Tentamen ETE115 Ellära och elektronik för F och N, 2009-06-02

Tillåtna hjälpmedel: formelsamling i kretsteori och elektronik. Observera att uppgifterna inte är ordnade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

Johan har fyra halvdåliga 1.5 V batterier och skall till dessa koppla in en glödlampa som enligt beskrivning förbrukar 3 W vid 1.5 V spänning. Genom att använda en voltmeter och en resistans av 5 Ω lyckas Johan mäta upp att samtliga batterier har en inre resistans av 0.75 Ω och tomgångsspänningen 1.5 V.

a) Beskriv hur Johan kan mäta upp den inre resistansen och tomgångsspänningen. Rita enkla kretsscheman. Voltmetern kan representeras av en kvadrat med en plus- och minuspol.

b) Genom att koppla in batterierna på rätt sätt kan Johan få lampan att lysa med full effekt, dvs så att den förbrukar 3 W. Beskriv hur Johan har kopplat batterierna och lampan och rita ett kretsschema för kopplingen.

<u>Ledning:</u> Alla siffervärden är valda så att man inte behöver kalkylator för att lösa uppgiften.

2

Området mellan inner- och ytterledaren i en koaxialkabel är fyllt med ett material vars konduktivitet är σ. Koaxialkabelns innerledare har ytterradien a och dess ytterledare har innerradien b. Kabelns längd L är mycket större än b.

Antag att vi driver en ström I från innerledaren till ytterledaren.

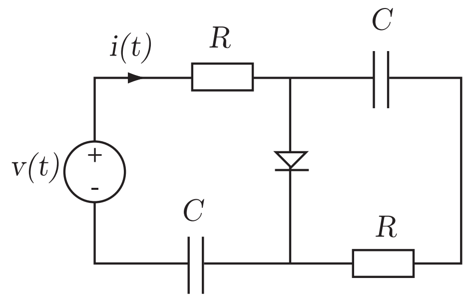
a) Rita en figur över koaxialkabelns tvärsnitt och rita ut strömtäthetens riktning i några olika punkter mellan inner- och ytterledaren.

b) Bestäm strömtätheten $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$ i alla punkter mellan inner- och ytterledare.

c) Bestäm spänningen $V(a) - V(b)$ mellan inner- och ytterledare.

d) Bestäm resistansen R mellan inner- och ytterledaren.

3



Spänningskällan ger en fyrkantpuls med spänningen

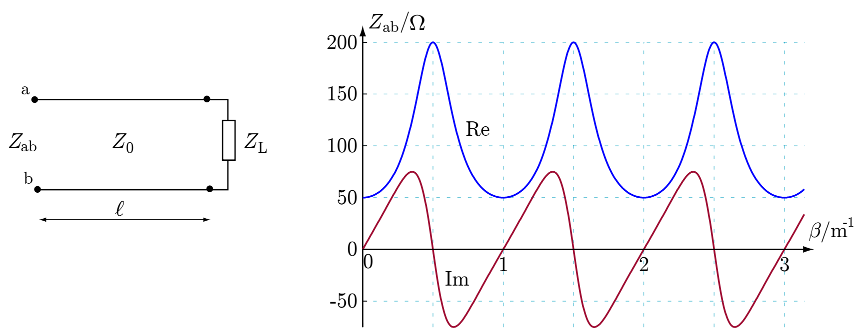
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_0 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

där $V_0 > 0$ och pulslängden T är mycket större än RC.

a) Bestäm $i(t)$ för $0 \leq t \leq T$.

b) Bestäm $i(t)$ för $t \geq T$.

4



En last Z_L är kopplad till en transmissionsledning med karakteristisk impedans Z_0 och längd ℓ. Man mäter impedansen Z_{ab} mellan nodparet ab för att bestämma Z_L, Z_0, och ℓ. Figuren visar real- och imaginärdelen av den uppmätta impedansen Z_{ab} (enhet Ω) som funktion av vågtalet $\beta = 2\pi f/v$ (enhet m^{-1}), där f betecknar frekvensen och v fashastigheten i transmissionsledningen.

a) Bestäm lastens impedans Z_L.

b) Bestäm längden ℓ.

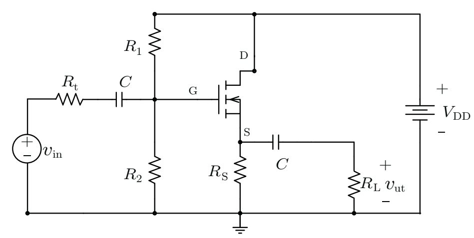
c) Bestäm den karakteristisk impedansen Z_0.

Motivera resultaten.

Transmissionsledningen kan anses vara förlustfri.

5

Figuren visar en 'common drain' förstärkare med en NMOS-transistor. Likspänningskällan V_DD och motstånden R_1, R_2, R_S är valda så att transistorn är i mättnadsområdet. Insignalen $v_\mathrm{in}(t) = V_\mathrm{in}\cos(\omega t)$ är vald så att $|V_\mathrm{in}| \ll V_\mathrm{DD}$ och så att kopplingskapacitansernas impedanser kan försummas. Tröskelspänningen $V_\mathrm{t} \ll V_\mathrm{DD}$ och konstanten K för transistorn är kända.



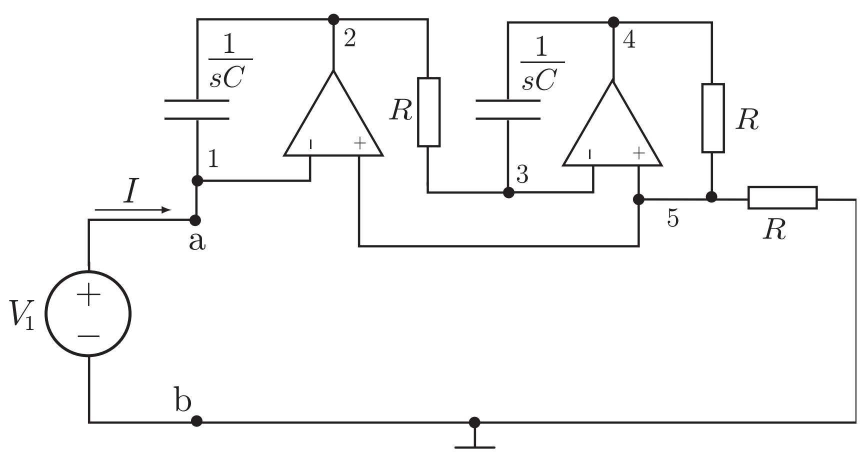
a) Rita kretsschemat för likspänningen V_DD (storsignalschemat).

b) Bestäm ekvationerna för de två kurvor i $\{V_\mathrm{GS}, I_\mathrm{D}\}$-planet vars skärningspunkt ger arbetspunkten, dvs V_GSQ och I_DQ.

c) Skissa de två kurvor i $\{V_\mathrm{GS}, I_\mathrm{D}\}$-planet vars skärningspunkt ger arbetspunkten, dvs V_GSQ och I_DQ.

d) Vilken effekt utvecklas i motstånden R_1, R_2, R_s, likspänningskällan och transistorn. Alla resistanser, spänningen V_{DD} och arbetspunkten (V_{GSQ}, I_{DQ}) antas kända.

6



Figuren visar en krets med två operationsförstärkare. Impedansen Z_ab kan bestämmas med nodanalys i tre noder.

a) Ange de tre noder där KCL skall användas, motivera?

b) Ange nodanalysekvationerna för de tre noderna.

c) Bestäm impedansen $Z_{\mathrm{ab}} = V_1/I$.

Noderna är numrerade 1 till 5 med tillhörande nodpotentialer V_n, $n = 1, ..., 5$. Operationsförstärkarna kan anses vara ideala och resistansen R och kapacitansen C är kända. Spänningskällan ges av $v_1(t) = \mathrm{Re}\{V_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.

Lösningsförslag

1

a) Johan mäter först upp tomgångsspänningarna genom att koppla in voltmetern direkt på ett batteri i taget. Därefter bestämmer Johan de inre resistanserna. Detta gör han genom att koppla in 5 Ω motståndet till vardera batteri och mäta spänningen över motståndet. Spänningsdelning ger

$$V_{\text{uppmätt}} = \frac{5}{R_i + 5} 1.5\,\text{V}$$

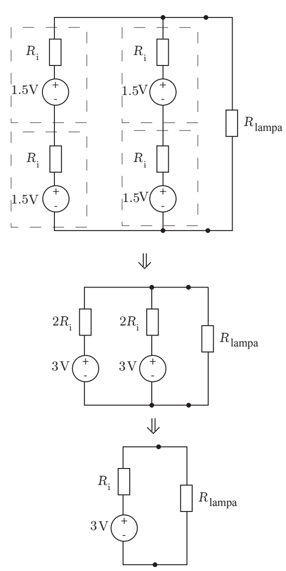
Därmed ges den inre resistansen av

$$R_i = 5\left(\frac{1.5}{V_{\text{uppmätt}}} - 1\right)$$

b) Glödlampan ger 3 W vid 1.5 V spänning. Det gäller alltså att få 1.5 V över lampan. Lampan ger effekten $P = 3$ W vid 1.5 V vilket ger lampans resistans

$$R_{\text{lampa}} = \frac{V^2}{P} = \frac{1.5^2}{3} = 0.75\,\Omega$$

Man kan då koppla enligt figuren.



Eftersom $R_i = R_{\text{lampa}}$ får vi spänningen 1.5 V över glödlampan och därmed förbrukar den 3 W.

2

a) Strömtätheten är riktad radiellt ut från symmetriaxeln.

b) $\boldsymbol{J}(r_c) = \dfrac{I}{2\pi r_c L}\hat{\boldsymbol{r}}_c$ där $\hat{\boldsymbol{r}}_c$ är enhetsvektorn som pekar i radiell led.

c) Det elektriska fältet ges av $\boldsymbol{E}(r_c) = \sigma^{-1}\boldsymbol{J}(r_c) = \dfrac{I}{2\pi\sigma r_c L}\hat{\boldsymbol{r}}_c$.

Spänningen ges av

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \boldsymbol{E}(r_c)\cdot\hat{\boldsymbol{r}}_c\,\mathrm{d}r_c = \frac{I}{2\pi\sigma L}\ln(b/a)$$

d) $R = \dfrac{V(b)-V(a)}{I} = \dfrac{1}{2\pi\sigma L}\ln(b/a)$

3

a) För $0 < t < T$ är dioden framspänd och kan ersättas med en kortslutning. Kretsen blir då en vanlig RC-krets som laddas upp av en spänning V_0. Detta ger spänningen över den undre kondensatorn

$$v_c(t) = V_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right),\ 0 < t < T$$

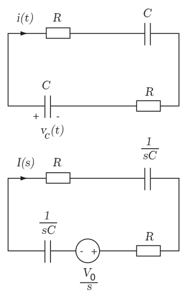
där $\tau = RC$. Strömmen ges av

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_0}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau},\ 0 < t < T$$

b) Vi antar nu att $T \gg \tau$. Det gör att den undre kondensatorn är uppladdad till spänningen V_0 vid tiden $t = T$. För $t > T$ är dioden backspänd och vi får den övre kretsen i figuren. Man kan bestämma strömmen med Laplacetransformering eller direkt i tidsplanet. Inför först tiden $\tilde{t} = t - T$ och bestäm $v_c(t)$ för $\tilde{t} > 0$.

Lösning med Laplacetransformering

Eftersom $v_c = V_0$ för $\tilde{t} = 0$ kan vi ersätta den under kondensatorn med en kondensator i serie med en spänningskälla vilket leder till den undre kretsen i figuren.



Ur denna får vi strömmen

$$I(s) = -\frac{V_0}{s(2R + 2/(sC))} = -\frac{V_0 C}{2(1 + sCR)}$$

Motsvarande tidsberoende ström är (se formelsamling)

$$i(t) = -\frac{V_0}{2R} e^{-\tilde{t}/\tau}, \; 0 < t < T$$

där $\tau = RC$. Detta ger

$$i(t) = -\frac{V_0}{2R} e^{-\tilde{t}/\tau}$$

Om $\tilde{t}$ ersätts med $t - T$ fås

$$i(t) = -\frac{V_0}{2R} e^{-(t-T)/RC}, \;\; t > T$$

Lösning i tidsplanet

För $t > T$ kan vi seriekoppla de båda motstånden till en resistans $2R$ och de båda kondensatorerna till en kapacitansen $C/2$. Begynnelsvillkoret vid $t = T$ är att kapacitansen $C/2$ är uppladdad till spänningen $-V_0$, se figur (man inser detta om man använder Theveninekvivalenten för kondensatorerna.) Standardmetoden för att behandla urladdning av kondensatorer ger att spänningen över kapacitansen $C/2$ blir

$$v_c(t) = -V_0 e^{-(t-T)/RC}$$

Strömmen ges av

$$i(t) = -\frac{C}{2}\frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{V_0}{2R} e^{-(t-T)/RC}, \;\; t > T$$

4

Impedansen ges av

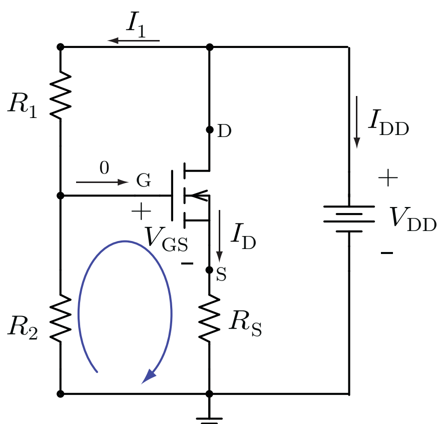
$$Z_{\rm ab} = Z_{\rm in} = Z_0 \frac{Z_{\rm L}\cos(\beta\ell) + {\rm j}Z_0\sin(\beta\ell)}{Z_0\cos(\beta\ell) + {\rm j}Z_{\rm L}\sin(\beta\ell)} \tag{1}$$

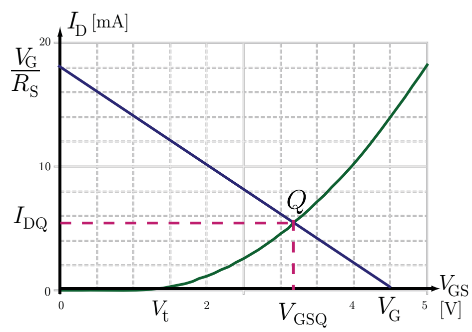
a) För $\beta = 0$ får vi $Z_{\rm ab} = Z_{\rm L} = 50\,\Omega$.

b) $Z_{\rm ab}$ är periodisk, dvs $Z_{\rm ab}(\beta) = Z_{\rm ab}(\beta + 1\,{\rm m}^{-1})$. Enligt impedanstransformeringen är därmed $2\ell = 2\pi$ m, och $\ell = \pi$ m.

c) Det enklaste är att använda kvartvågstransformatorn ($2\beta\ell = \pi$ eller $\beta = 0.5\,{\rm m}^{-1}$) där $200\,\Omega = Z_{\rm ab} = Z_0^2/Z_{\rm L}$ som ger $Z_0 = 100\,\Omega$.

5





a) Kretsschemat visas i figuren.

b) Arbetspunkten, Q, för transistorn kan bestämmas med belastningslinjen. KVL längs slingan i figuren ger

$$V_{\rm G} - V_{\rm GS} - I_{\rm D}R_{\rm S} = 0$$

där

$$V_{\rm G} = V_{\rm DD}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

är potentialen i G. Sambandet i mättnadsområdet är

$$I_{\rm D} = K(V_{\rm GS} - V_{\rm t})^2$$

Lösningen av ekvationssystemet ger arbetspunkten $I_{\rm DQ}, V_{\rm GSQ}$.

c) Se figur.

d) Strömmen genom $R_1 och R_2$ är $I_1 = V_{\rm DD}/(R_1 + R_2)$ vilket ger effektutvecklingen

$$p_1 = R_1 I_1^2 = R_1\frac{V_{\rm DD}^2}{(R_1+R_2)^2} \quad \text{och} \quad p_2 = R_2 I_1^2 = R_2\frac{V_{\rm DD}^2}{(R_1+R_2)^2}$$

Strömmen genom $R_{\rm s}$ är $I_{\rm DQ}$ vilket ger

$$p_{\rm s} = R_{\rm s} I_{\rm DQ}^2$$

Strömmen genom spänningskällan ges av $I_{\text{DD}} = -I_1 - I_{\text{DQ}}$ som ger

$$p_{\text{DD}} = V_{\text{DD}} I_{\text{DD}} = -\frac{V_{\text{DD}}^2}{R_1 + R_2} - V_{\text{DD}} I_{\text{DQ}}$$

Slutligen genom energikonservering (eller eftersom $I_{\text{G}} = 0$)

$$p_{\text{NMOS}} = V_{\text{DSQ}} I_{\text{DQ}}$$

Observera att transistorn förbrukar energi $p_{\text{NMOS}} > 0$.

6

De ideala operationsförstärkarna ger först att $V_1 = V_3 = V_5$.

a) Nodanalys i noderna 1, 3, 5. Noderna 2 och 4 måste undvikas eftersom vi inte vet strömmarna som går ut från operationsförstärkarna. Anledningen till att de inte behövs är att de ersätts med villkoren att spänningen över ingången på vardera OP är noll och att strömmen in i de inverterande och icke-inverterande ingångarna är noll.

b) nod 1.

$$-I + \frac{V_1 - V_2}{1/sC} = 0$$

nod 3

$$\frac{V_1 - V_2}{R} + \frac{V_1 - V_4}{1/sC} = 0$$

nod 5

$$\frac{V_1 - 0}{R} + \frac{V_1 - V_4}{R} = 0$$

c) Lös ekvationssystemet ovan. Nod 5 ger $V_4 = 2V_1$. Detta sätts in i nod 3

$$(1 + sRC)V_1 - V_2 - sRCV_4 = (1 - sRC)V_1 - V_2 = 0$$

och slutligen i nod 1

$$I = sC(V_1 - V_2) = s^2RC^2V_1$$

som ger impedansen

$$Z_{\text{ab}} = V_1/I = \frac{1}{s^2RC^2}$$