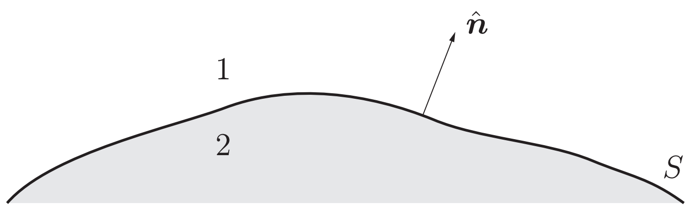
# Föreläsning 11

9.1-9.2.2 i Griffiths

## Randvillkor (Kap. 7.3.6)

(Vi väntar till föreläsning 12 med att ta upp randvillkoren. Där används de för att bestämma reflektion och transmission mot halvrymd.) De till Maxwells ekvationer förenliga randvillkoren är:




1. $$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{0}$$

   (tangentialkomponenten av den elektriska fältstyrkan är alltid kontinuerlig)

2. $$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_{Sf}$$

   (tangentialkomponenten av den magnetiska fältstyrkan är diskontinuerlig med språng $\boldsymbol{J}_{Sf}$, fria ytströmmar)

3. $$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}_2 = 0$$

   (normalkomponenten av den magnetiska flödestätheten är alltid kontinuerlig)

4. $$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_2 = \rho_{Sf}$$

   (normalkomponenten av den elektriska flödestätheten är diskontinuerlig med språng $\rho_{Sf}$, fria ytladdningar)

## Vågekvationen

Från Maxwells ekvationer

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{Faradays lag} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \text{Ampères (generaliserade) lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \quad \text{Gauss lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{Flödeskonservering} \end{cases}$$

är det ganska rättframt att härleda vågekvationer för de elektriska och magnetiska fälten. Antag, linjärt, isotropt, homogent ($\mu$, $\varepsilon$ konstanta) material, dvs.

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Vi får mha. Maxwells ekvationer

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E})}_{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\Big(\boldsymbol{J}_f + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}_{\varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}\Big)$$

vilket i sin tur ger

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_f + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t}$$

dvs. den tredimensionella vågekvationen med en källterm $\nabla\rho_f/\varepsilon + \mu\frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t}$. Varje kartesisk komponent uppfyller den endimensionella vågekvationen.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = \text{källterm}$$

där $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$=våghastigheten. I vakuum är våghastigheten exakt given av $c_0 =$ 299792458 m/s.

På samma sätt härleds den tredimensionella vågekvationen för det magnetiska fältet $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$. Resultatet är

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_f + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t} \\ &\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \boldsymbol{J}_f \end{aligned}}$$

Fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ skapas i något område där det finns laddningar och strömmar, t.ex. i en antenn. Fälten färdas ut från området som elektromagnetiska vågor. Fälten för dessa vågor måste uppfylla ekvationerna ovan.

I källfritt vakuum gäller de homogena vågekvationerna

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0} \\ &\nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \boldsymbol{0} \end{aligned}} \tag{0.1}$$

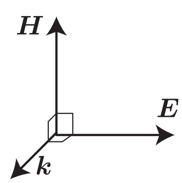
## Planvågslösningar och deras egenskaper

Lösningar till vågekvationerna (0.1) som bara beror av $z$ och $t$, d.v.s. $\boldsymbol{E}(z,t)$ och $\boldsymbol{H}(z,t)$, kallas plana vågor eftersom de för en fix tid är konstanta vektorer i varje plan $z$ =konstant. På stora avstånd från en källa är planvågsapproximationen ofta relevant och den förenklar både analysen och den fysikaliska tolkningen. Av dessa anledningar används den flitigt inom optik och mikrovågsteknik. Här följer tre viktiga egenskaper för plana vågor i vakuum:

1. Plana vågor är transversella, $E_z(z,t)=0$ och $H_z(z,t)=0$.

2. Två typer: $\boldsymbol{E}^+(z-ct)$ som rör sig i positiv $z-$led och $\boldsymbol{E}^-(z+ct)$ som rör sig i negativ $z-$led
$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z,t) &= \boldsymbol{E}^+(z-ct)+\boldsymbol{E}^-(z+ct)\\ \boldsymbol{H}(z,t) &= \boldsymbol{H}^+(z-ct)+\boldsymbol{H}^-(z+ct)\end{aligned}$$

3. Regeln om högersystem: Låt $\hat{\boldsymbol{k}}$ vara planvågens utbredningsriktning. Då bildar $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ ett ortogonalt högersystem där
$$\begin{aligned}&\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{H}|}=\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=120\pi\,\Omega=\text{vågimpedansen för vakuum}\\ &\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{B}|}=c_0=\text{ljushastigheten i vakkum}\end{aligned}$$




En planvåg med utbredningsriktning $\hat{\boldsymbol{k}}$, där $\hat{\boldsymbol{k}}$ är en enhetsvektor, kan skrivas
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}-c_0t)\\ &\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}-c_0t)=\eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{r}-c_0t)\end{aligned}$$

## Tidsharmoniska plana vågor

En tidsharmonisk planvåg varierar sinusformat i både rum och tid. Nästan all trådlös kommunikation sker med hjälp av bärvågor som är tidsharmoniska. Även inom optiken är tidsharmoniska vågor vanliga. En laser ger t.ex. ifrån sig ljus med en bestämd frekvens och detta ljus är då tidsharmoniskt. En tidsharmonisk planvåg som rör sig i positiv $z-$led kan skrivas
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(z,t)=E_0\sin(kz-\omega t+\alpha_0)\hat{\boldsymbol{x}}+E_1\sin(kz-\omega t+\alpha_1)\hat{\boldsymbol{y}}\\ &\boldsymbol{H}(z,t)=\eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{z}}\times\boldsymbol{E}(z,t)=\eta_0^{-1}\left(E_0\sin(kz-\omega t+\alpha_0)\hat{\boldsymbol{y}}-E_1\sin(kz-\omega t+\alpha_1)\hat{\boldsymbol{x}}\right)\end{aligned}$$

Här är $\omega=2\pi f$ =vinkelfrekvensen, $f$ =frekvensen, $k=\dfrac{\omega}{c_0}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ =vågtalet, $\lambda=\dfrac{c_0}{f}$ =våglängden, $\alpha_0$ =fasvinkel och $\alpha_1$ =fasvinkel.

## Lösning av vågekvationen (Kursivt)

På föreläsning 13, som handlar om antenner, behöver vi använda lösningen till den skalära vågekvationen för att kunna konstruera de tidsberoende elektromagnetiska fälten från en antenn. För fullständighetens skulle visar vi här hur man får fram lösningen i det skalära fallet. Tentamen kommer inte att innehålla uppgifter där det krävs att man förstår härledningen. Man bör dock förstå att lösningen är kausal, d.v.s. att det tar en tid $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ för en signal att färdas sträckan $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.

Vi skall nu studera lösningar $V = V(\boldsymbol{r}, t)$ till vågekvationen

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -\rho(\boldsymbol{r}, t)$$

Detta är samma ekvation som dyker upp i akustiken. Enda skillnaden är att våghastigheten är betydligt lägre för akustiska vågor än för elektromagnetiska vågorna. Låt källtermen först vara en "punktladdning" i origo, dvs.

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \delta(\boldsymbol{r})q(t)$$

Observera att detta är en matematik konstruktion som inte alltid kan realiseras fysikaliskt.

Vi söker sfäriskt symmetriska lösningar $V = V(r, t)$. I sfäriska koordinater får vi vågekvationen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V(r, t)}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(r, t)}{\partial t^2} = -\delta(\boldsymbol{r})q(t) \qquad (\star)$$

En lösning till den källfria ekvationen är

$$V(r, t) = \frac{f(r-ct)}{r}, \quad r > 0$$

där $f$ är en godtycklig (snäll) funktion.[1] Funktionen $f$ bestäms av funktionen $q(t)$ i origo. Resultatet är

$$f(\xi) = \frac{q(-\xi/c)}{4\pi}$$

[1] Vi kontrollerar detta genom att beräkna de partiella derivatorna m.a.p. $r$ och $t$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{f(r-ct)}{r} = \dfrac{f'(r-ct)}{r} - \dfrac{f(r-ct)}{r^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{f(r-ct)}{r}\right) = \dfrac{\partial(rf'(r-ct))}{\partial r} - \dfrac{\partial f(r-ct)}{\partial r} = rf''(r-ct) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{f(r-ct)}{r} = c^2\dfrac{f''(r-ct)}{r} \end{cases}$$

vilket ger

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{f(r-ct)}{r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{f(r-ct)}{r} = \frac{f''(r-ct)}{r} - \frac{1}{c^2}c^2\frac{f''(r-ct)}{r} = 0$$

**Bevis** Vi visar detta resultat, men beviset kan hoppas över för den som inte är intresserad. Integrera båda sidor i ($\star$) över ett klot centrerat i origo med radie $\epsilon$.

$$\iiint_{r\leq\epsilon} \nabla^2 V(r,t)\ \mathrm{d}v - \frac{1}{c^2}\iiint_{r\leq\epsilon} \frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial t^2}\ \mathrm{d}v = -\iiint_{r\leq\epsilon} \delta(\boldsymbol{r})q(t)\ \mathrm{d}v = -q(t) \quad (\dagger)$$

De olika termerna i vänster led blir:

$$\iiint_{r\leq\epsilon} \frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial t^2}\ \mathrm{d}v = 4\pi\int_0^\epsilon \frac{c^2 f''(r-ct)}{r} r^2\ \mathrm{d}r \to 0, \quad \epsilon\to 0$$

och med divergenssatsens hjälp

$$\iiint_{r\leq\epsilon} \underbrace{\nabla^2 V(r,t)}_{\nabla\cdot(\nabla V)}\ \mathrm{d}v = \iint_{r=\epsilon} \nabla V\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\ \mathrm{d}S = 4\pi\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{f(r-ct)}{r}\bigg|_{r=\epsilon}$$

$$=4\pi\epsilon^2\left(\frac{f'(\epsilon-ct)}{\epsilon} - \frac{f(\epsilon-ct)}{\epsilon^2}\right) \to -4\pi f(-ct), \quad \epsilon\to 0$$

Resultatet från ($\dagger$) blir i gränsen $\epsilon\to 0$:

$$4\pi f(-ct) = q(t)$$

vilket visar det önskade resultatet. □

Lösningen till vågekvationen ($\star$) blir därför

$$V(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r} = \frac{q(t-r/c)}{4\pi r}$$

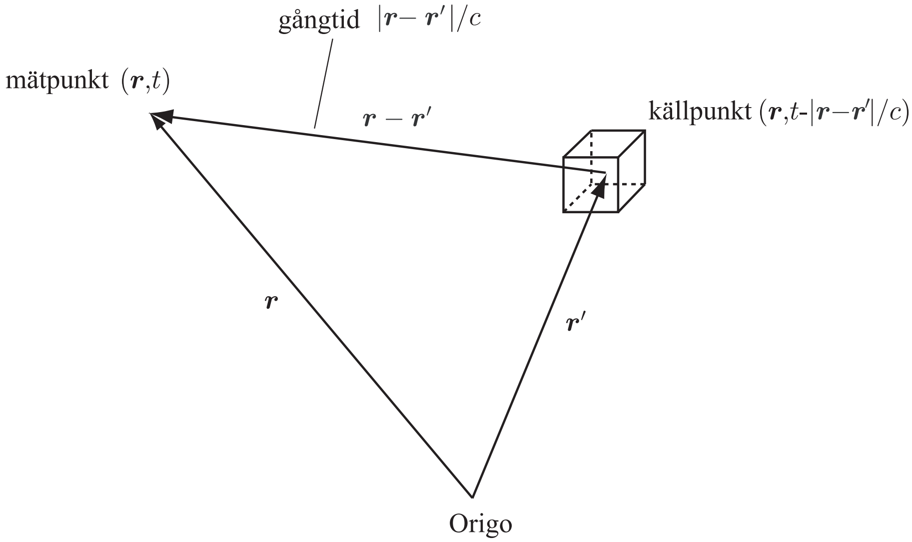
Lösning för translaterad "punktladdning" $r\to|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$.

$$V(r,t) = \frac{q(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Totalt från hela laddningsfördelningen $\rho(\boldsymbol{r},t)$ fås genom att integrera över alla källor, dvs.

$$\boxed{V(r,t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\ \mathrm{d}v'}$$

**Fysikalisk tolkning:**




Tidsargumentet i integralen är tidsförskjutet med gångtiden mellan käll- och mätpunkt.

**Jämförelse med det elektrostatiska fallet**

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$$

med lösning

$$V(\boldsymbol{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}v'$$

vilket motsvarar oändlig utbredningshastighet $c$.