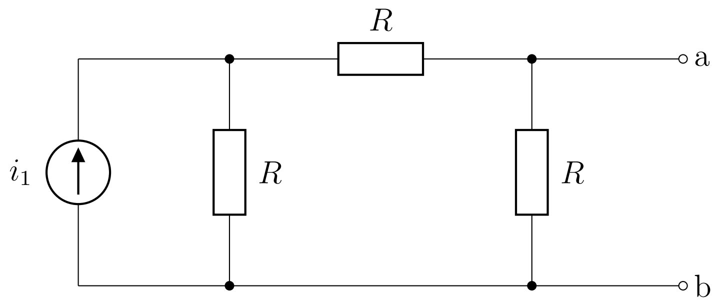
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 26/8 2013

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

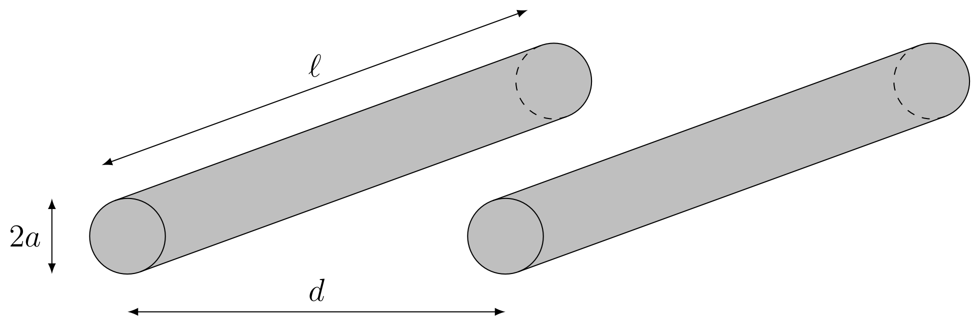
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet a–b i nedanstående krets. Storheterna i_1 och R kan betraktas som kända.



2



Betrakta två långa, raka, parallella metalltrådar enligt figur. Trådarna har radie a och avstånd d mellan sina respektive centrumpunkter, där det gäller att $a \ll d$. Antag att det elektriska fältet från respektive tråd kan modelleras som det fält som orsakas av en laddning per längdenhet $q/\ell = \rho_\ell$ i centrum av tråden, dvs $\boldsymbol{E} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 2\pi r_c}\boldsymbol{e}_{r_c}$, där r_c är avståndet från cylinderaxeln. Beräkna kapacitansen per längdenhet mellan trådarna med hjälp av den givna fältfördelningen och definitionen av kapacitans.

3

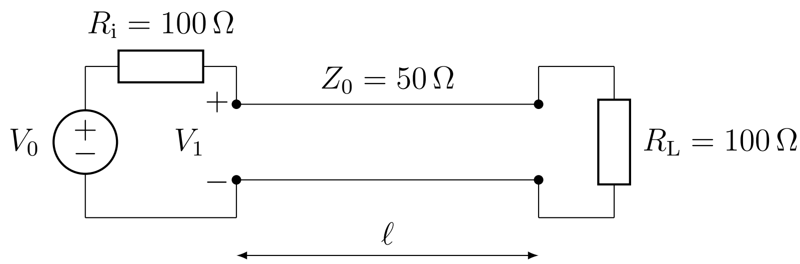
Konstruera ett lågpassfilter med brytvinkelfrekvensen $\omega_0 = 10^7\,\text{rad/s}$ under följande förutsättningar:

a) Du har tillgång till en kondensator med kapacitansen $100\,\text{pF}$ ($= 10^{-10}\,\text{F}$) och ett ställbart motstånd som kan ställas in i intervallet $1\,\Omega - 100\,\text{k}\Omega$. Ange vilket värde du använder. Rita kretsschema där in- och utporten är tydligt markerade.

b) Du har tillgång till en spole med induktans $10\,\mu\text{H}$ och ett ställbart motstånd som kan ställas in i intervallet $1\,\Omega - 100\,\text{k}\Omega$. Ange vilket värde du använder. Rita kretsschema där in- och utporten är tydligt markerade.

c) Antag att du trott att spolen är en ideal induktans utan resistans när du konstruerade filtret i b). När du mäter på filtret visar det sig att för frekvenser betydligt under brytfrekvensen blir det en dämpning $|H| = \frac{|V_{\text{ut}}|}{|V_{\text{in}}|} = 0.9$ av utsignalen. Vilken resistans har spolen?

4



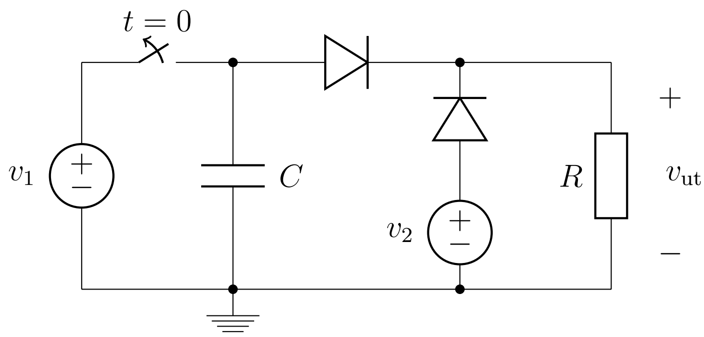
En tidsharmonisk spänningskälla med komplex amplitud V_0 och inre resistans $100\,\Omega$ kopplas in till en förlustfri transmissionsledning med karakteristisk impedans $Z_0 = 50\,\Omega$ och längd ℓ. Ledningen avslutas med en resistans $100\,\Omega$. Vid vinkelfrekvensen ω är våglängden längs transmissionsledningen λ, vilket ger vågtalet $\beta = 2\pi/\lambda$. Bestäm den komplexa amplituden V_1 vid ingången på ledningen för följande fall:

a) $\ell = 0\,\text{m}$

b) $\ell = \lambda/4$

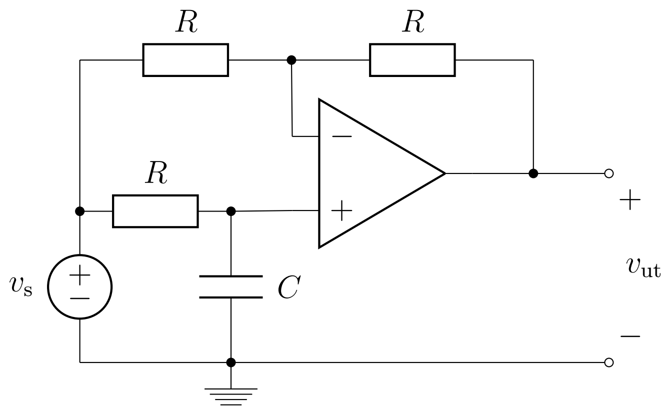
c) $\ell = \lambda/2$

5



Bestäm spänningen $v_{\mathrm{ut}}(t)$ för $t > 0$. Strömbrytaren öppnas vid tiden $t = 0$. Likspänningarna $v_1 > v_2$, resistansen R och kapacitansen C är givna. Dioderna kan anses vara ideala.

6

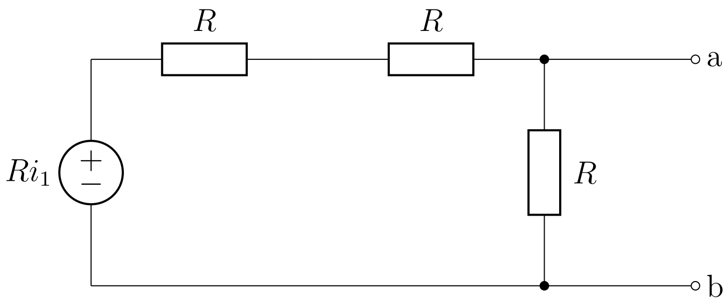


Bestäm överföringsfunktionen $H(s) = V_{\mathrm{ut}}(s)/V_{\mathrm{s}}(s)$ och bestäm dess amplitud och fas för $s = \mathrm{j}\omega$. Här betecknar $V_{\mathrm{ut}}(s)$ och $V_{\mathrm{s}}(s)$ Laplacetransformen av $v_{\mathrm{ut}}(t)$ och $v_{\mathrm{s}}(t)$, där det gäller att $v_{\mathrm{s}}(t) = 0$ för $t < 0$. Operationsförstärkaren kan anses vara ideal.

Lösningar

1

Vi gör först en källtransformering av den vänstra delen av kretsen till en Thévenin-ekvivalent:



Tomgångsspänningen (Thévenin-spänningen) ges nu av spänningsdelning

$$v_{\mathrm{th}} = \frac{R}{R+2R} R i_1 = \frac{1}{3} R i_1$$

och den inre resistansen (Thévenin-resistansen) av en parallellkoppling mellan R och $2R$:

$$R_{\mathrm{th}} = \frac{R \cdot 2R}{R+2R} = \frac{2}{3} R$$

<u>Svar:</u> Thévenin-ekvivalenten ges av en spänningskälla $v_{\mathrm{th}} = \frac{1}{3} R i_1$ i serie med resistansen $R_{\mathrm{th}} = \frac{2}{3} R$.

2

Placera laddningen $+\rho_\ell$ på den vänstra ledaren och $-\rho_\ell$ på den högra, och låt den vänstra ledarens centrum ligga i $x = 0$ och den högra i $x = d$. För att beräkna spänningen mellan ledarna integrerar vi det elektriska fältet på en förbindelselinje mellan ledarna, med start och stopp på respektive ledaryta:

$$v_{\text{vänster}} - v_{\text{höger}} = \int_{x=a}^{d-a} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^{d-a} \underbrace{\left[\frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 2\pi x} \boldsymbol{e}_x + \frac{-\rho_\ell}{\epsilon_0 2\pi (d-x)} (-\boldsymbol{e}_x) \right]}_{=\boldsymbol{E}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{e}_x \, \mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}\boldsymbol{r}}$$

$$= \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 2\pi} \int_a^{d-a} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 2\pi} \left[\ln x - \ln(d-x) \right]_a^{d-a} = \frac{\rho_\ell}{\epsilon_0 2\pi} 2 \ln \left(\frac{d-a}{a} \right)$$

Vi får då kapacitansen per längdenhet till

$$\frac{C}{\ell} = \frac{\rho_\ell}{v_{\text{vänster}} - v_{\text{höger}}} = \frac{\epsilon_0 \pi}{\ln\left(\frac{d-a}{a}\right)} \approx \frac{\epsilon_0 \pi}{\ln(d/a)}$$

3

I samtliga fall kopplas komponenterna i serie, där insignalen kopplas in över hela seriekopplingen och utsignalen tas som delspänningen över en av komponenterna.

a) Ta ut signalen över kondensatorn. Brytvinkelfrekvensen är $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. Resistansen ges av $R = \frac{1}{\omega_0 C} = 1\,\mathrm{k}\Omega$.

b) Ta ut signalen över resistansen. Brytvinkelfrekvensen är $\omega_0 = \frac{R}{L}$. Resistansen ges av $R = \omega_0 L = 100\,\Omega$.

c) Låt spolens resistans vara R_L. Denna ligger i serie med induktansen. Vid låga frekvenser kan induktansen försummas. Spänningsdelning ger då

$$|H| = \frac{R_b}{R_b + R_L}$$

där R_b är resistansen i uppgift b). Detta ger

Svar:

$$R_L = \frac{R_b - |H|R_b}{|H|} = \frac{1}{9}R_b = \frac{100}{9}\,\Omega$$

4

En transmissionsledning med karakteristisk impedans Z_0, vågtal $\beta = 2\pi/\lambda$ och längd ℓ, belastad med en impedans Z_L i ena änden, har en inimpedans

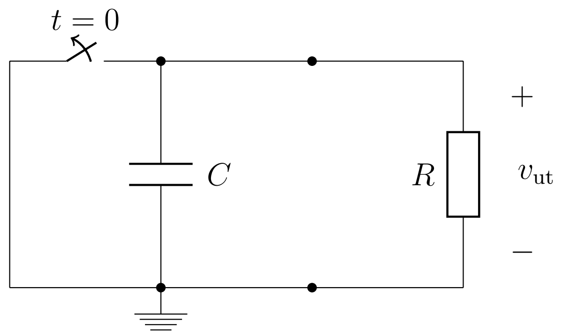
$$Z_\mathrm{in} = Z_0 \frac{Z_\mathrm{L}\cos(\beta\ell) + \mathrm{j}Z_0\sin(\beta\ell)}{Z_0\cos(\beta\ell) + \mathrm{j}Z_\mathrm{L}\sin(\beta\ell)}$$

a) Vid $\ell = 0$ är $\beta\ell = 0$ och $Z_\mathrm{in} = 100\,\Omega$. Spänningsdelning ger $V_1 = V_0/2$.

b) Vid $\ell = \lambda/4$ är $\beta\ell = \pi/2$ och $Z_\mathrm{in} = Z_0^2/Z_\mathrm{L} = 50^2/100\,\Omega = 25\,\Omega$. Spänningsdelning ger $V_1 = \frac{25}{25+100}V_0 = 0.2V_0$.

c) Vid $\ell = \lambda/2$ är $\beta\ell = \pi$ och $Z_\mathrm{in} = Z_\mathrm{L} = 100\,\Omega$. Spänningsdelning ger $V_1 = V_0/2$.

5



Förenkla kretsen för $t > 0$ och $v_{\mathrm{ut}}(t) > v_2$ enligt figuren. KCL ger

$$C\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{ut}}}{\mathrm{d}t} + \frac{v_{\mathrm{ut}}}{R} = 0$$

med begynnelsevärdet $v_{\mathrm{ut}}(0) = v_1$ och lösningen

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = v_1 \mathrm{e}^{-t/RC}$$

Den är giltig till

$$v_{\mathrm{ut}}(t_2) = v_1 \mathrm{e}^{-t_2/RC} = v_2$$

eller

$$t_2 = RC \ln \frac{v_1}{v_2}$$

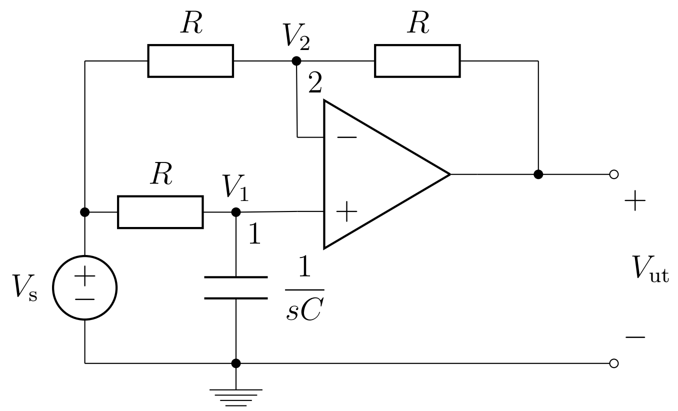
Därefter

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = v_2$$

Totalt

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = \begin{cases} v_1 & t < 0 \\ v_1 \mathrm{e}^{-t/RC} & 0 < t < t_2 = RC \ln \frac{v_1}{v_2} \\ v_2 & t > t_2 \end{cases}$$

6



Transformera till Laplacedomän och använd nodanalys på nod 1,2. De har samma potential $V_1 = V_2$.

Nod 1: $$\frac{V_1 - V_{\mathrm{s}}}{R} + \frac{V_1 - 0}{\frac{1}{sC}} = 0$$

Nod 2: $$\frac{V_1 - V_{\mathrm{s}}}{R} + \frac{V_1 - V_{\mathrm{ut}}}{R} = 0$$

Förenkla, KCL på nod 1 ger $V_1(1 + sRC) = V_{\mathrm{s}}$ och KCL på nod 2 ger $2V_1 = V_{\mathrm{s}} + V_{\mathrm{ut}}$ som totalt ger överföringsfunktionen

$$H(s) = \frac{2}{1 + sRC} - 1 = \frac{1 - sRC}{1 + sRC}$$

Vi ser att $|H(\mathrm{j}\omega)| = 1$ och $\arg(H(\mathrm{j}\omega)) = -2\arctan(\omega RC)$.