{i2}}} \\
v_{\mathrm{in}} &= \frac{R_{\mathrm{i1}}}{R_{\mathrm{s}}+R_{\mathrm{i1}}} v_{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Det ger

Svar:

$$
G = \frac{i_{\mathrm{ut}}}{v_{\mathrm{s}}} = Ah \frac{R_{\mathrm{i1}} R_{\mathrm{o2}}}{(R_{\mathrm{s}}+R_{\mathrm{i1}})(R_{\mathrm{o1}}+R_{\mathrm{i2}})(R_{\mathrm{o2}}+R_{\mathrm{L}})}
$$

2

Välj ett koordinatsystem med z längs cylinderaxeln. Då spänningen v läggs mellan ändytorna, uppstår ett homogent elektriskt fält eftersom strukturen är invariant längs z:

$$
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{v}{\ell} \boldsymbol{e}_z
$$

vilket ger strömtätheten

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sigma(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sigma_0 \frac{v}{\ell} \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \boldsymbol{e}_z
$$

Den totala strömmen i genom tvärsnittet av cylindern är då

$$
i = \int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{e}_n \, \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r_{\mathrm{c}}=0}^{a} \underbrace{\sigma_0 \frac{v}{\ell} \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \boldsymbol{e}_z}_{=\boldsymbol{J}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{e}_z r_{\mathrm{c}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}}}_{=\boldsymbol{e}_n \, \mathrm{d}S} = \frac{\sigma_0 v 2\pi}{\ell} \int_{r_{\mathrm{c}}=0}^{a} r_{\mathrm{c}} \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}}
$$

Integralen löses genom partiell integration till

$$
\int_0^a r_{\mathrm{c}} \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}} = \left[r_{\mathrm{c}} \delta \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \right]_0^a - \int_0^a \delta \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}} = a\delta - \left[\delta^2 \mathrm{e}^{(r_{\mathrm{c}}-a)/\delta} \right]_0^a = a\delta - \delta^2 (1 - \mathrm{e}^{-a/\delta})
$$

Resistansen blir

$$
R = \frac{v}{i} = \frac{\ell}{\sigma_0 2\pi} \frac{1}{a\delta - \delta^2 (1 - \mathrm{e}^{-a/\delta})} \approx \frac{\ell}{\sigma_0 2\pi a \delta}
$$

I sista ledet utnyttjade vi $\delta \ll a$. Här kan vi tolka $2\pi a\delta$ som tvärsnittsytan för ett cirkulärcylindriskt skal med radie a och tjocklek δ, dvs det område där det mesta av strömmen är koncentrerad.

En ytterligare lösning fås genom att sönderdela cylindern i ett antal parallellkopplade cirkulärcylindriska skal med radie r_{c} och tjocklek $\mathrm{d}r_{\mathrm{c}}$. Vid parallellkoppling adderas konduktanserna, vilket ger totala konduktansen

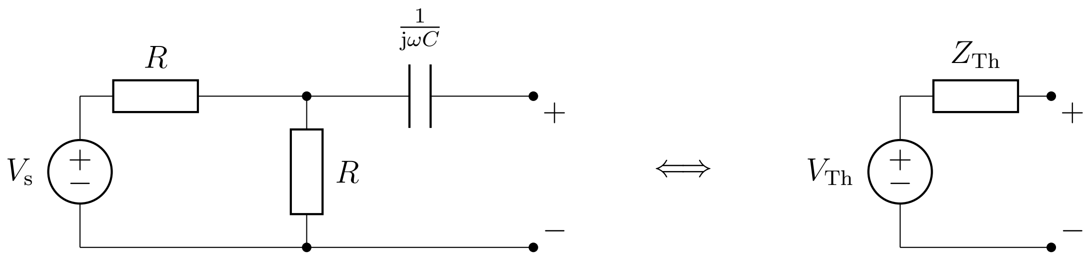
$$
G = \int \mathrm{d}G = \int_{r_{\mathrm{c}}=0}^{a} \frac{\sigma(\boldsymbol{r}) 2\pi r_{\mathrm{c}} \, \mathrm{d}r_{\mathrm{c}}}{\ell} = \cdots = \frac{\sigma_0 2\pi}{\ell} \left[a\delta - \delta^2 (1 - \mathrm{e}^{-a/\delta}) \right]
$$

Detta ger samma svar som ovan efter $R = 1/G$.

Svar: $R = \dfrac{\ell}{\sigma_0 2\pi} \dfrac{1}{a\delta - \delta^2 (1 - \mathrm{e}^{-a/\delta})} \approx \dfrac{\ell}{\sigma_0 2\pi a \delta}$.

3

a) Théveninekvivalenten beräknas enligt nedan.



$$V_{\mathrm{Th}} = V_{\mathrm{s}} \frac{R}{R+R} = \frac{V_{\mathrm{s}}}{2}$$

Théveninimpedansen är lika med inimpedansen då spänningskällan är nollställd, $V_{\mathrm{s}} = 0$, dvs

$$Z_{\mathrm{Th}} = \frac{R}{2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

b) Effektutvecklingen i R_{B} ges av

$$P_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} R_{\mathrm{B}} |I_{\mathrm{B}}|^2 = R_{\mathrm{B}} \frac{|V_{\mathrm{Th}}|^2}{2|R_{\mathrm{B}} + Z_{\mathrm{Th}}|^2} = \frac{|V_{\mathrm{s}}|^2 R_{\mathrm{B}}}{8\left((R_{\mathrm{B}} + R/2)^2 + (\frac{1}{\omega C})^2\right)}$$

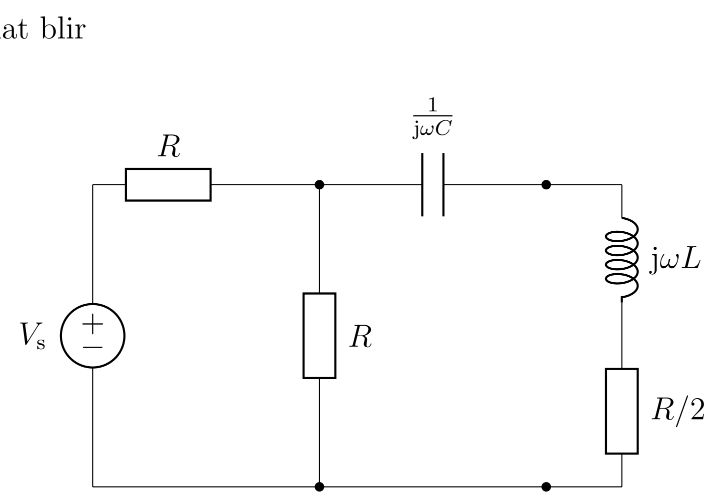
P_{B} är maximal då $1/P_{\mathrm{B}}$ är minimal, dvs då $\frac{\partial P_{\mathrm{B}}^{-1}}{\partial R_{\mathrm{B}}} = 0$. Detta ger

$$R_{\mathrm{B}} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

c) Maximal aktiv effektutveckling fås då belastningsimpedansen väljes till $Z_{\mathrm{B}} = Z_{\mathrm{Th}}^* = R/2 + \mathrm{j}/(\omega C)$. Belastningen kan t.ex. skapas genom att en resistans $R/2$ kopplas i serie med en spole vars induktans ges av

$$\mathrm{j}\omega L = \frac{\mathrm{j}}{\omega C} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

Kopplingsschemat blir



Svar:

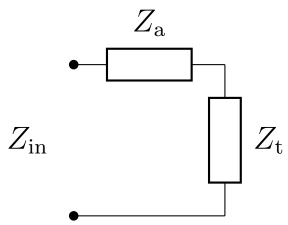
a) $V_{\mathrm{Th}} = \frac{V_{\mathrm{s}}}{2}$, $Z_{\mathrm{Th}} = \frac{R}{2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$.

b) $R_{\mathrm{B}} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$.

c) Se figur ovan.

4

Ersätt transmissionsledningen med dess inimpedans Z_{t} för att förenkla kretsen till



där inimpedansen Z_{t} för transmissionsledningen ges av

$$Z_{\mathrm{t}} = Z_0 \frac{Z_{\mathrm{L}} \cos(\beta\ell) + \mathrm{j} Z_0 \sin(\beta\ell)}{Z_0 \cos(\beta\ell) + \mathrm{j} Z_{\mathrm{L}} \sin(\beta\ell)}$$

Totalt får vi $Z_{\mathrm{in}} = Z_{\mathrm{a}} + Z_{\mathrm{t}}$ där vi ser att för att uppnå $\mathrm{Im}\{Z_{\mathrm{in}}\} = 0$ måste $\mathrm{Im}\{Z_{\mathrm{t}}\} = -X_{\mathrm{a}}$.

a) För $Z_{\mathrm{L}} = \infty$ har vi $Z_{\mathrm{t}} = -\mathrm{j}Z_0 / \tan(\beta\ell)$ och

$$\frac{Z_0}{\tan(\beta\ell)} = X_{\mathrm{a}} \Rightarrow \ell = \frac{\arctan(Z_0/X_{\mathrm{a}}) + n\pi}{\beta}$$

för heltal n.

b) För $Z_{\mathrm{L}} = 0$ har vi $Z_{\mathrm{t}} = \mathrm{j}Z_0 \tan(\beta\ell)$ och

$$Z_0 \tan(\beta\ell) = -X_{\mathrm{a}} \Rightarrow \ell = \frac{-\arctan(X_{\mathrm{a}}/Z_0) + n\pi}{\beta}$$

för heltal n.

c) Med en kapacitiv antenn har vi $X_{\mathrm{a}} < 0$ och

$$\ell = \frac{\arctan(-X_{\mathrm{a}}/Z_0)}{\beta} \leq \frac{\pi}{2\beta}$$

för den kortslutna transmissionsledningen. Den öppna ledningen ger en längd $\ell \geq \frac{\pi}{2\beta}$.

5

a) Spänningsdelning ger $v_{\mathrm{GS}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} 3\,\mathrm{V} = \dfrac{3\,\mathrm{V}}{1 + R_1/R_2}$.

b) Transistorn är i det strypta området om $v_{\mathrm{GS}} < V_{\mathrm{t}} = 1\,\mathrm{V}$. Då måste gälla $\dfrac{R_1}{R_2} > 2$.

c) Transistorn är i triodområdet om $v_{\mathrm{GS}} > V_{\mathrm{t}} = 1\,\mathrm{V}$ och $0 < v_{\mathrm{DS}} < v_{\mathrm{GS}} - V_{\mathrm{t}}$. Eftersom $v_{\mathrm{DS}} = 1.5\,\mathrm{V}$ krävs att $v_{\mathrm{GS}} > 2.5\,\mathrm{V}$. Det ger $\dfrac{R_1}{R_2} < 0.2$.

d) Transistorn är i det mättade området om $v_{\mathrm{GS}} > V_{\mathrm{t}} = 1$ V och $v_{\mathrm{GS}} < v_{\mathrm{DS}} + V_{\mathrm{t}} = 2.5\,\mathrm{V}$. Det ger $0.2 < \dfrac{R_1}{R_2} < 2$.

6

a) Detta är en vanlig RC-krets, $v_1(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ där $\tau = RC$.

b) Eftersom OP:n är kopplad som en spänningsföljare ligger spänningen $v_1(t)$ på utgången från den första OP:n. KVL på nästa steg ger

$$V_0 e^{-t/\tau} = v_2(t) + R i_2(t)$$

där $i_2(t) = C v_2'(t)$ är strömmen genom kretsen och $v_2(t)$ är spänningen över kondensatorn. Differentialekvationen för $v_2(t)$ ges av

$$v_2'(t) + \frac{1}{\tau} v_2(t) = \frac{1}{\tau} V_0 e^{-t/\tau}$$

Ekvationen löses med integrerande faktor. Det ger

$$\frac{d}{dt}\left(v_2(t) e^{t/\tau}\right) = \frac{V_0}{\tau}$$

Begynnelsevillkoret är $v_2(0) = 0$. Integration från 0 till t ger

<u>Svar:</u>

$$v_2(t) = V_0 \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau}$$

c) Nästa RC-länk matas av $v_2(t)$. Det ger

$$\frac{d}{dt}\left(v_3(t) e^{t/\tau}\right) = V_0 \frac{t}{\tau^2}$$

där $v_3(t)$ är spänningen över kondensatorn. Lösningen ges av

$$v_3(t) = V_0 \frac{t^2}{2\tau^2} e^{-t/\tau}$$

I den n:te RC-kretsen fås

$$v_{\mathrm{n}}(t) = V_0 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!\tau^{n-1}} e^{-t/\tau}$$