

## Föreläsning 3

Motsvarar avsnitten 3.1–3.2.4, 3.3.2–3.4 i Griffiths

### Laplace och Poissons ekvation (Kap. 3.1)

I ett område utan elektriska laddningar satisfierar potentialen Laplace ekvation

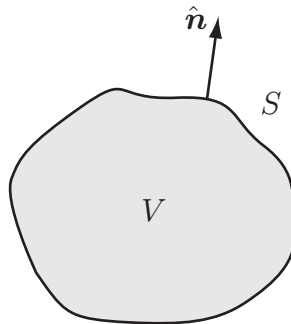
$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$$

och i ett område med ryndladdningstäthet  $\rho(\mathbf{r})$  satisfierar potentialen Poissons ekvation

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

För att kunna lösa ekvationerna entydigt behövs rätt sorts randvillkor på randen till området. De vanligaste randvillkoren är att potentialen är en given konstant på ytan av ledare och att potentialen är noll i oändligheten. Poissons eller Laplace ekvation i områden med ytor där potentialen är given på randen till området kallas för randvärdesproblem. Dessa är ofta svåra att lösa analytiskt eftersom vi inte vet laddningsfördelningarna på ytorna. Det finns dock ett par fall där det finns analytiska lösningar. Ett sådant fall är en given laddningsfördelning ovanför ett oändligt stort jordplan, se nedan.

### Entydighetssatser för elektrostatiska problem (Kap. 3.1.5)



Det finns en uppsättning av entydighetssatser för olika geometrier och olika typer av randvillkor. De som tas upp i Griffiths är:

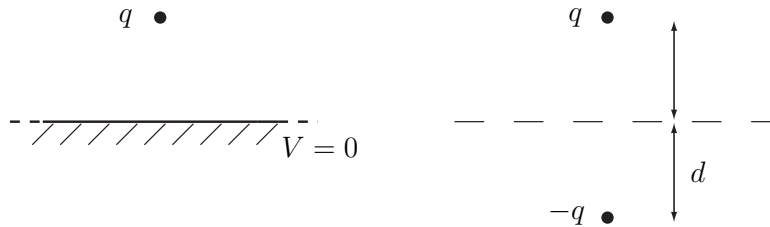
**Fall 1** : Antag en volym  $\mathcal{V}$  som omsluts av en yta  $S$  med given potential  $V$ . Poissons ekvation,  $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ , är då entydigt lösbar i  $V$ .

**Fall 2:** Antag en volym  $\mathcal{V}$  utanför ett antal ledande ytor  $S_n$  med givna laddningar  $Q_n$ . För den yttre yta  $S_{\text{yttre}}$  som omsluter  $\mathcal{V}$  (kan vara i oändligheten) gäller villkoret  $\oint_{S_{\text{yttre}}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\text{tot}}$ , där  $Q_{\text{tot}}$  är totala laddningen innanför  $S_{\text{yttre}}$  och  $\hat{\mathbf{n}}$  är normalen riktad ut från  $\mathcal{V}$ . Det elektriska fältet är då entydigt givet i  $\mathcal{V}$ . Entydigheten gäller även när det finns en given ryndladdningstäthet  $\rho$  i  $\mathcal{V}$ .

## Speglingsmetoden

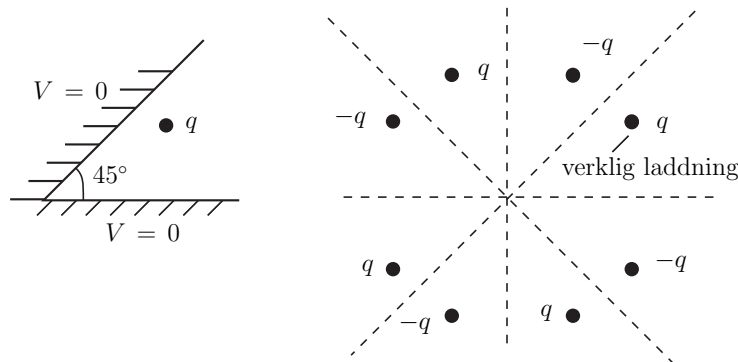
### Spegling i plan (Kap. 3.2.1–3.2.3)

En punktladdning befinner sig ovanför ett jordat metallplan. Lösningen till detta problem kan vi få genom att ersätta metallplanet med en spegelladdning enligt figur.



**Kommentar:** Spegling är ett trick för att på ett enkelt sätt få fram uttryck för det elektriska fältet och potentialen. I verkligheten finns ingen spegelladdning utan de laddningar som finns är punktladdningen och den inducerade ytladdningen på metallplanet. De uttryck för potentialen och fältet som vi får fram med speglingsmetoden gäller endast ovanför metallytan.

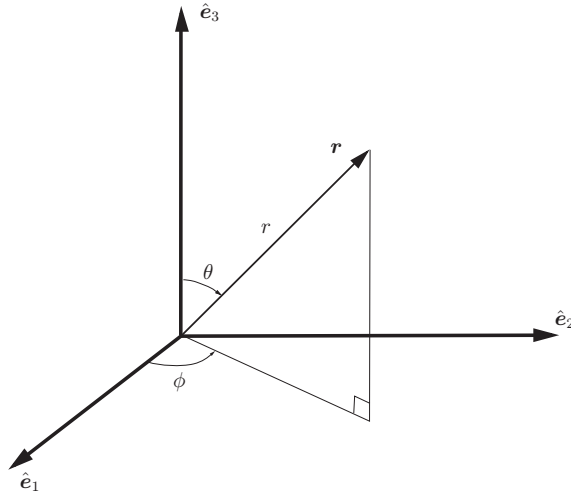
### Spegling i hörn



**Figur:** I hörnet  $0 < \phi < 45^\circ$  ger de båda figurerna samma elektriska fält. Randvillkoret  $V = 0$  för  $\phi = 0$  och  $\phi = 45^\circ$  är uppfyllt pga att laddningsfördelningen är antisymmetrisk map linjerna  $x = 0$  och  $x = y$ .

Det går att spegla i ett hörn enligt figur. Det som krävs för att det skall bli ett ändligt antal spegelladdningar är att vinkeln  $\phi_0$  mellan halvplanen ges av  $\phi_0 = \pi/n$  där  $n$  är ett positivt heltal.

## Lösning av Laplace ekvation i sfäriska koordinater (Kap. 3.3.2)



Antag att vi har ett källfritt område mellan två sfärer, d.v.s.  $a \leq r \leq b$  där  $b$  kan vara oändlig och  $a$  noll. I området gäller  $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$  för potentialen. Vi kan finna en allmän lösning för  $a \leq r \leq b$  genom att uttrycka Laplaceoperatoren i sfäriska koordinater

$$\nabla^2 V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Den allmänna lösningen fås m.h.a. separationsmetoden, se kursen i kontinuerliga system

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_l^m r^l + B_l^m r^{-l-1}) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (0.1)$$

där  $Y_l^m(\theta, \phi)$  är klotytfunktioner<sup>1</sup> och  $A_l^m$  och  $B_l^m$  är konstanter. Begränsar vi oss till axialsymmetriska lösningar  $V = V(r, \theta)$  förenklas lösningen eftersom den endast kommer att innehålla  $m = 0$  termer.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (0.2)$$

där  $P_l(x)$  är Legendrepolyomet av grad  $l$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

## Multipolutveckling (Kap. 3.4)

Antag nu en laddningsfördelning  $\rho(\mathbf{r})$  som ligger innanför en sfär med radie  $R$ . För  $r > R$  satisfierar potentialen Laplace ekvation och vi kan skriva den på formen (0.1), eller (0.2) om laddningsfördelningen är axialsymmetrisk. Eftersom  $V(\mathbf{r}) \rightarrow 0$

<sup>1</sup> $Y_l^m(\theta, \phi) = C_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ , där  $P_l^m(\cos \theta)$  är den associerade Legendrefunktionen av ordning  $(l, m)$  och där  $C_{lm}$  är en normeringskonstant som gör att  $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\phi d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$

då  $r \rightarrow \infty$  är  $A_l = 0$  för alla  $l$ . För att få fram  $B_l$  använder vi följande utveckling för  $r > r'$ , se Griffiths

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \Theta')$$

där  $\cos \Theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$ .<sup>2</sup> Det leder till

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r^{l+1}} \rho(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos \Theta') dv'$$

Termerna i summan benämns

$l = 0$ , **monopol**

$$V(\mathbf{r})_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$l = 1$ , **dipol**

$$V(\mathbf{r})_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r' \underbrace{P_1(\cos \Theta')}_{\cos \Theta'} dv'$$

$l = 2$ , **kvadrupol**

$l = 3$ , **oktopol**

## Elektriska dipoler (Kap. 3.4.2)

Dipoltermen skriver vi om

$$V(\mathbf{r})_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r' \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

där laddningsfördelningens elektriska dipolmoment definieras som

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv'$$

Antag två punktladdningar  $q$  och  $-q$  som befinner sig i punkterna  $\mathbf{r}_1$  respektive  $\mathbf{r}_2$ . Laddningarna bildar då en elektrisk dipol med *dipolmomentet*

$$\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = q\mathbf{d} \quad (*)$$

Om vi har  $N$  stycken punktladdningar  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  i punkterna  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  definieras dipolmomentet map origo av

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

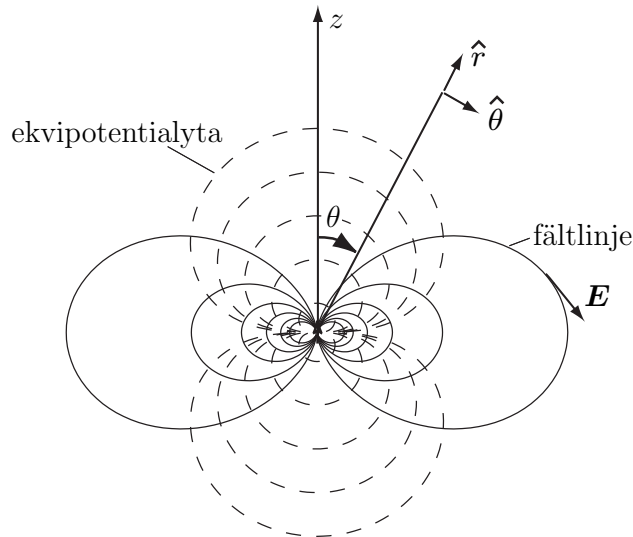
Det är lätt att visa att  $\mathbf{p}$  är oberoende av origos placering om totala laddningen är

$$\text{noll, } \sum_{i=1}^N q_i = 0.$$

---

<sup>2</sup> $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$  är Greenfunktionen för Poissons ekvation, se kontinuerliga system.

### Elektrisk fält från en punktdipol (Kap. 3.4.4)



**Figur:** Fältlinjer och ekvipotentialytor för en punktdipol i origo.

En punktdipol med dipolmoment  $\mathbf{p}$  får vi om vi låter  $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$  och  $q \rightarrow \infty$  på ett sådant sätt att  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  är ändlig (jämför ekv. (★)).

Potentialen från en punktdipol  $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$  som befinner sig i origo ges av

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Motsvarande elektriska fält ges av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} - r\mathbf{p}}{r^4} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)$$

där  $\theta$  är vinkeln mellan  $z$ -axeln och radius vektor  $\mathbf{r}$ , och  $\hat{\mathbf{r}}$  och  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  är de sfäriska enhetsvektorerna, se figuren ovan.

**Kommentar:** Det elektriska fältet från en punktkälla avtar som kvadraten på avståndet från punktkällan. Det elektriska fältet från en dipol avtar som kubiken på avståndet, dvs en ordning snabbare. Om en laddningsfördelning har totala laddningen  $Q$  och det totala dipolmomentet  $\mathbf{p}$  kommer dess elektriska fält att långt bort från laddningsfördelningen se ut som fältet från en punktkälla  $Q$ . När man närmar sig laddningsfördelningen blir detta en allt sämre approximation och man behöver då lägga till bidraget från dipolfältet. Fältet från en laddningsfördelning med totaladdningen noll kan på stora avstånd från laddningsfördelningen approximeras med ett dipolfält.