

## Föreläsning 10

7.3.1-7.3.3, 7.3.6, 8.1.2 i Griffiths

### Maxwells ekvationer (Kap. 7.3)

Våra modellagar, som de ser ut nu, är

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} & \text{Faradays lag} \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) & \text{Ampères lag} \\ \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) & \text{Gauss lag} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 & \text{Flödeskonservering} \end{cases}$$

Maxwell insåg att dessa ekvationer inte var kompletta!! Kontinuitetsekvationen

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

är ej uppfylld!! Vi ser att så är fallet genom att ta divergensen på Ampères lag.

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Motsägelse!!

Det fattas en term på höger sida. Gauss lag medför

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Modifierad (korrekt) version av Ampères lag är

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Notera kopplingen mellan  $\mathbf{H}$ - och  $\mathbf{D}$ -fälten.

**Anmärkning:** Den extra termen  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$  fungerar som en strömtäthet, och kallas ofta för förskjutningsströmmen.

Vi får Maxwells fältekvationer:

$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{Faradays lag}$
$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \text{Ampères (generaliserade) lag}$
$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{Gauss lag}$
$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{Flödeskonservering}$

eller på integralform

$$\int_L \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad \text{Faradays lag}$$

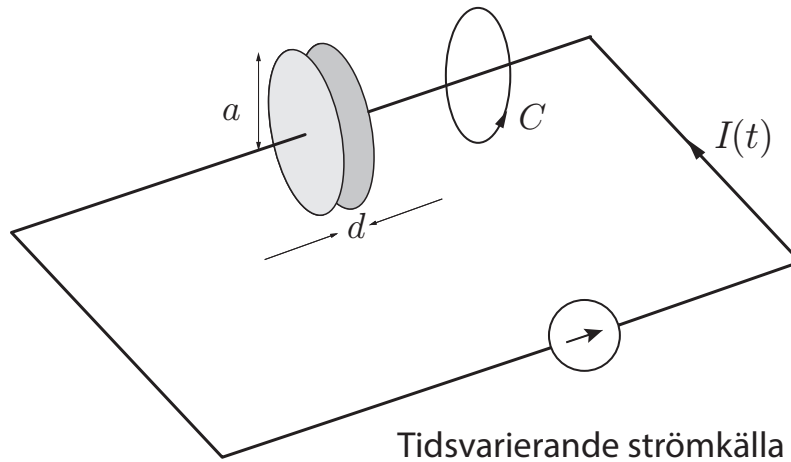
$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}} + \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad \text{Ampères (generaliserade) lag}$$

$$\iint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = Q_{\text{enc}} \quad \text{Gauss lag}$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0 \quad \text{Flödeskonservering}$$

Vi har nu samtliga ekvationer för de elektromagnetiska fälten.

### Lösning av skenbar paradox



#### A. Ampères lag (före Maxwell)

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}(t)$$

1. Om strömmen beräknas genom "plana ytan"  $I_{\text{enc}}(t) = I(t)$ , vilket leder till ett konsistent resultat
2. Om vi istället väljer en yta genom kondensatorn (ingen ström korsas!) blir  $I_{\text{enc}}(t) = 0$ , vilket leder till en motsägelse, eftersom tangentlinjeintegralen av  $\mathbf{B}$  är skild från noll

#### B. Ampères lag (Maxwell)

$$\int_L \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Det elektriska fältet utanför kondensatorn är försumbart,  $\mathbf{E} \approx \mathbf{0}$ . Inuti kondensatorn gäller

$$E(t) = \frac{\rho_S(t)}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{E}(t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \frac{I(t)}{\varepsilon_0 A}$$

eftersom strömmen  $I(t) = \frac{dQ}{dt}$ .

1. Om strömmen beräknas genom "plana ytan"

$$\mu_0 I_{\text{enc}} + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \underbrace{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{\approx 0} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \mu_0 I(t)$$

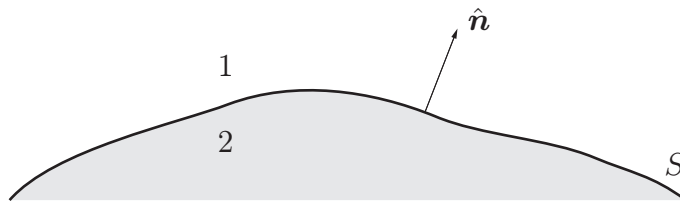
2. Om vi istället väljer en yta genom kondensatorn (ingen ström korsas!) blir

$$\mu_0 \underbrace{I_{\text{enc}}}_{=0} + \varepsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{I(t)}{\varepsilon_0 A} A = \mu_0 I(t)$$

Båda resultaten är nu konsistenta.

### Randvillkor (Kap. 7.3.6)

(Randvillkoren tas upp i föreläsning 12. Där används de för att bestämma reflektion och transmission av elektromagnetiska vågor) De till Maxwells ekvationer förenliga randvillkor blir:



- 1.

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{0}$$

(tangentialkomponenten av den elektriska fältstyrkan är alltid kontinuerlig)

- 2.

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 - \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_{Sf}$$

(tangentialkomponenten av den magnetiska fältstyrkan är diskontinuerlig med språng  $\mathbf{J}_{Sf}$ , fria ytströmmar)

- 3.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}_2 = 0$$

(normalkomponenten av den magnetiska flödestätheten är alltid kontinuerlig)

- 4.

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_2 = \rho_{Sf}$$

(normalkomponenten av den elektriska flödestätheten är diskontinuerlig med språng  $\rho_{Sf}$ , fria ytladdningar)

## Poyntings teorem (Kap. 8.1.2)

Använd vektoridentiteten

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

Sätt in Faradays och Ampères lagar (index  $f$  slopas)

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \left( \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$$

Antag, linjärt, isotropt ( $\mu, \varepsilon$  konstanta) material, dvs.

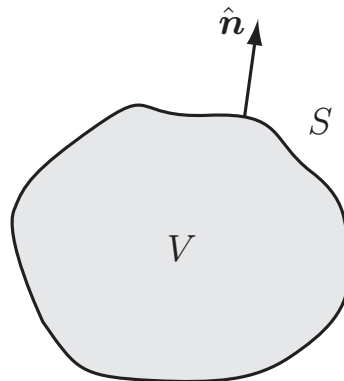
$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases}$$

Detta leder till

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) &= -\mu \underbrace{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{H}}_{=\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})} - \varepsilon \underbrace{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}_{=\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f \end{aligned}$$

Här är  $\mathbf{J}_f$  den fria strömtätheten.

Antag en volym  $V$  som omsluts av en yta  $S$  med utåtriktad normal  $\hat{\mathbf{n}}$ . Integrera uttrycket ovan över volymen  $V$ .



Resultatet blir

$$\underbrace{\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f \, dv}_{\text{term 1}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \iiint_V \frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, dv}_{\text{term 2}} + \underbrace{\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, dv}_{\text{term 3}} = 0 \quad (0.1)$$

Tolkning:

**Term 1** Denna term

$$\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f \, dv$$

visade vi tidigare var effektutvecklingen  $P$ , som det elektriska fältet utför på de fria laddningsbärarna (jfr  $P = RI^2$ )

**Term 2** Denna term är tidsderivatan av den energi som är upplagrad (bunden) i de elektriska och magnetiska fälten, dvs.

$$\frac{dW_{\text{em}}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \iiint_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, dv$$

där

$$W_{\text{em}} = \frac{1}{2} \iiint_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{E}) \, dv$$

**Term 3** Ny term relaterad till strålning. Divergenssatsen ger

$$\iiint_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \, dv = \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \text{effekten som försvinner ut ur ytan } S$$

Effekten "bärs" av fälten  $\mathbf{E}$  och  $\mathbf{H}$  som växelverkar.

Effektbalans:

$\text{Effektutveckling} + \frac{d}{dt}(\text{elektrisk och magnetisk energi}) + \text{utstrålad effekt} = 0$
---

**Definition:** Poyntings vektor  $\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  anger effektflödestätheten (effekt per ytenhet) till både storlek och riktning, som det elektromagnetiska fältet för med sig.

**Kommentar:** Griffiths härleder Poyntings teorem i avsnitt 8.1.2. I sin version av teoremet har han den totala strömtätheten  $\mathbf{J}$  och den upplagrade elektromagnetiska energitätheten  $u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$ . Det är ingen konflikt mellan Griffiths relation och (0.1). Skillnaden ligger i definitionerna av upplagrad energitäthet och effektförluster. Termen  $\mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$  är den effekt som övergår i värme medan  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  är effekten som fältet ger till både de fria och bundna laddningsbärarna.