Föreläsning 4

Motsvarar avsnitten 4.1–4.3.

Kraftvekan på dipoler (Kap. 4.1.3)

1. **Vridmoment $\boldsymbol{N}$** på elektrisk elementardipol $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

$\boldsymbol{p}$ vill "ställa in sig" i $\boldsymbol{E}$:s riktning.

Exempel på elektriska dipoler: H_2O-molekyler (polära vätskor)

2. **Kraft $\boldsymbol{F}$** på elektrisk elementardipol $\boldsymbol{p}$ i inhomogent fält $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Elektriska fält i material (Kap. 4)

Två ideala material behandlas:

1. **Ledare** (metaller) kännetecknas av fria, lätt rörliga laddningsbärare
2. **Isolatorer** (dielektrika) saknar fria, lätt rörliga laddningsbärare

Modell av isolatormaterial (Kap. 4.2)

Vårt mål blir att modellera effekterna på det elektriska fältet av ett isolatormaterial bestående av elektriskt neutrala atomer (molekyler). Vi använder en modell där varje atom bidrar med ett dipolfält $V(\boldsymbol{r})_{\text{dip}}$ till den totala potentialen $V(\boldsymbol{r})$ i mätpunkten, som vi antar ligger utanför materialet i vakuum. Totala potentialen från alla dipolbidrag från materialets atomer (elektriskt dipolmoment $\boldsymbol{p}_i$ i punkten $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) blir

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i) \cdot \boldsymbol{p}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \longrightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}v'$$

där **polarisationen $\boldsymbol{P}$** betecknar den elektriska dipolmomenttätheten (totalt elektriskt dipolmoment per volymsenhet). Totala elektriska dipolmomentet i en volym med polarisation $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ är då

$$\boldsymbol{p} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}v$$

Omskrivning med divergenssatsen ger

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}S' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{-\nabla' \cdot \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}v'$$

och vi identifierar två (ekvivalenta) laddningsfördelningar

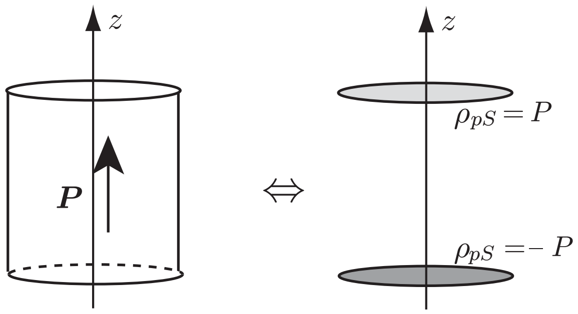
1. **Ytladdnngstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{\text{pS}} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$

2. **Rymdladdningstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{\text{p}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$

Det betyder att potentialen från polarisationen $\boldsymbol{P}$ är densamma som potentialen från den ekvivalenta rymd- och ytladdningen.

Kommentar: Griffiths betecknar de bundna polarisationsytladdningen med σ_b.

Exempel:



En konstant polarisation $\boldsymbol{P} = P\hat{\boldsymbol{z}}$ i en rät cylinder är ekvivalent med en ytladdning $\rho_{\text{pS}} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = P$ på den övre ändytan och en ytladdning $\rho_{\text{pS}} = -\boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = -P$ på den undre ändytan. Det blir ingen ytladdning på mantelytan eftersom $\rho_{\text{pS}} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{\text{c}} = 0$.

Klot med konstant polarization $\boldsymbol{P}$ (Kap. 4.2, s. 174–176)

Ett klot med radie R är likformigt polariserad. Polarisationen $\boldsymbol{P} = P\hat{\boldsymbol{z}}$ ger upphov till en ekvivalent laddningsfördelning:

1. **Ytladdnngstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{\text{pS}} = \boldsymbol{P} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = P\cos\theta = PP_1(\cos\theta)$ på klotets yta $r = R$

2. **Rymdladdningstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{\text{p}} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} = 0$ inuti klotet

Från variabelseparation i sfäriska koordinater får vi

$$V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta), & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} B_l \dfrac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r > R \end{cases}$$

Kontinuitet hos V och $-\frac{\partial V}{\partial r}\big|_+ + \frac{\partial V}{\partial r}\big|_- = \rho_{\text{pS}}/\varepsilon_0$ på randen $r = R$ gäller. Endast $l = 1$ bidrar, vilket ger

$$V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{Pr}{3\varepsilon_0} \cos\theta, & r < R \\ \dfrac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cos\theta, & r > R \end{cases}$$

och det elektriska fältet $\boldsymbol{E} = -\nabla V$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \dfrac{P\hat{\boldsymbol{z}}}{3\varepsilon_0}, & r < R \\ \dfrac{PR^3}{3\varepsilon_0 r^3}(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta), & r > R \end{cases}$$

Elektrisk flödestäthet $\boldsymbol{D}$ (Electric displacement) (Kap. 4.3)

I ett dielektrikum är det elektriska fältet modifierat p.g.a. materialets polarisation $\boldsymbol{P}$. Effekten av polarisationen ger sig bl.a. till känna som en ekvivalent rymdladdningstäthet $\rho_\mathrm{p} = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$. Finns det dessutom fria (sanna) laddningar ρ_f i materialet, satisfierar, enligt Gauss lag, det elektriska fältet

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0 = (\rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{p})/\varepsilon_0 = (\rho_\mathrm{f} - \nabla \cdot \boldsymbol{P})/\varepsilon_0$$

där ρ_f är rymdladdningstätheten av **fria** laddningar.

$$\rho = \rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{p}$$

är total laddningstäthet=fri laddningstäthet+bunden laddningstäthet.
Vi skriver om som

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_\mathrm{f}$$

Definiera den elektriska flödestätheten $\boldsymbol{D}$ genom

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

Divergensen av $\boldsymbol{D}$ ger en ny form av Gauss lag

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_\mathrm{f}}$$

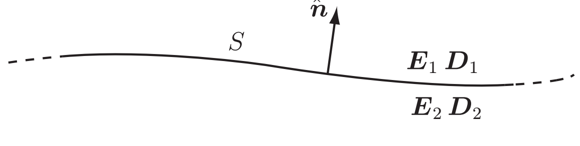
Integralformulering av Gauss lag

$$\boxed{\iint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_\mathrm{f}}$$

där Q_f är den totalt inneslutna fria laddningen i S.

Randvillkor för $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{D}$

Låt S vara skiljeytan mellan två områden med olika material. På ytan S kan det finnas en (fri) ytladdningstäthet ρ_S. Då gäller följande randvillkor för $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{D}$:



Tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ är alltid kontinuerlig över S, dvs

$$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$$

(i formelsamlingen skrivs att E_t är kontinuerlig). Normalkomponenten av $\boldsymbol{D}$ satisfierar

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_1(\boldsymbol{r}) - \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_2(\boldsymbol{r}) = \rho_S(\boldsymbol{r}) \quad \text{(fri ytladdningstäthet)}$$

För ett material utan fri ytladdningstäthet gäller att normalkomponenten av flödestätheten $\boldsymbol{D}$ är kontinuerlig över S.

Randvillkor vid ytor till ledare

I en ledande kropp som inte är kopplad till några spänningskällor är det elektriska fältet noll överallt. Därmed är också potentialen konstant i en ledande kropp.
Om den ledande kroppen begränsas av ytan S så gäller på ytan att

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1 &= \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_1 &= \rho_S \end{aligned}$$