Föreläsning 7

6.1–6.3 i Griffiths

Kraft på magnetisk dipol (Kap. 6.1.2)

En partikel med laddning q som rör sig med hastigheten $\boldsymbol{v}$ i en magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$ känner av Lorentzkraften

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Från Lorentzkraften följer att kraften på en ledare med ström I ges av uttrycket

$$\boldsymbol{F} = I \int d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$$

I homogent fält $\boldsymbol{B}$, blir den totala kraften på slingan noll.

$$\boldsymbol{F} = I \left(\int \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \right) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$$

Om ledaren är rak med längd L och för strömmen I i positiv z-led, och magnetfältet är konstant och givet av $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, ges kraften av BIL formeln

$$\boldsymbol{F} = BIL\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

En slinga i ett homogent fält ($\boldsymbol{B}$ konstant) har enttokraften noll. Är däremot fältet $\boldsymbol{B}$ inhomogent, får vi nettokraften

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$$

där slingans magnetiska dipolmoment $\boldsymbol{m}$ är

$$\boldsymbol{m} = I \int_S \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

Jämför med motsvarande uttryck i el.-statiken (visa sista likheten själv)

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$$

Moment på magnetisk dipol (Kap. 6.1.2)

För en sluten slinga leder den magnetiska kraften till ett vridande moment. Antag en plan slinga, med ström I, som spänner upp ytan S. Om magnetfältet är homogent blir totala kraften på slingan noll. Däremot utsätts slingan för ett vridande moment som ges av

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

där $\boldsymbol{m}$ är slingans magnetiska dipolmoment.

Magnetiska fält i material (Kap. 6.1.4 & 6.2)

Elektroner och atomkärnor har inre magnetiska dipolmoment, och dessutom skapas ett magnetiskt dipolmoment då elektronerna rör sig kring atomkärnan. Atomer är alltså magnetiska dipoler. Vårt mål blir att modellera dessa effekter på den magnetiska flödestätheten.

Vi använder en modell där varje atom bidrar med ett magnetiskt dipolfält $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})_{\mathrm{dip}}$ till den totala vektorpotentialen $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ i mätpunkten, som vi antar ligger utanför materialet i vakuum. Totala potentialen från alla dipolbidrag från materialets atomer (magnetiskt dipolmoment $\boldsymbol{m}_i$ i punkten $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) blir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{m}_i \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \longrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}v'$$

där materialets **magnetisering** $\boldsymbol{M}$ betecknar den magnetiska dipolmomenttätheten (totalt magnetiskt dipolmoment per volymsenhet). Totala magnetiska dipolmomentet i en volym med magnetiseringen $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ är då

$$\boldsymbol{m} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}v$$

En omskrivning av uttrycket på vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ blir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S} \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}S' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}v'$$

och vi identifierar två (ekvivalenta) strömfördelningar

1. **Ytströmtäthet** från bundna strömmar: $\boldsymbol{J}_{\mathrm{bS}} = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$
2. **Strömtäthet** från bundna strömmar: $\boldsymbol{J}_{\mathrm{b}} = \nabla \times \boldsymbol{M}$

Det betyder att vektorpotentialen från magnetiseringen $\boldsymbol{M}$ är densamma som vektorpotentialen från den ekvivalenta ytströmtätheten och strömtätheten. Notera att $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{0}$ (stationära strömmar).

Magnetfältet $\boldsymbol{H}$ (Kap. 6.3)

Magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ genereras av alla strömmar i materialet. Den matematiska relationen kan skrivas genom Ampères lag $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$. Den totala strömtätheten $\boldsymbol{J}$ består av två delar, dels fria strömmar $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$, dels de bundna strömmar $\boldsymbol{J}_{\mathrm{b}} = \nabla \times \boldsymbol{M}$, där $\boldsymbol{M}$ är materialets magnetisering. Vi får

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{b}} \right) = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \nabla \times \boldsymbol{M} \right)$$

eller

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{M} \right) = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$$

Inför den magnetiska fältstyrkan $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$$

och Ampères lag blir

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_\mathrm{f}$$

eller i integralform

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \text{fria strömmen genom } S$$

Linjära magnetiska material (Kap. 6.4.1)

För ett linjärt material är magnetiseringen proportionellt mot magnetfältet $\boldsymbol{H}$.

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

där χ_m är en dimensionslös materialkonstant som kallas den *magnetiska susceptibiliteten*. Konstanten talar om hur mycket materialet magnetiseras.

Detta ger att

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H}$$

där $\mu_\mathrm{r} = 1 + \chi_m$ = den relativa permeabiliteten, och $\mu = \mu_0\mu_\mathrm{r}$ = den absoluta permeabiliteten.

Den relativa permeabiliteten μ_r är en dimensionslös storhet som för de flesta material ligger mycket nära ett. För ferromagnetiska material (järn, nickel och kobolt) är det betydligt större (100-1000).