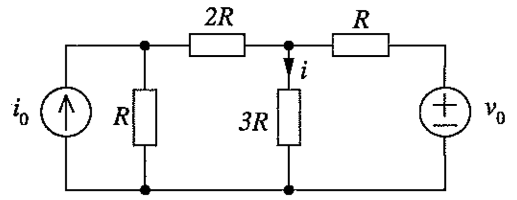
Ellära och elektronik, F2 och N2, kurskod: ETE115, fredag 2010-08-20, kl 14-19, MA:8.

1.



Bestäm strömmen i. Kända storheter är R, i_0 och v_0.

2. Ett lågpassfilter ska konstrueras. Filtret ska bestå av en resistor R och en kondensator C.

a) Rita kretsschema för filtret. Markera $v_{\text{in}}(t)$ och $v_{\text{ut}}(t)$ i kretsschemat.

b) Bestäm filtrets överföringsfunktion $H(s)$ uttryckt i s, R och C.

Insignalen till filtret ges av

$$v_{\text{in}}(t) = V_1 \sin(\omega_1 t) + V_2 \sin(\omega_2 t)$$

där $\omega_1 = 10^3 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ och $\omega_2 = 10^5 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Filtrets brytfrekvens ska vara $\omega_B = 10^4 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Resistorns resistans R ska vara 1 $\text{k}\Omega$.

c) Bestäm siffervärdet för kondensatorns kapacitans C.

d) Rita rätlinjeapproximationen av Bodediagrammet för amplitud.

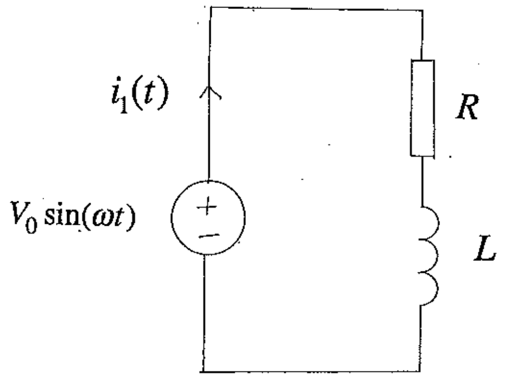
e) Rita rätlinjeapproximationen av Bodediagrammet för fas.

f) Hur stort är, enligt rätlinjeapproximationen, $|H|$ och $\arg(H)$ för ω_1? $|H|$ kan uttryckas i dB och arg(H) kan uttryckas i grader.

g) Hur stort är, enligt rätlinjeapproximationen, $|H|$ och $\arg(H)$ för ω_2? $|H|$ kan uttryckas i dB och arg(H) kan uttryckas i grader.

Uppgift 3 finns på nästa sida.

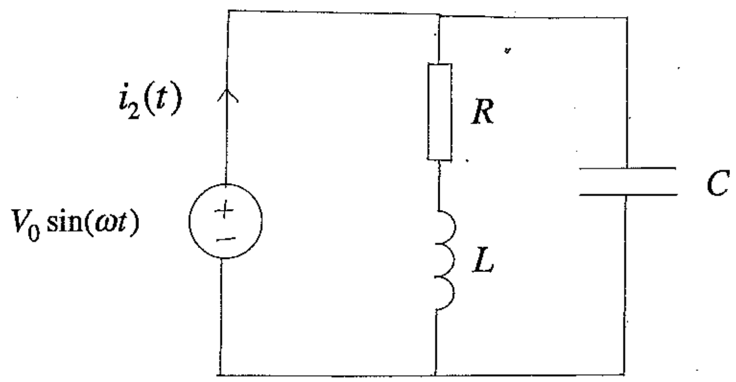
3. En fabrik har diverse elektrisk utrustning. Eftersom fabriken har många motorer kan den belastning som fabriken utgör för det elektriska nätet modelleras som en resistans R i serie med en induktans L. På ett visst avstånd från fabriken ligger en transformatorstation, den modelleras som en spänningskälla som ger spänningen $V_0 \sin(\omega t)$. Fabriken får betala för dels hur mycket effekt den förbrukar och dels för hur stor säkring den använder (dvs för hur mycket ström det går i ledningen till transformatorstationen). Det kan alltså vara alltså ekonomiskt fördelaktigt att minska strömmen som går i ledningen till transformatorstationen. Kända storheter är V_0, ω, R och L.



a) Bestäm strömmen $i_1(t)$ som går i ledningen till transformatorstationen.

b) Bestäm den aktiva effekt P som konsumeras av fabriken.

c) Bestäm den reaktiva effekt Q som konsumeras av fabriken (innan en kapacitans kopplas in).

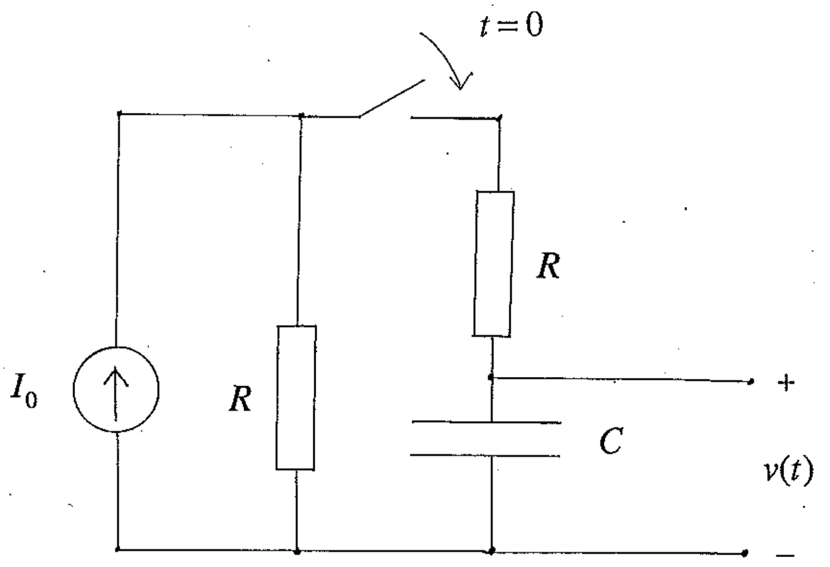


d) Genom att koppla en kapacitans parallellt med fabrikens elektriska utrustning kan strömmen som går i ledningen till transformatorstationen minskas. Bestäm denna kapacitans C så att strömmen $i_2(t)$ blir så liten som möjligt (toppvärdet av strömmen ska vara så litet som möjligt).

e) Bestäm denna minsta möjliga ström $i_2(t)$.

f) Bestäm kvoten mellan toppvärdet $\hat{i}_2$ och toppvärdet $\hat{i}_1$.

4.



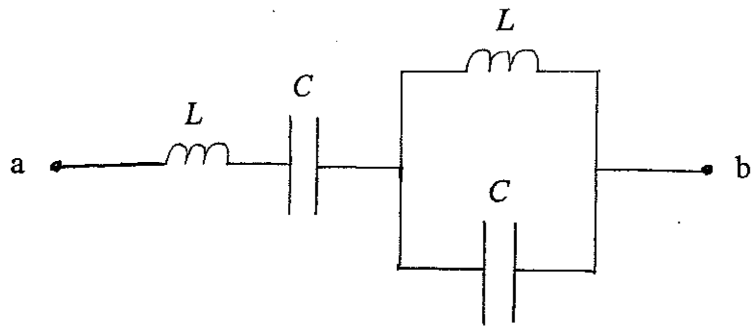
Switchen i nätet ovan sluts vid $t = 0$. Kondensatorn är energitom för $t < 0$. Kända storheter är I_0, R och C. Spänningen $v(t)$ över kondensatorn är okänd.

a) Bestäm $v(0+)$ dvs bestäm spänningen över kondensatorn strax efter det att switchen slutits.

b) Bestäm $v(+\infty)$ dvs bestäm spänningen över kondensatorn efter lång tid.

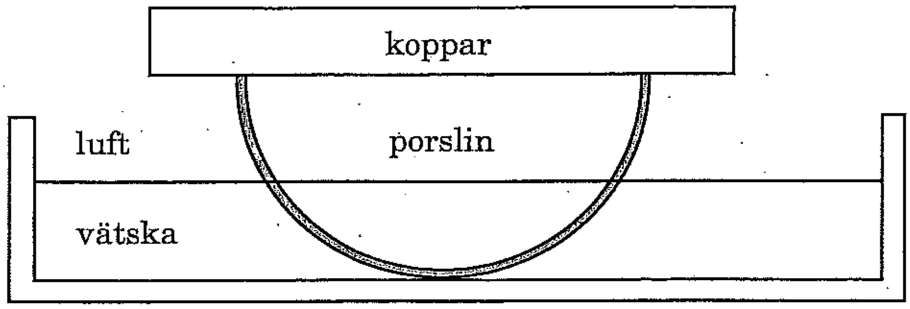
c) Bestäm $v(t)$ för $0 \leq t \leq +\infty$ dvs bestäm spänningen över kondensatorn för alla tidpunkter t från det att switchen slutits.

5.



Bestäm de vinkelfrekvenser ω för vilka impedansen Z mellan anslutningarna a och b är lika med noll. Bortse från negativa vinkelfrekvenser. Kända storheter är L och C.

6.



Ett halvklot av porslin vilar på botten av en behållare. Halvklotets radie är a och halvklotet är belagt med ett tunt skikt av ledande material. Skiktets tjocklek är δ och det ledande materialets konduktivitet är σ. Det gäller att $\delta << a$. Behållaren är fylld till en höjd av $\frac{a}{2}$ med en vätska med hög konduktivitet. På halvklotets plana ovansida vilar en kopparskiva. Konduktiviteten för vätskan och för koppar antages vara "oändlig". Konduktiviteten för porslin antages vara noll.

Bestäm resistansen R mellan kopparskivan och vätskan. Förenklingar som kan motiveras med $\delta << a$ är tillåtna. Kända storheter är a, δ och σ.

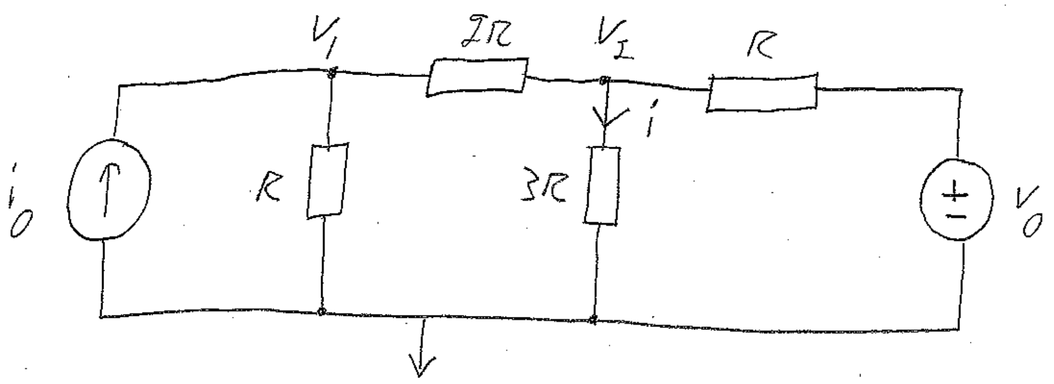
Formel: $$\frac{d}{d\theta} \ln | \tan(\frac{\theta}{2}) | = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

SLUT

Lösningar till tentamen i "Ellära och elektronik", 2010-08-20.

1

Nodanalys:



$$\begin{cases} -i_0 + \dfrac{V_1}{R} + \dfrac{V_1 - V_2}{2R} = 0 \\[2ex] \dfrac{V_2 - V_1}{2R} + \dfrac{V_2}{3R} + \dfrac{V_2 - V_0}{R} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2Ri_0 + 2V_1 + V_1 - V_2 = 0 \\ 3(V_2 - V_1) + 2V_2 + 6(V_2 - V_0) = 0 \end{cases}$$

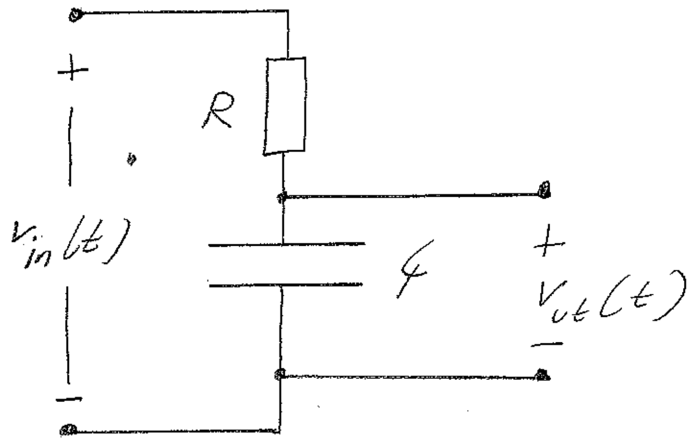
$$\begin{cases} 3V_1 - V_2 = 2Ri_0 & (1) \\ -3V_1 + 11V_2 = 6V_0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow \quad 10V_2 = 2Ri_0 + 6V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{Ri_0}{5} + \frac{3V_0}{5}$$

$$\underline{\underline{i}} = \frac{V_2}{3R} = \underline{\underline{\frac{i_0}{15} + \frac{V_0}{5R}}}$$

2

a)



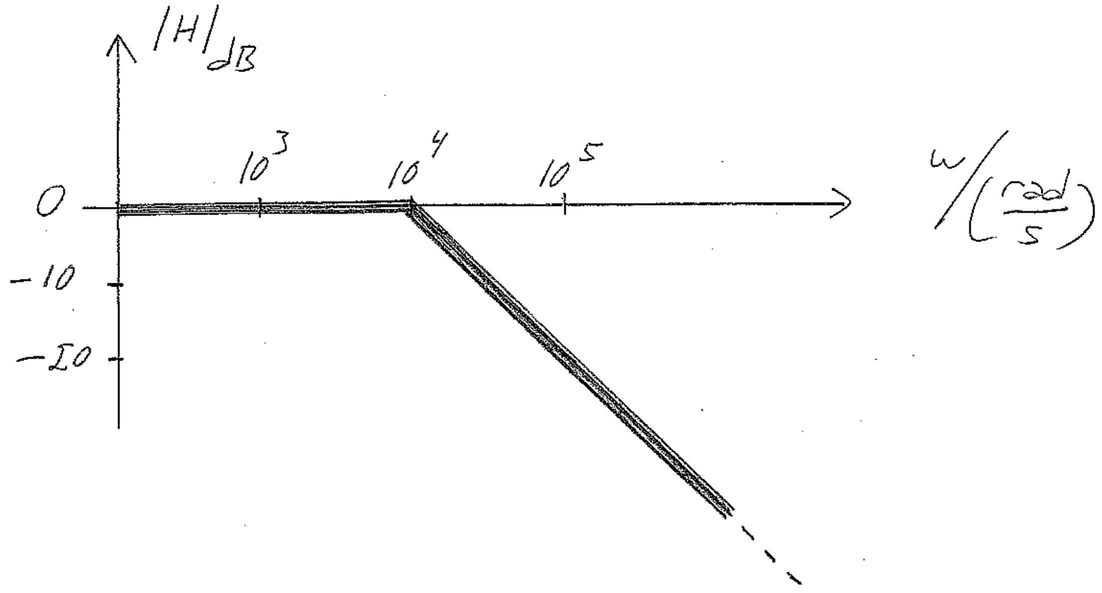
b) $$\underline{\underline{H(s) =}} \frac{V_{ut}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \underline{\underline{\frac{1}{1 + sRC}}}$$

c) $$\begin{cases} H(s) = \dfrac{1}{1+sRC} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{s}{\left(\frac{1}{RC}\right)}} \\[2ex] H(s) = [\text{formelsamlingen}] = \dfrac{1}{1 + \dfrac{s}{\omega_B}} \end{cases}$$

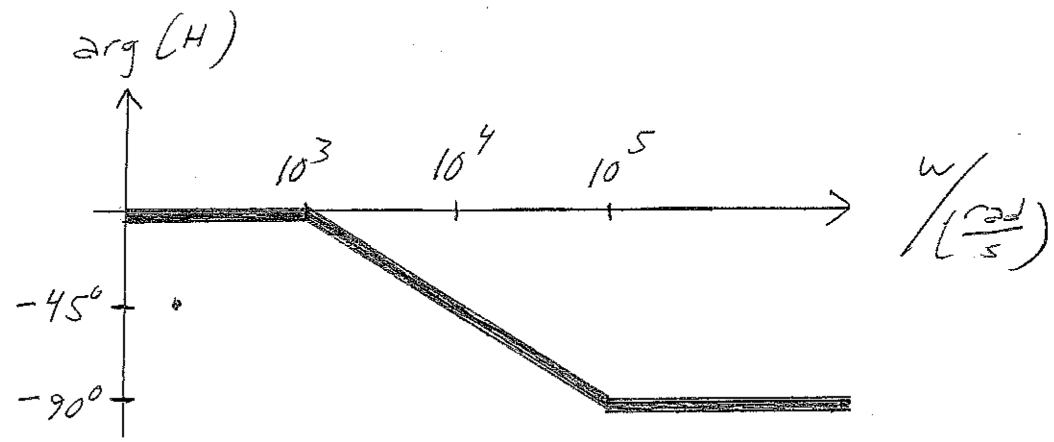
$$\Rightarrow \quad \omega_B = \frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega_B R}$$

$$\underline{\underline{C =}} \frac{1}{\omega_B \cdot R} = \frac{1}{10^4 \cdot 10^3} = 10^{-7} = \underline{\underline{0.1\,\mu F}}$$

d)



e)

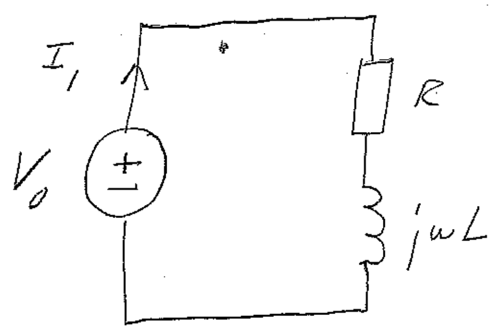


f) $\underline{\underline{|H| = 0\ dB}}$ $\underline{\underline{\arg(H) = 0^0}}$

g) $\underline{\underline{|H| = -20 dB}}$ $\underline{\underline{\arg(H) = -90^0}}$

3

a) riktfas: sin(ωt)



$$I_1 = \frac{V_0}{R + j\omega L} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\, e^{j\,\mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)}} =$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\, e^{-j\,\mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)}$$

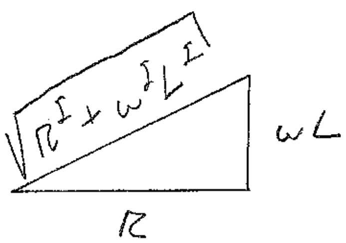
$$\longrightarrow$$

$$\underline{\underline{i_1(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \sin\left(\omega t - \mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)}}$$

b) $S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V_0 I_1^* =$

$$= \frac{1}{2} V_0 \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\, e^{+j\,\mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} V_0 \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \left[\cos\left(\mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right) + j\sin\left(\mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)\right]$$



$$\alpha = \mathrm{ARCTAN}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

$$\underline{\underline{P}} = \mathrm{Re}(S) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,\frac{V_0^2 R}{R^2+\omega^2L^2}}}$$

c) $\underline{\underline{Q}} = Im(S) = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{V_0^2 \omega L}{R^2+\omega^2 L^2}}}$

d) $S_c = \frac{1}{2} \cdot V_0 I_c^* = \left[V_0 = \frac{1}{j\omega C} I_c \Rightarrow I_c = j\omega C V_0 \right] =$

$= -\frac{1}{2} V_0 j\omega C V_0 = -j \frac{1}{2} \omega C V_0^2$

$Q_c = -\frac{1}{2} \omega C V_0^2$

$Q + Q_c = 0$

$\frac{1}{2} \frac{V_0^2 \omega L}{R^2+\omega^2 L^2} = \frac{1}{2} \omega C V_0^2$

$\Rightarrow$

$\underline{\underline{C = \frac{L}{R^2+\omega^2 L^2}}}$

e) $\begin{cases} S = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} V_0 \dot{I}_2^* \\ S = P \end{cases}$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2} V_0 I_2^* \Rightarrow I_2^* = \frac{2P}{V_0} \Rightarrow I_2 = \frac{2P}{V_0} = \frac{V_0 R}{R^2+\omega^2 L^2}$

$\longrightarrow \underline{\underline{i_2(t) = \frac{V_0 R}{R^2+\omega^2 L^2} \sin(\omega t)}}$

f) $\underline{\underline{\frac{\hat{i}_2}{\hat{i}_1}}} = \frac{V_0 R}{R^2+\omega^2 L^2} \frac{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}{V_0} = \underline{\underline{\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}}}$

4

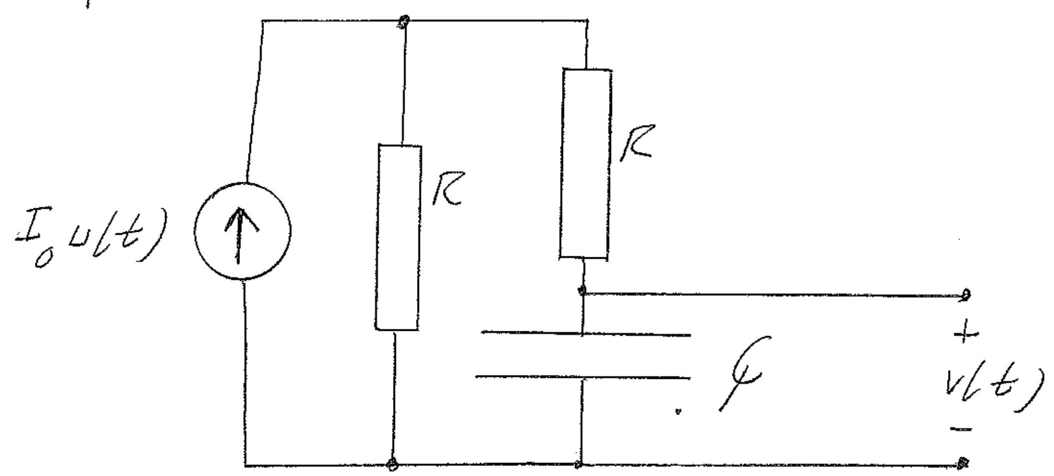
a) En kondensator är spänningströg.

$\underline{\underline{v(0+)}} = v(0-) = \underline{\underline{0}}$

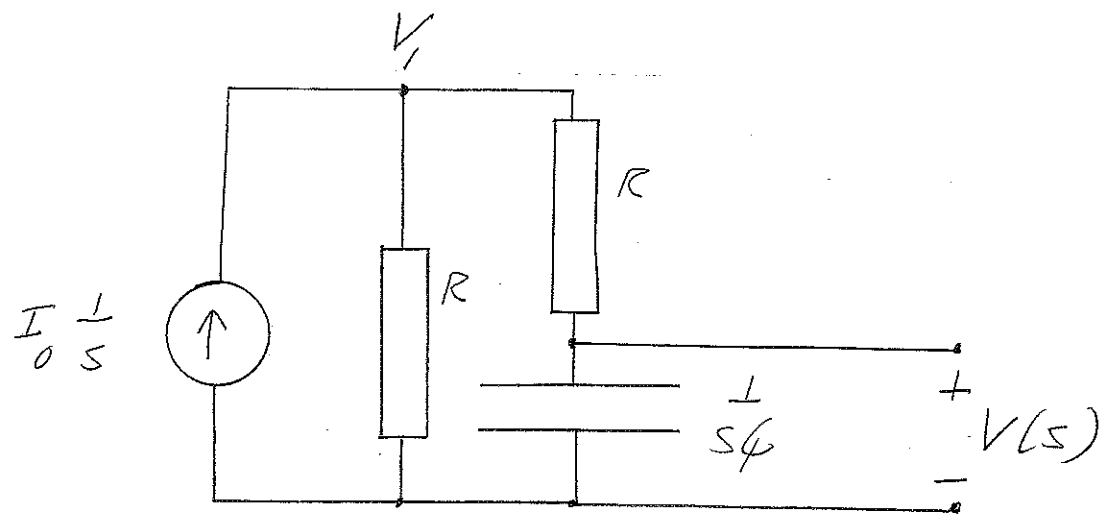
b) Efter lång tid kan kondensatorn ersättas med ett avbrott.

$\underline{\underline{v(+\infty) = RI_0}}$

c) Följande nät har samma spänningar och strömmar för $t \geq 0$:



$\xrightarrow{\mathcal{L}}$



V_1 kan bestämmas med nodanalys:

$$-I_0\frac{1}{s}+\frac{V_1}{R}+\frac{V_1}{R+\frac{1}{sC}}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$V_1=\frac{RI_0(1+sRC)}{s(1+s2RC)}$$

$$V(s)=[\text{spänningsdelning}]=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}V_1=\frac{1}{1+sRC}V_1=$$

$$=\frac{RI_0}{s(1+s2RC)}=\frac{RI_0}{s2RC\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}=$$

$$=\frac{I_0}{2C}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{2RC}\right)}=\frac{I_0}{2C}\left[\frac{2RC}{s}+\frac{-2RC}{s+\frac{1}{2RC}}\right]=$$

$$=RI_0\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{2RC}}\right].$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$v(t)=RI_0\left[u(t)-e^{-\frac{t}{2RC}}u(t)\right]=$$

$$=RI_0\left[1-e^{-\frac{t}{2RC}}\right]u(t)$$

$$\underline{\underline{v(t)=RI_0\left[1-e^{-\frac{t}{2RC}}\right]\qquad 0\le t\le+\infty}}$$

(5)

$$Z_{AB} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L \, \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} =$$

$$= j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) + \frac{L}{C} \, \frac{1}{j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} =$$

$$= j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) - j\,\frac{L}{C} \, \frac{1}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$Z_{AB} = 0$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 - \frac{L}{C} = 0$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega^2 L - \frac{1}{C} = \pm\,\omega\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega^2 - \frac{1}{LC} = \pm\,\omega\,\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega^2 \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}\,\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\left(\omega \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 - \frac{1}{4LC} - \frac{1}{LC} = 0$$

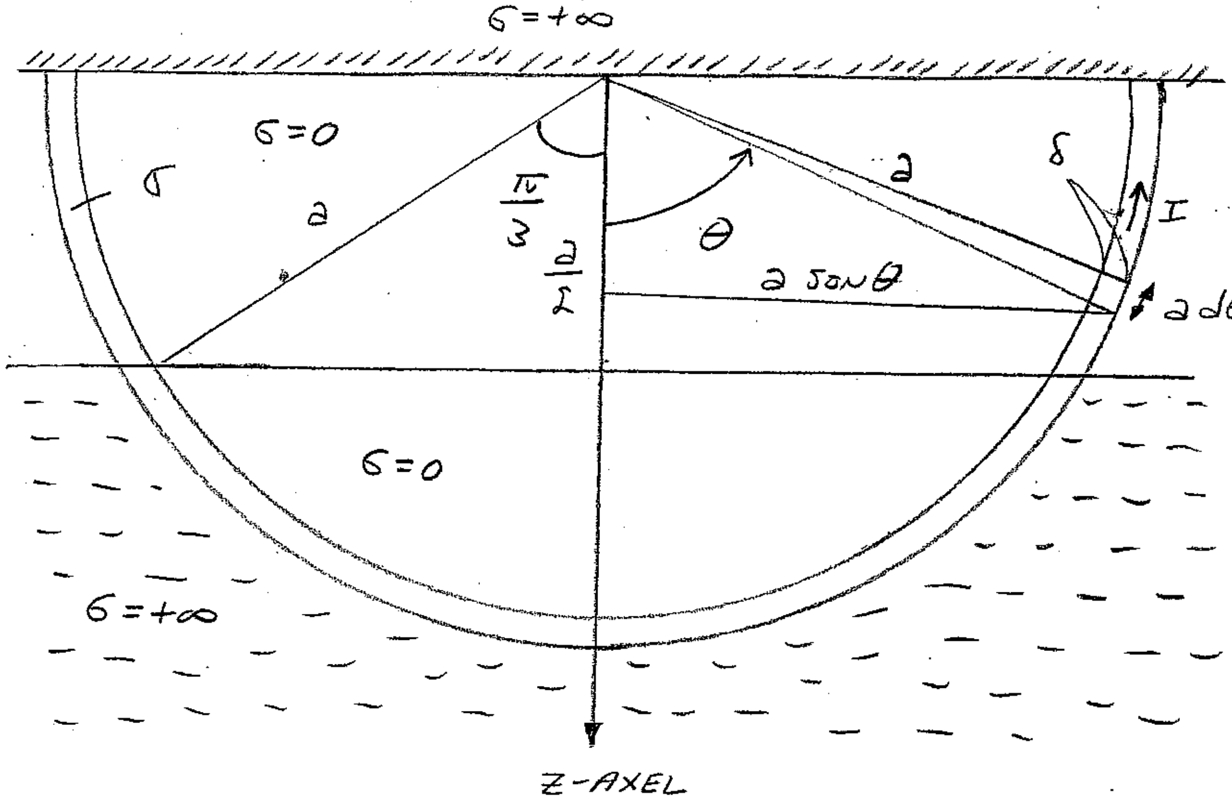
$$\left(\omega \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2 = \frac{5}{4LC}$$

$$\omega \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm\,\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{LC}}$$

$$\omega = \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{2} \pm \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{LC}}}} \qquad \underline{\underline{\omega_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{LC}}}}$$

6



$$dR = \frac{1}{\sigma}\frac{dl}{A} = \left[dl = a\,d\theta,\ A = 2\pi a \sin\theta\, \delta \right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma}\frac{a\,d\theta}{2\pi a \sin\theta\, \delta} = \frac{1}{2\pi\delta\sigma}\frac{d\theta}{\sin\theta}$$

$$\underline{\underline{R}} = \int dR = \frac{1}{2\pi\delta\sigma}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta\sigma}\left[\ln\left|\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta\sigma}\left(\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\delta\sigma}\left(\ln(1) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\ln\sqrt{3}}{2\pi\delta\sigma} = \underline{\underline{\frac{\ln 3}{4\pi\delta\sigma}}}$$