Föreläsning 5

Motsvarar avsnitten 4.4, 5.1–5.2, 8.1.1 i Griffiths

Linjära dielektrikum (Kap. 4.4)

Ett dielektrikum är ett material där polarisationen $\boldsymbol{P}$ induceras av ett elektriskt fält. Om det pålagda fältet inte är extremt starkt är materialet linjärt (det finns undantag). Då gäller att polarisationen är proportionell mot det pålagda elektriska fältet

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$$

där χ_e är en dimensionslös materialkonstant som kallas den *elektriska susceptibiliteten*. Konstanten talar om hur mycket materialet polariseras. Mellan elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}$ och polarisationen $\boldsymbol{P}$ råder följande samband:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

där $\varepsilon_\mathrm{r} = 1 + \chi_e =$ den relativa permittiviteten, och $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r} =$ den absoluta permittiviteten.

Exempel: Vattenmolekylen har ett permanent dipolmoment och den kan lätt ställa in sig i det elektriska fältets riktning. Därför är susceptibiliteten för vatten mycket stor $\chi_e = 80$. Fasta material brukar ha betydligt mindre värden på susceptibiliteten.

Elektrostatisk energi (återbesök) (Kap. 4.4.3)

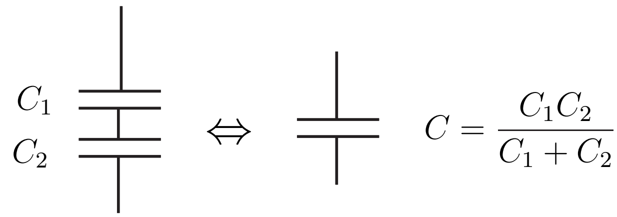
För laddningar i vakuum gäller sedan tidigare:

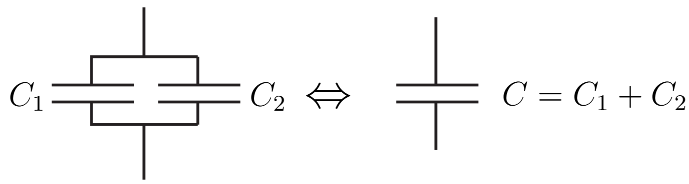
$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{r}) V(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon_0}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}v$$

Uttrycket modifieras av polarisationen till

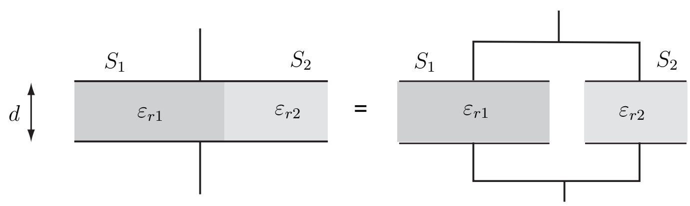
$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}}{2} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon}{2} \iiint\limits_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \, \mathrm{d}v$$

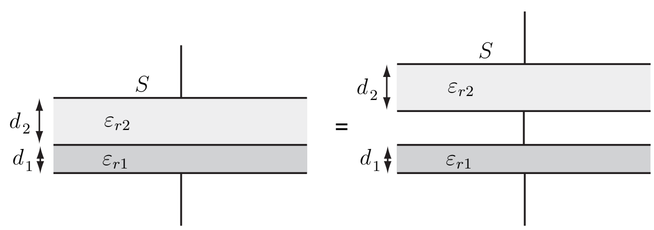
Serie- och parallellkoppling





Exempel: Ekvivalenta kondensatorer





Repetitionsfrågor

1. Vad är skillnaden mellan fria laddningar och bundna laddningar?

2. Hur påverkas fria laddningar av ett elektriskt fält?

3. Hur påverkas bunda laddningar av ett elektriskt fält?

4. En metallsfär som befinner sig i vakuum har radien R och laddningen $Q > 0$. Det elektriska fältet är då riktat radiellt ut från sfären och beror endast av avståndet från sfärens centrum, dvs $\boldsymbol{E}_0 = E_0(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Ett tjockt oledande dielektriskt skal med permittiviteten $\varepsilon_r > 1$ läggs nu runt sfären. Skalet upptar området $2R < r < 3R$. Även i detta fall blir det elektriska fältet riktat radiellt ut från sfären och ges av $\boldsymbol{E}_1 = E_1(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Tre av följande påståenden är rätt. Vilka? Du skall inte göra några räkningar utan endast tänka fysikaliskt.

   (a) Utanför skalet är $E_1(r) = E_0(r)$. Inuti skalet är $E_1(r) < E_0(r)$.

   (b) Överallt utanför sfären, $r > R$, gäller $E_1(r) \neq E_0(r)$.

(c) Polarisationen $\boldsymbol{P} = P(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, där $P(r) < 0$ inuti och $P(r) = 0$ utanför skalet.

(d) Polarisationen $\boldsymbol{P} = P(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, där $P(r) > 0$ inuti och $P(r) = 0$ utanför skalet.

(e) Polarisationen $\boldsymbol{P} = P(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, där $P(r) \neq 0$ överallt utanför sfären.

(f) Elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}(r)$ påverkas inte av det dielektriska skalet.

(g) Elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}(r)$ påverkas endast inuti det dielektriska skalet men inte utanför.

5. Var finns det nettoladdningar (fria och bundna) i fallet med dielektriskt skal?

Svar: 4. a), d) och f) är rätt. 5. På ytan av sfären (positiv ytladdning), på inner-ytan av skalet (negativ ytladdning) och på yttre ytan av skalet (positiv ytladdning)

Strömmar (Kap. 5.1.3)

Laddningstransport kan ske på flera sätt. Några är:

1. Ledningselektroner (eller hål) i metaller eller halvledare (små hastigheter $\sim 10^{-4}$ m/s, stora mängder)

2. Strömmar i elektrolyter som följd av jontransport i vätskor

3. Strömmar av elektroner eller joner i vakuum eller uttunnade gaser (t.ex. katodstrålerör) (stora hastigheter, små mängder)

I samtliga fall definieras **strömtätheten $\boldsymbol{J}$** som

$$\boldsymbol{J} = Nq\boldsymbol{v}$$

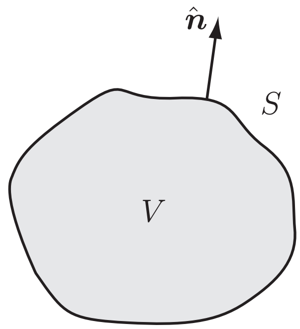
där N är antalet laddningsbärare per volymsenhet, q laddningsbärarnas laddning och $\boldsymbol{v}$ deras hastighet. Strömtätheten $\boldsymbol{J}$ har enheten laddning per ytenhet per tidsenhet (C/m^{2}s eller A/m^2).
Strömmen I genom en yta S (ytnormal $\hat{\boldsymbol{n}}$) är flödet av $\boldsymbol{J}$ genom S.

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

Enheten är Ampère A.

Kontinuitetsekvationen (laddningens bevarande)

(Detta avsnitt tas upp igen i kapitel 7. Det kan nu läsas kursivt.)



Strömmen ut ur den slutna ytan S:

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

I är den laddning som försvinner **ut ur** V per tidsenhet. Total laddning i V är

$$Q = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v$$

Laddningens bevarande (experimentellt faktum):

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

eller med divergenssatsen

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}v = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \mathrm{d}v$$

V godtycklig ger kontinuitetsekvationen

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Stationära strömmar (inga strömkällor):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Exempel: Kirchhoffs stömlag

$$\sum_k i_k = 0$$

Magnetostatik (Kap. 5)

En viktig skillnad mot el-statiken är att det inte finns några magnetiska punktladdningar (det går inte att isolera polerna i en magnet). I magnetostatik gäller att stationära strömmar, $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$, råder.

Kraftverkan mellan laddningar i rörelse (Kap. 5.1.2)

Magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$

Kraften $\boldsymbol{F}$ på en testladdning q med hastighet $\boldsymbol{v}$ ges av Lorentzkraften

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{q\boldsymbol{E}}_{\text{el.-statik}} + \underbrace{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}_{\text{magnetiskt}}$$

1. $\boldsymbol{E}$ elektriskt fält (enhet V/m)
2. $\boldsymbol{B}$ magnetisk flödestäthet (enhet T=As/m^2=Wb/m^2)

Kraften $(q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\perp\boldsymbol{v}$, vilket medför att kraften inte utför något arbete $\int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\ell} = 0$.

Exempel: En magnetisk flödestäthet med styrkan 1 Tesla är mycket stark. De allra starkaste permanentmagneterna (t.ex. Neodymmagneter) ger en Tesla. På vår breddgrad är det jordmagnetiska fältet ungefär 57 μT. Vid magnetresonanstomografi används magnetfält med styrkan 3-7 T. I acceleratorn Large Hadron Collider på Cern används mycket starka supraledande elektromagneter för att få de högenergetiska protonerna att gå längs den 27 km långa cirkulära acceleratorn. Dessa magneter ger fältstyrkan 8 T. Man har nu rapporterat om en ny typ av elektromagnet som ger 13.5 T. Byter man till dessa magneter kan energin på protonerna ökas ytterligare.

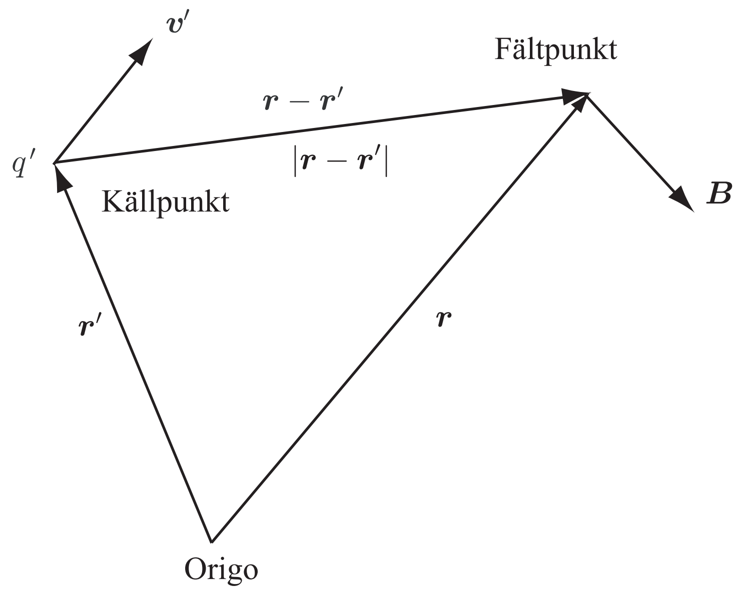
Biot-Savarts lag (Kap. 5.2.2)

Den statiska magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ genereras av laddningar i rörelse.

Experimentellt faktum

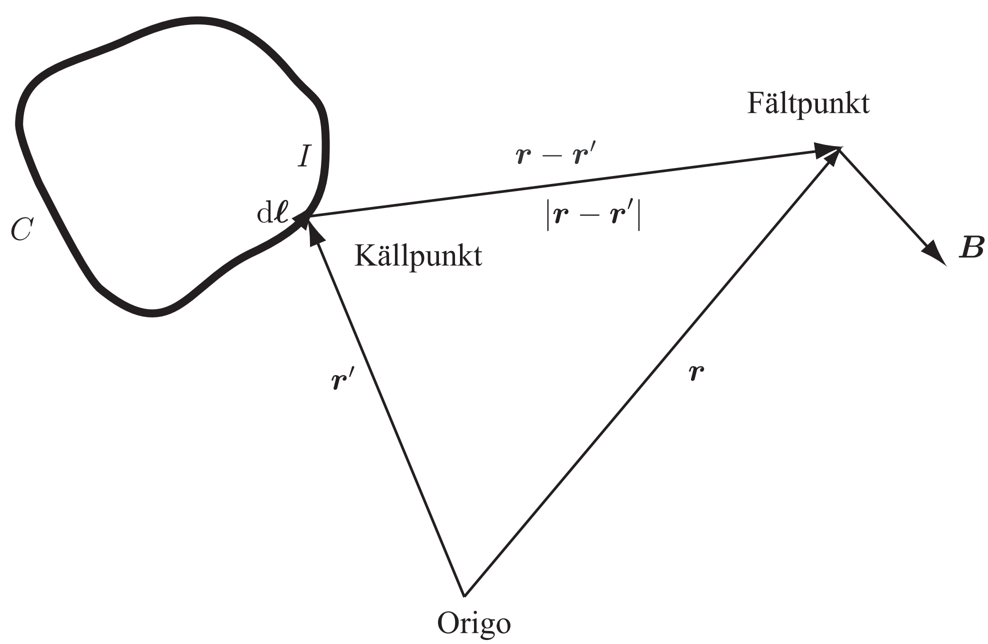
En laddning q' i punkten $\boldsymbol{r}'$ med hastigheten $\boldsymbol{v}'$ genererar den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ i punkten $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{v}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$



Urspunget till detta experimentella faktum kommer från följande integralsamband mellan en ström I i en ledning C och magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ kring ledningen:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I d\boldsymbol{\ell}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \quad \text{(Biot-Savarts lag)}$$



Detta är ett postulat med ursprung i experiment man gjorde 1820 på magnetfält från strömmar i ledningar.
Konstanten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{Vs/Am}$ är vakuums permeabilitet och sambandet

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

gäller där c_0 är ljushastigheten i vakuum.
Biot-Savarts lag kan generaliseras till ett samband mellan $\boldsymbol{B}$ och strömtätheten $\boldsymbol{J}$ i en volym $\mathcal{V}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'$$

Jämför med Coulombs lag

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'$$

För en ytströmtäthet som befinner sig på en yta $\mathcal{S}$ gäller på samma sätt:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S} \frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dS'$$