Föreläsning 13

12.2.1, 10.1.1–10.1.2, 10.1.4 i Griffiths

Vi kommer nu till hur elektromagnetiska vågor genereras!

Fält från strömmar i tidsdomänen (kursivt)

Lorentzgaugen $\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial V}{\partial t} = \boldsymbol{0}$ för vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ och den skalära potentialen V leder till att den magnetiska vektorpotentialen $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ satisfierar vågekvationen

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -\boldsymbol{J} \tag{0.1}$$

där $c = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$ och där $\boldsymbol{J}$ är den fria strömtätheten. Lösningen är

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{4\pi |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}v'$$

Från vektorpotentialen får vi magnetfältet genom $\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{A}$. För att få fram det elektriska fältet utanför källan kan vi antingen använda Ampères lag, eller som Griffiths gör, använda $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Det resulterar i Jefimenkos ekvation, se avsnitt 10.2.2.

Retarderad tid

Tidsargumentet $t - |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c$ i strömtätheten i ekvation (0.1) talar om att det tar tiden $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c$ för signalen att färdas sträckan $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$. Signalen färdas alltså med ljushastigheten c och lösningen är därmed kausal. Det är egentligen det enda vi kommer att använda från tidsdomänen. Det är betydligt enklare att lösa Maxwells ekvationer i frekvensdomänen och det är det resten av denna sammanfattning handlar om.

Fält från strömmar i frekvensdomänen

De flesta signaler är tidsharmoniska, d.v.s. varierar sinusformat i tiden. Om signalerna inte är tidshrmoniska kan vi genom en Fouriertransform gå över till frekvensplanet, lösa ekvationerna där för att sedan gå tillbaka till tidsplanet via en invers Fouriertransform.

Vi studerar tidsharmoniska fält ($\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$) och inför de komplexa fälten via

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} \end{cases}$$

Den komplexa vektorpotentialen ges av (se Griffiths)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}'))\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}v'$$

Magnetfältet ges av

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \iiint_{\mathbb{R}^3} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}v'$$

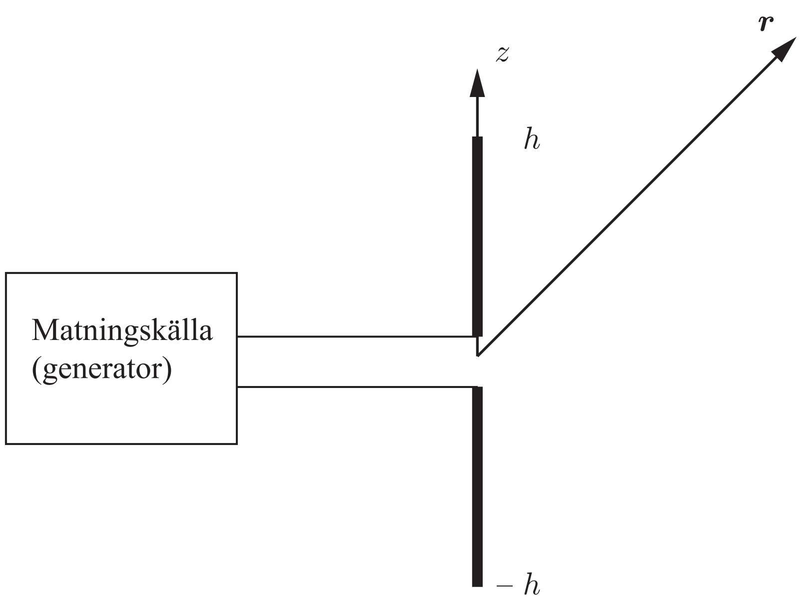
Utanför det område där det finns källor ges det elektriska fältet av Ampères lag,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \qquad \boldsymbol{r} \text{ utanför källorna}$$

För att bestämma $\boldsymbol{E}$ behöver vi alltså gå igenom kedjan $\boldsymbol{J} \Rightarrow \boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{H} \Rightarrow \boldsymbol{E}$.

Rak trådantenn

Låt en tidsharmonisk ström flyta längs en tråd med längd $2h$.



Volymsintegralen för vektorpotentialen övergår i en linjeintegral eftersom strömtätheten nu är begränsad till en linje längs z-axeln ($\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}v' \to I(z')\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}z'$).

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-h}^{h} I(z')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}|}\,\mathrm{d}z'$$

Elementardipol

Om längden $2h$ är mycket kortare än våglängden $\lambda = 2\pi/k$ gäller

$$kh \ll 1$$

och vi approximerar $|\boldsymbol{r} - z'\hat{\boldsymbol{z}}| \approx r$. Resultatet blir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}} \frac{\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \int_{-h}^{h} I(z') \, \mathrm{d}z'$$

Vi inför **antennens elektriska dipolmoment**[1]

$$\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}} = \frac{\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{z}}}{\omega} \int_{-h}^{h} I(z') \, \mathrm{d}z'$$

och antennens magnetiska vektorpotential blir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \boldsymbol{p}$$

och det magnetiska fältet och det elektriska fältet blir efter differentiering

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{i}\omega \nabla \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\omega \left(\nabla \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \right) \times \boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\omega \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \left(\mathrm{i}k - \frac{1}{r} \right) \hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p}$$

På stort avstånd från antennen, det s.k. **fjärrfältet** i **fjärrzonen**, blir ($k = \omega/c$)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{\omega^2}{c} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} \text{ (fjärrzon)}$$

Nära dipolen i den s.k. **närzonen** dominerar den andra termen (**närfältet**)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}\omega \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} \text{ (närzon)}$$

Storleksskillnaden mellan närfältet och fjärrfältet är

$$kr = \frac{\omega r}{c}$$

vilket är ett mycket litet tal utom då ω eller r är stort.

Det dominerande elektriska fältet i fjärrzonen blir mha. Ampères lag

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{r}}) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}$$

där **fjärrfältsamplituden** $\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{r}})$ blir

$$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon} \hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p})$$

[1] Jämför detta uttryck med

$$\int \left(\int \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t'} \, \mathrm{d}z' \right) \mathrm{d}t' = Q2h$$

Kommentar: För sfäriska vågor $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ gäller att ∇ operatorn kan bytas mot $\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}$, dvs. $\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ osv. Planvågssambandet $\boldsymbol{H} = \eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{E}$ gäller även för sfäriska vågor.

Anmärkning: Om elementardipolenen inte är placerad i origo utan i punkten $\boldsymbol{r}_0$ gäller att fjärrfältsamplituden blir

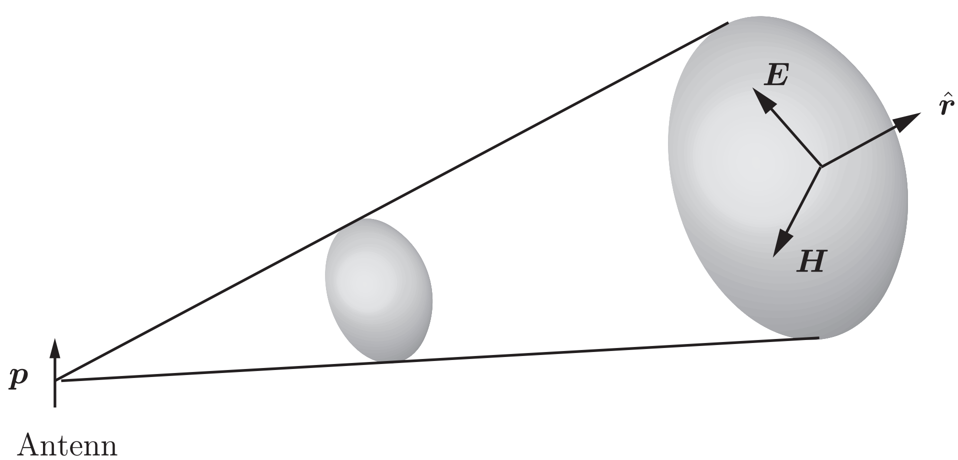
$$\boldsymbol{F}(\hat{\boldsymbol{r}}) = -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}_0}$$

Sammanfattningsvis: Det elektromagnetiska fältet i fjärrzonen (**strålningsfältet**) är:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= -\frac{k^2}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\hat{\boldsymbol{r}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p}) \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) &= \frac{k^2 c}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} \end{aligned}}$$

Speciellt, $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{\theta}}\dfrac{k^2 p}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\sin\theta \\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\hat{\boldsymbol{\phi}}\dfrac{k^2 cp}{4\pi}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\sin\theta \end{cases}$$

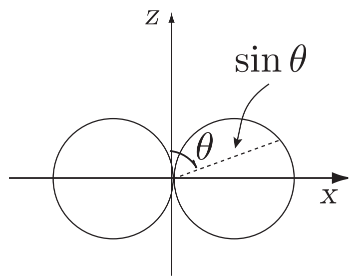


Notera att $E_\theta / H_\phi = 1/\varepsilon c = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ = materialets vågimpedans (liknar planvågsrelationen).

Strålningsfunktionen för det elektriska definieras som

$$f(\theta) = \frac{E_\theta}{\max|E_\theta|} = \sin\theta$$

Denna funktion visas grafiskt i **strålningsdiagrammet**



Effektflödet ges av Poyntings vektor

$$<\boldsymbol{S}(t)>= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\} = \frac{1}{2\eta}\hat{\boldsymbol{r}}|\boldsymbol{E}|^2 = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{k^4c|p|^2}{32\pi^2\varepsilon r^2}\sin^2\theta$$

Notera, att effekten strålar radiellt ut $\sim \frac{1}{r^2}$.

Totalt utstrålad effekt

$$P = \iint_{\text{Sfär med radie } r} <\boldsymbol{S}(t)> \cdot\hat{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}S = \frac{k^4c|p|^2}{12\pi\varepsilon}$$

Rak trådantenn, återbesök

Från ovan har vi den magnetiska vektorpotentialen

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-h}^{h} I(z')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}|}\,\mathrm{d}z'$$

Om inte antennen är elektriskt kort ($kh \ll 1$) kan vi inte göra approximationerna som leder fram till elementardipoluttrycken.

Vi specificerar strömmen (egentligen ett randvärdesproblem som måste lösas)

$$I(z) = I_0\sin(k(h-|z|))$$

Denna ström är symmetrisk kring $z=0$ och satisfierar $I(\pm h)=0$, dvs. ingen ström i ändpunkterna.

Approximation på stora avstånd r ($\cos\theta = \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}$)

$$|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}| = \sqrt{r^2+z'^2-2rz'\cos\theta} = r\sqrt{1+(z'/r)^2-2(z'/r)\cos\theta}$$

Använd $(1+x)^{1/2} = 1+x/2+O(x^2)$ för att komma fram till

$$|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}| = r\left(1-(z'/r)\cos\theta+O((z'/r)^2)\right) \approx r - z'\cos\theta$$

På stora avstånd blir därför den magnetiska vektorpotentialen approximativt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) =& \mu I_0\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-h}^{h}\sin(k(h-|z'|))\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-z'\hat{\boldsymbol{z}}|}\,\mathrm{d}z' \\ \approx =& \mu I_0\hat{\boldsymbol{z}}\int_{-h}^{h}\sin(k(h-|z'|))\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}}{4\pi r}\,\mathrm{d}z' = \boldsymbol{F}(\theta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}\end{aligned}$$

där strålningsfunktionen $\boldsymbol{F}$ är

$$\boldsymbol{F}(\theta) = \mu I_0 \hat{\boldsymbol{z}} \int_{-h}^{h} \sin(k(h - |z'|)) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz'\cos\theta}}{4\pi} \, \mathrm{d}z'$$

som kan beräknas i elementära integraler

$$\boldsymbol{F}(\theta) = \frac{\mu I_0 \hat{\boldsymbol{z}}}{2\pi k \sin^2\theta} \left(\cos(kh\cos\theta) - \cos kh\right)$$

Därefter kan $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ beräknas.