Föreläsning 12

9.1-9.3.2 i Griffiths

Tidsharmoniska fält, komplexa fält (Kap. 9.1.2)

Tidsharmoniska fält (dvs. fält som varierar sinus- eller cosinusformigt i tiden) har stora tillämpningsområden i de tekniska vetenskaperna. Variationen i tiden sker enligt

$$\cos(\omega t - \alpha)$$

där $\omega = 2\pi f =$ vinkelfrekvensen, f frekvensen och α är en fasfaktor.

Det visar sig praktiskt att arbeta med komplexa storheter och sedan ta realdelen för att få de fysikaliska storheterna (jfr kretsteori).

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$$

där $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ är en komplex vektor (dvs. har komplexvärda komponenter). Tag t.ex. x-komponenten av detta komplexa fält, $E_x(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}$, och uttryck det komplexa fältet i polär form, dvs. $E_x(\boldsymbol{r}) = |E_x(\boldsymbol{r})|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}$. Det tidsberoende (fysikaliska) fältets x-komponent blir då

$$E_x(\boldsymbol{r}, t) = \mathrm{Re}\left\{E_x(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{|E_x(\boldsymbol{r})|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \alpha(\boldsymbol{r}))}\right\} = |E_x(\boldsymbol{r})| \cos(\omega t - \alpha(\boldsymbol{r}))$$

Kommentar: I elektroniken används tidskonventionen $e^{j\omega t}$ medan man inom fysiken använder konventionen $e^{-\mathrm{i}\omega t}$. Notera att Griffiths har med faktorn $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ i de komplexa fälten.

Plana vågor (Kap. 9.2.2)

Vågekvationen från tidigare (källfritt område)

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = \boldsymbol{0}$$

Tidsharmoniska fält $\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega$.

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + \varepsilon\mu\omega^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

Inför **materialets vågtal** $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega/c$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) + k^2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0} \qquad (\star)$$

vilket är Helmholtz vektorvärda ekvation. Materialets **brytningsindex** $n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}$ eller $k = \omega n/c_0 = k_0 n$.

En viktig klass av lösningar till Maxwells ekvationer (Helmholts ekvation) är de plana vågorna.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

där $\boldsymbol{E}_0$ är en fix (komplex) vektor och $\boldsymbol{k}$ är vågens **vågvektor**. Undersök vilka villkor som vågvektorn måste uppfylla för att vara en lösning till $(\star)$.

Insättning i $(\star)$ ger $\nabla^2 \to -\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$ eftersom $\nabla \to \mathrm{i}\boldsymbol{k}$:

$$(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + k^2)\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0}$$

Villkor på vågvektorn $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = k^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k} = k\hat{\boldsymbol{e}}$$

Villkor på vågvektorn $\boldsymbol{E}_0$: Gauss lag $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$ ger

$$\nabla\cdot(\varepsilon\boldsymbol{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0$$

Vågorna är **transversella** $\boldsymbol{E}_0 \perp \boldsymbol{k}$.

Lösningarna

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right\}$$

kallas **plana vågor** eftersom för fix tid t har alla punkter som satisfierar

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = \text{konstant, dvs. ett plan}$$

samma elektriska fält $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$. Normalen till planet är $\hat{\boldsymbol{e}}$, och vågen utbreder sig i $\hat{\boldsymbol{e}}$:s riktning, dvs. i vågvektorns riktning.

Plan som är separerade i rummet med ett inbördes avstånd λ där $k\lambda = 2\pi$ har samma fält.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}+\lambda\hat{\boldsymbol{e}},t) = \operatorname{Re}\left\{\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}+\lambda\hat{\boldsymbol{e}})-\omega t)}\right\} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

eftersom

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\lambda\hat{\boldsymbol{e}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\lambda} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$$

Avståndet λ kallas **vågens våglängd**. Vi har också

$$f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad f\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\frac{2\pi}{k} = \frac{\omega}{k} = c$$

Motsvarande fält för det magnetiska fältet $\boldsymbol{H}$ fås ur Faradays lag

$$\mathrm{i}\omega\mu\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{E}$$

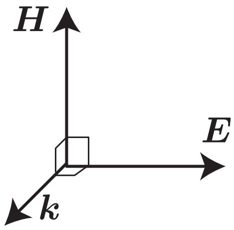
vilket ger

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\eta}\hat{\boldsymbol{e}}\times\boldsymbol{E}$$

ty

$$\frac{k}{\omega\mu} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu/\varepsilon}} = \frac{1}{\eta}$$

där $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ är **materialets vågimpedans** (enhet Ω). I vakuum $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 120\pi\,\Omega \approx 377\,\Omega$. En konsekvens av detta är att $\{\boldsymbol{E},\boldsymbol{H},\boldsymbol{k}\}$ är ett höger-orienterat system.



Kommentar: I fysiken använder man oftare sambandet mellan $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$. Dessutom är det vanligare att använda brytningsindex n och våghastigheten c än vågimpedansen η. Sambandet mellan $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{B}$ ges av

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{n}{c_0}\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

Exempel: Om $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{z}}$ och vågen är riktad (polariserad) i $x-$led fås

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 e^{-\mathrm{i}\phi} e^{\mathrm{i}kz}$$

Motsvarande magnetfält ges av

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}} \frac{1}{\eta} E_0 e^{-\mathrm{i}\phi} e^{\mathrm{i}kz}$$

Transformation till tidsplanet ger

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) e^{-\mathrm{i}\omega t}\right\} = \hat{\boldsymbol{x}} E_0 \cos(\omega t + \phi - kz) \\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) &= \hat{\boldsymbol{y}} \frac{1}{\eta} E_0 \cos(\omega t + \phi - kz)
\end{aligned}$$

Poyntings vektor

Tidsmedelvärdet av en kvadratisk tidsharmonisk storhet är[1]

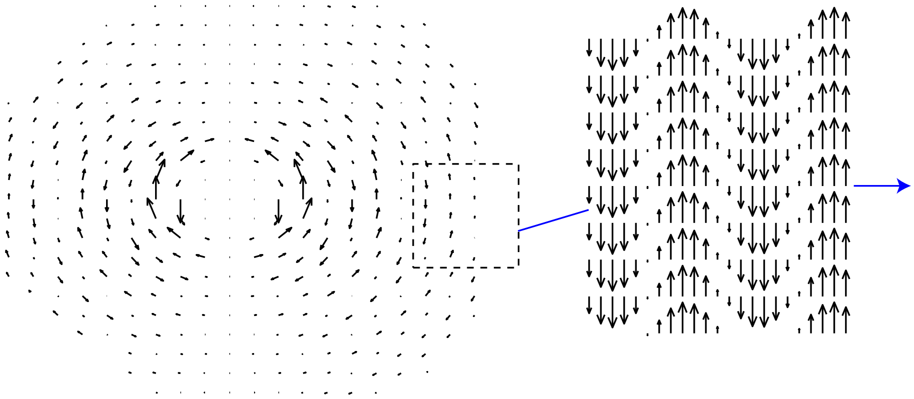
$$\begin{aligned}
<\boldsymbol{S}(t)> = <\boldsymbol{E}(t) \times \boldsymbol{H}(t)> &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{E} \times \left(\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}^*\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\underbrace{(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)}_{=|\boldsymbol{E}|^2} - \frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{E}^*\underbrace{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})}_{=0}\right\} = \frac{1}{2\omega\mu}\boldsymbol{k}|\boldsymbol{E}|^2 = \frac{1}{2\eta}\hat{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{E}|^2
\end{aligned}$$

---

[1] Tidsmedelvärdet av produkten av två tidsharmoniska fält $f_1(t)$ och $f_2(t)$ fås lätt genom att bilda medelvärdet över en period $T = 2\pi/\omega$.

$$\begin{aligned}
<f_1(t)f_2(t)> &= \frac{1}{T}\int_0^T f_1(t)f_2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{Re}\left\{f_1(\omega)e^{-i\omega t}\right\}\mathrm{Re}\left\{f_2(\omega)e^{-i\omega t}\right\}\,dt \\
&= \frac{1}{4T}\int_0^T \left\{f_1(\omega)f_2(\omega)e^{-2i\omega t} + f_1^*(\omega)f_2^*(\omega)e^{2i\omega t} + f_1(\omega)f_2^*(\omega) + f_1^*(\omega)f_2(\omega)\right\}\,dt \\
&= \frac{1}{4}\left\{f_1(\omega)f_2^*(\omega) + f_1^*(\omega)f_2(\omega)\right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{f_1(\omega)f_2^*(\omega)\right\}
\end{aligned}$$

Kommentar: Fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ skapas i något område där det finns laddningar och strömmar som varierar tidsharmoniskt, t.ex. i en antenn. Fälten färdas ut från området som tidsharmoniska elektromagnetiska vågor som måste uppfylla ekvationerna ($\star$). Långt bort från en området är vågen sfärisk, dvs. vågen rör sig med ljushastigheten radiellt ut från antennen. Vi kommer att behandla dessa sfäriska vågor i antennavsnittet senare i kursen. Lokalt kan vågen ofta approximeras med en planvåg, se figur, vilket är en fördel eftersom planvågor är enklare att analysera än sfäriska vågor.



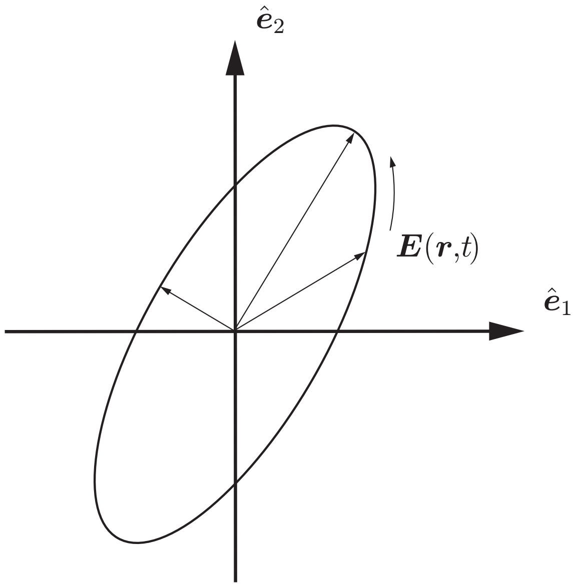
Figur: Den vänstra figuren visar det elektriska vektorfältet för det spridda ljuset från en liten partikel (tex molekyl). Fältet är en sfärisk våg som färdas med ljusets hastighet radiellt ut från partikeln. I den markerade rektangeln är vågfronten nästan plan och fältet kan approximeras med planvågen som visas i den högra figuren

Polarisation av plana vågor (Kap. 9.1.4)

Ett tidsharmoniskt vektorfält, t.ex. $\boldsymbol{E}$, har följande egenskaper:

1. $\boldsymbol{E}$-fältet svänger i ett plan (polarisationsplanet)

2. $\boldsymbol{E}$-fältet beskriver en elliptisk bana i polarisationsplanet



3. Rörelsen kan vara moturs (medurs) och vågen kallas höger-(vänster-)elliptiskt polariserad

   Två specialfall:

   (a) Ellipsen är degenererad till en linje (linjärt polarisation, LP)
   Villkor: E_2/E_1 =reellt tal

   (b) Ellipsen är degenererad till en cirkel (cirkulär polarisation, RCP, LCP)
   Villkor: $E_2/E_1 = \pm\mathrm{i}$ eller $E_2 = E_1\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/2}$

Reflektion och transmission mot halvrymd (Kap. 9.3.2)

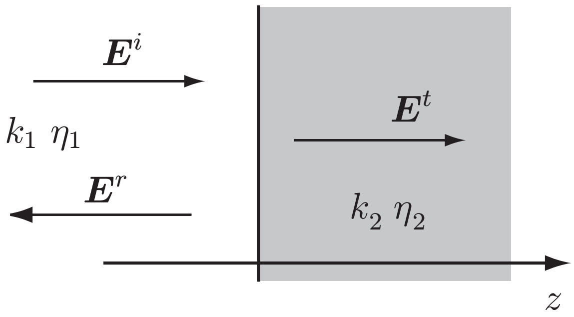
Vid bestämning av reflektion och transmission mot en halvrymd följer man följande steg:

1. Inför vågimpedanserna och vågtalen för de båda halvrymderna

2. Skriv upp de elektriska och magnetiska fälten för den infallande, reflekterade och transmitterade vågen

3. Använd randvillkoren att tangentialkomponenterna av de elektriska och magnetiska fälten är kontinuerliga

4. Detta ger ett ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta (reflektions- och tranmsissionskoefficienten), som lätt löses



Halvrymderna

Den vänstra halvrymden, $z < 0$, har relativ permittivitet ε_{r1} och relativ permeabilitet μ_{r1}. Motsvarande vågimpedans och vågtal ges av

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r1}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r1}}{\varepsilon_{r1}}}$$
$$k_1 = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}$$

där c_0 är ljushastigheten i vakuum. Den högra halvrymden, $z > 0$, har relativa permittivitet och permeabiltet ε_{r2} respektive μ_{r2}. Vågimpedansen och vågtalet för den högra halvrymden ges av

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0\mu_{r2}}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}} = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_{r2}}{\varepsilon_{r2}}}$$
$$k_2 = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$$

Fälten i vänstra halvrymden

De komplexa elektriska fälten i den vänstra halvrymden är

$$\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_{\rm i}e^{{\rm i}k_1 z} + \boldsymbol{E}_{\rm r}e^{-{\rm i}k_1 z}$$

Den första termen modellerar den infallande vågen och den andra den reflekterade vågen. Den komplexa amplituden $\boldsymbol{E}_{\rm i}$ är känd medan den andra $\boldsymbol{E}_{\rm r}$ är okänd och sökes. Motsvarande magnetfält ges av **regeln om högersystem**

$$\boldsymbol{H}_1(z) = \frac{1}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_{\rm i}e^{{\rm i}k_1 z} - \frac{1}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_{\rm r}e^{-{\rm i}k_1 z}$$

Fälten i högra halvrymden

Det komplexa elektriska fältet i den högra halvrymden är

$$\boldsymbol{E}_2(z) = \boldsymbol{E}_{\rm t}e^{{\rm i}k_2 z}$$

som modellerar den transmitterade vågen. Den komplexa amplituden $\boldsymbol{E}_{\rm t}$ är okänd och sökes. Motsvarande magnetfält ges av **regeln om högersystem**

$$\boldsymbol{H}_2(z) = \frac{1}{\eta_2}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_{\rm t}e^{{\rm i}k_2 z}$$

Randvillkor

Tangentialkomponenterna av $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ är kontinuerliga vid $z = 0$. Eftersom $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ är tangentiella fås

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_\mathrm{i} + \boldsymbol{E}_\mathrm{r} = \boldsymbol{E}_\mathrm{t} \\
&\frac{1}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{i} - \frac{1}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{r} = \frac{1}{\eta_2}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{t}
\end{aligned}
$$

Lösningen till detta ekvationssystem i den givna amplituden $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ ges av

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_\mathrm{r} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = r\boldsymbol{E}_\mathrm{i} \\
\boldsymbol{E}_\mathrm{t} = \dfrac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = t\boldsymbol{E}_\mathrm{i}
\end{cases}
$$

där reflektionskoefficient r och transmissionskoefficient t ges av

$$
\begin{cases}
r = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \\
t = \dfrac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}
\end{cases}
$$

Reflektion mot perfekt ledande plan

Om område 2 är perfekt ledande kan det inte finnas något fält där, dvs $\boldsymbol{E}_\mathrm{t} = \boldsymbol{0}$. Den kända infallande vågen och den ansatta reflekterande vågen ges av

$$
\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_\mathrm{i} e^{\mathrm{i}k_1 z} + \boldsymbol{E}_\mathrm{r} e^{-\mathrm{i}k_1 z}
$$

Randvillkoret på en perfekt ledande yta är att tangentialkomponenten av det elektriska fältet är noll. Detta ger $\boldsymbol{E}_\mathrm{r} = -\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$ och därmed är $r = -1$. Totala fältet för $z < 0$ ges av

$$
\boldsymbol{E}_1(z) = \boldsymbol{E}_\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}k_1 z} - e^{-\mathrm{i}k_1 z}\right)
$$

Detta är en stående våg. Om $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ är en reell vektor ges motsvarande fält i tidsplanet av

$$
\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}_1(z)e^{-\mathrm{i}\omega t}\} = 2\boldsymbol{E}_\mathrm{i}\sin k_1 z\,\mathrm{Re}\{e^{\mathrm{i}\pi/2}e^{-\mathrm{i}\omega t}\} = -2\boldsymbol{E}_\mathrm{i}\sin k_1 z \sin\omega t
$$

Exempel: Magnetfälten ges av regeln om högersystem

$$
\boldsymbol{H}_1(z) = \frac{1}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \left(\boldsymbol{E}_\mathrm{i} e^{\mathrm{i}k_1 z} - \boldsymbol{E}_\mathrm{r} e^{-\mathrm{i}k_1 z}\right) = \frac{1}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{i}\left(e^{\mathrm{i}k_1 z} + e^{-\mathrm{i}k_1 z}\right) = \frac{2}{\eta_1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{i}\cos k_1 z
$$

OBS! Det går inte att använda regeln om högersystem direkt på det totala fältet eftersom det innehåller både en vänster- och en högergående våg.