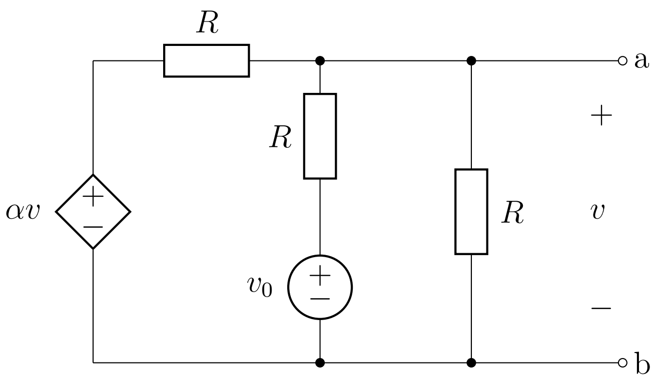
Tentamen i ETE115 Ellära och elektronik, 4/6 2013

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.

Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

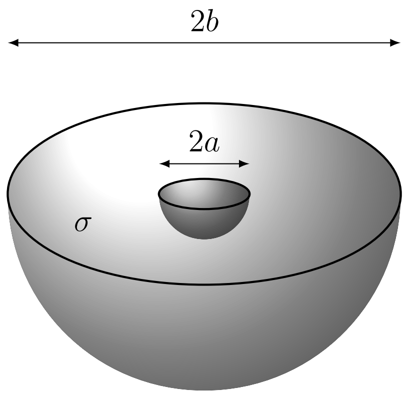
1

Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet a–b i nedanstående krets.



2

En elektrod i form av en metallisk halvsfär med radie a sänks ned i ett större halvsfäriskt metallskal med radie b fyllt med ett material med ledningsförmåga σ, enligt figur nedan.

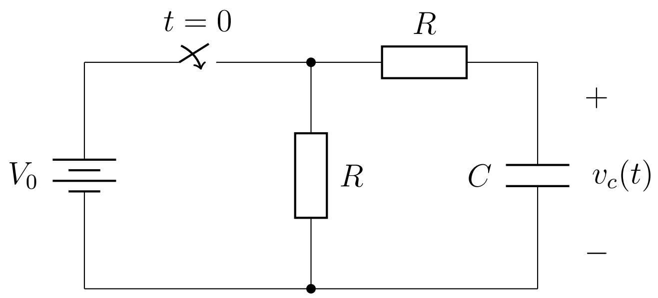


Då spänningen $v_a - v_b$ läggs mellan halvsfärerna, uppstår strömtätheten

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{J_0}{r^2}\boldsymbol{e}_r, \quad a < r < b$$

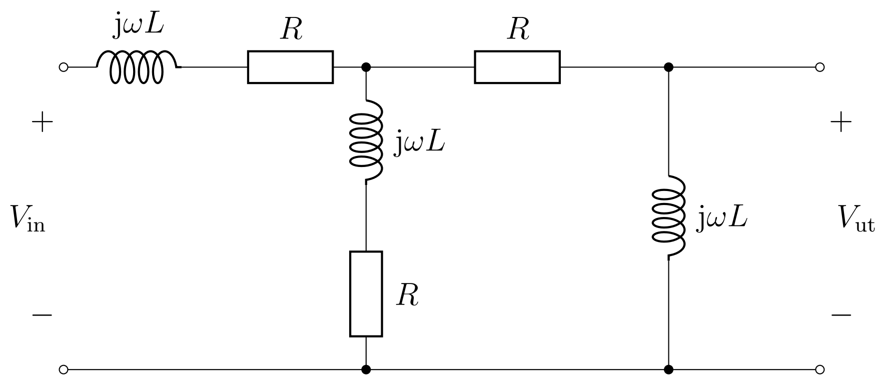
Beräkna resistansen R_{ab}.

3



Kapacitansen i kretsen ovan är oladdad vid $t = 0$. Kontakten sluts vid $t = 0$ och öppnas igen när $v_c(t) = V_0/2$. Bestäm $v_c(t)$ för alla tider.

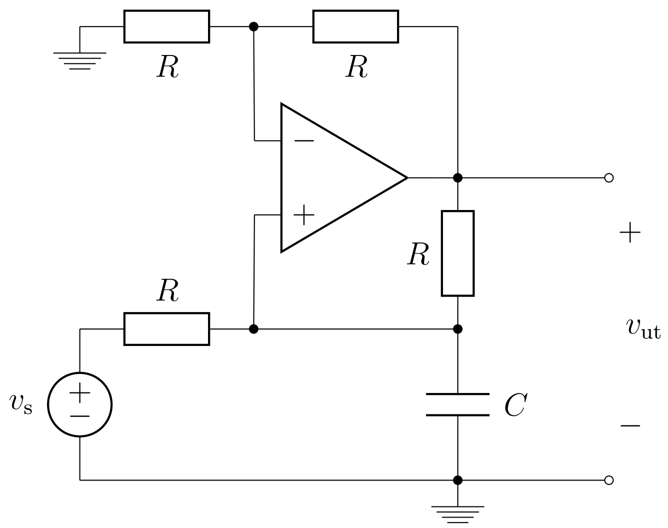
4



a) Bestäm överföringsfunktionen $H = \dfrac{V_{\mathrm{ut}}}{V_{\mathrm{in}}}$.

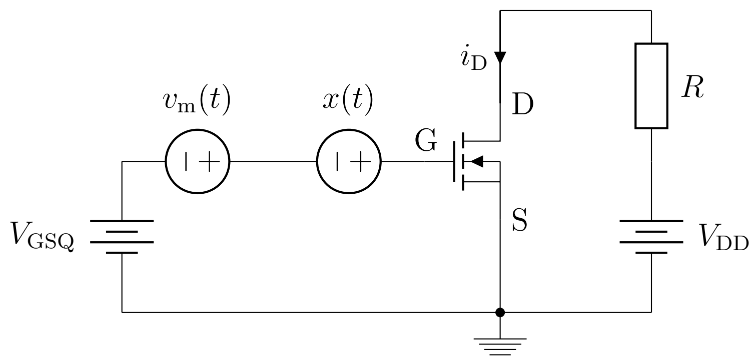
b) Vid vilken vinkelfrekvens ω är det en fasskillnad av $45°$ mellan V_{ut} och V_{in}? Uttryck ω i R och L.

5



Bestäm utsignalen $v_{ut}(t)$ då $v_s(t) = V_0 \sin(\omega t) H(t)$, där $H(t) = 0$ för $t < 0$ och $H(t) = 1$ för $t > 0$. Operationsförstärkaren kan anses vara ideal.

6



Eftersom dioder och transistorer har en olinjär ström- spänningskarakteristik kan de användas för att modulera signaler. I figuren visas en enkel krets med en MOSFET (NMOS) för att illustrera principen. Antag att signalen $x(t) = A \cos(\omega_1 t)$ ska moduleras med bärvågen $v_m(t) = M \cos(\omega_c t)$ för att generera signaler med vinkelfrekvenser $\omega_c \pm \omega_1$. Tröskelspänningen V_{t0} och strömmen I_{DSS} är givna för transistorn. Likspänningarna V_{GSQ} och V_{DD} är valda så att transistorn befinner sig i mättnadsområdet.

Bestäm amplituden för frekvenskomponenterna $\omega_c \pm \omega_1$ genom att identifiera dessa från $i_D(t)$.

Lösningar

1

Jorda nod b och använd Kirchhoffs strömlag i nod a:

$$\frac{v-\alpha v}{R}+\frac{v-v_0}{R}+\frac{v-0}{R}=0 \quad \Rightarrow \quad v=\frac{v_0}{3-\alpha}=v_\infty$$

där v_∞ betecknar tomgångsspänningen. Vid kortslutning är spänningen $v=0$, och vi får kortslutningsströmmen $i_0=\frac{v_0}{R}$. Slutligen fås Thévenin-resistansen som

$$R_{\text{th}}=\frac{v_\infty}{i_0}=\frac{R}{3-\alpha}$$

Svar: Thévenin-ekvivalenten ges av en spänningskälla $v_{\text{th}}=\frac{v_0}{3-\alpha}$ i serie med resistansen $R_{\text{th}}=\frac{R}{3-\alpha}$.

2

Med strömfördelningen $\boldsymbol{J}=\frac{J_0}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ har vi det elektriska fältet $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}/\sigma=\frac{J_0}{\sigma r^2}$, och därmed spänningen

$$v_a-v_b=\int_{r=a}^{b}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b \underbrace{\frac{J_0}{\sigma r^2}\boldsymbol{e}_r}_{=\boldsymbol{E}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{e}_r\,\mathrm{d}r}_{=\mathrm{d}\boldsymbol{r}}=\frac{J_0}{\sigma}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{J_0}{\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=\frac{J_0}{\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Den totala strömmen ges av en ytintegral som omsluter hela strömbanan. Denna väljs enklast som en halvsfär med radie $r=r_0$, där $a<r_0<b$. Beteckna denna yta med S, och notera att integralen över den plana gränsytan ($\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_z$) ger noll bidrag eftersom strömflödet är parallellt med denna gränsyta).

$$i_{ab}=\int_S\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}S=\int_{r=r_0}\underbrace{\frac{J_0}{r^2}\boldsymbol{e}_r}_{=\boldsymbol{J}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{e}_r\,\mathrm{d}S}_{=\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}S}=\frac{J_0}{r_0^2}\int_{r=r_0}\mathrm{d}S=\frac{J_0}{r_0^2}\underbrace{2\pi r_0^2}_{\substack{\text{ytan av en}\\ \textit{halv}\text{ sfär}}}=2\pi J_0$$

Svar:

$$R_{ab}=\frac{v_a-v_b}{i_{ab}}=\frac{1}{\sigma 2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

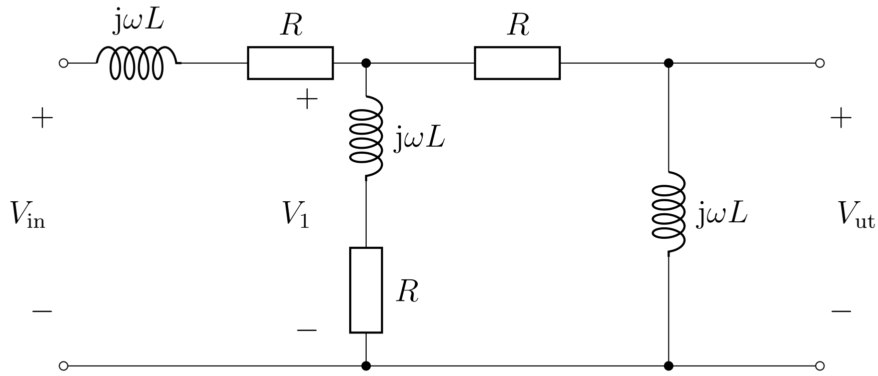
3

Då kontakten sluts är kapacitansen oladdad, och kopplas in i serie med en resistans R och spänningskälla V_0, dvs $v_c(t) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)})$ för $0 < t < t_0$. Vid $t_0 = RC \ln 2$ är $v_c(t_0) = V_0/2$, och brytaren öppnas. Kapacitansen laddas då ur genom en resistans $2R$, dvs $v_c(t) = v_c(t_0)\mathrm{e}^{-(t-t_0)/(2RC)}$ för $t > t_0$.

Svar:

$$v_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}) & 0 < t < RC \ln 2 \\ \dfrac{V_0}{2}\mathrm{e}^{-(t-RC\ln 2)/(2RC)} = \dfrac{V_0}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-t/(2RC)} & t > RC \ln 2 \end{cases}$$

4



Vi börjar med att bestämma V_1, enligt figur, med spänningsdelning. V_1 ligger över en parallellkoppling av $Z = R + \mathrm{j}\omega L$ med $Z = \mathrm{j}\omega L + R$, dvs över impedansen $Z \| Z = \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}(R + \mathrm{j}\omega L)$. Detta ger

$$V_1 = \frac{Z/2}{Z + Z/2} V_{\mathrm{in}} = \frac{1}{3} V_{\mathrm{in}}$$

Vi spänningsdelar nu V_1 för att få V_{ut}

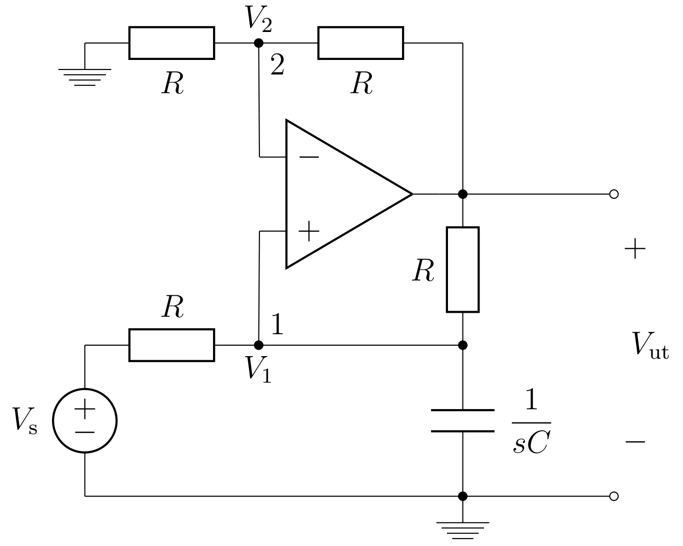
$$V_{\mathrm{ut}} = \frac{\mathrm{j}\omega L}{R + \mathrm{j}\omega L} V_1 = \frac{\mathrm{j}\omega L}{3(R + \mathrm{j}\omega L)} V_{\mathrm{in}}$$

a) Svar: $H = \dfrac{\mathrm{j}\omega L}{3(R + \mathrm{j}\omega L)}$

b) $H = \dfrac{\omega L}{3\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \mathrm{e}^{\pi/2 - \mathrm{j}\arctan(\omega L/R)}$. Fasskillnaden är alltså $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(\omega L/R)$. Denna är $\pi/4$ då $\omega L = R$. Det ger

Svar: $\omega = \dfrac{R}{L}$

5



Transformera kretsen till Laplace-planet enligt ovan. Använd nodanalys på noderna 1 och 2, vilka har samma potential $V_1 = V_2$.

$$\text{Nod 1:} \qquad \frac{V_1 - V_\mathrm{s}}{R} + \frac{V_1 - 0}{\frac{1}{sC}} + \frac{V_1 - V_\mathrm{ut}}{R} = 0$$

$$\text{Nod 2:} \qquad \frac{V_1 - 0}{R} + \frac{V_1 - V_\mathrm{ut}}{R} = 0$$

KCL för nod 2 ger $V_\mathrm{ut} = 2V_1$ som insatt i KCL för nod 1 ger

$$V_\mathrm{ut}(s) = \frac{2V_\mathrm{s}}{sRC} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{ut}(t) = \frac{2}{RC}\int_0^t v_\mathrm{s}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{2V_0}{RC}\int_0^t \sin(\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Svar:

$$v_\mathrm{s}(t) = \frac{2V_0}{\omega RC}\left(1 - \cos(\omega t)\right) H(t)$$

6

Strömmen ges av

$$i_\mathrm{D} = K\left(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0}\right)^2 \tag{1}$$

i mättnadsområdet. Spänningen $v_\mathrm{GS}(t)$ är

$$v_\mathrm{GS}(t) = V_\mathrm{GSQ} + M\cos(\omega_\mathrm{c}t) + A\cos(\omega_1 t)$$

Insatt i (1)

$$\begin{aligned} i_\mathrm{D}(t) &= K\big(V_\mathrm{GSQ} + M\cos(\omega_\mathrm{c}t) + A\cos(\omega_1 t) - V_\mathrm{t0}\big)^2 \\ &= K\big((V_\mathrm{GSQ} - V_\mathrm{t0})^2 + M^2\cos^2(\omega_\mathrm{c}t) + A^2\cos^2(\omega_1 t) + 2(V_\mathrm{GSQ} - V_\mathrm{t0})(M\cos(\omega_\mathrm{c}t) + A\cos(\omega_1 t))\big) \\ &\quad + 2KMA\cos(\omega_\mathrm{c}t)\cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

Det är bara den sista termen som innehåller de intressanta termerna (de övriga termerna innehåller DC, ursprungliga frekvenser och dubbla frekvenser). Den sista termen kan skrivas

$$2KMA\cos(\omega_{\mathrm{c}}t)\cos(\omega_1 t) = KMA\big(\cos([\omega_{\mathrm{c}}+\omega_1]t)+\cos([\omega_{\mathrm{c}}-\omega_1]t)\big)$$

Svar: Amplituden för frekvenskomponenterna $\omega_{\mathrm{c}} \pm \omega_1$ är KMA.